SHOUT
SHARE
IT

S. 1142. A.

MEMORIE

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

TOMO XIX.

FASICOLO SECONDO

DELLE

MEMORIE DI MATEMATICA

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

AVVISO AL LEGATORE

Questo Indice e gli Elogi uniti a questo secondo fascicolo vanno trasportati, come prescrive la paginatura Romana, al primo fascicolo di Matematica del T.° XIX. e va levato l' indice esistente in detto primo fascicolo.

MEMORIE
DI
MATEMATICA

SULLE FUNZIONI GENERATRICI

MEMORIA

DEL SIG. MARCHESE LUIGI RANGONI

Ricevuta il dì 15. *Settembre* 1823.

Una Memoria del Signor Marchese Laplace stampata fra quelle dell' Accademia delle Scienze di Parigi per l' anno 1779. contiene l' invenzione, ed i principj del calcolo delle funzioni generatrici suscettive di numerose ed utili applicazioni. Tali furono esse riconosciute dal Socio Sig. Paoli (1), specialmente in ordine all'integrazione delle equazioni a differenze parziali miste di finite ed infinitesime, quantunque poi con diverso metodo trattasse al suo solito profondamente questo ramo d'analisi. Niun altro che io sappia intraprese a coltivare il calcolo delle funzioni generatrici fuori del Sig. Lacroix, il quale (2) ne mostrò la Teoria desunta pure da più ampia dottrina, che ne avea in seguito (1) pubblicata lo stesso Laplace. In questa si mostrano rapidamente gli usi importantissimi delle funzioni generatrici, ed oltre a quelli notati dal Sig. Paoli, anche gli altri, che riguardano l' interpolazione, e la trasformazione delle serie, l'integrazione delle equazioni lineari differenziali non meno che a differenziali parziali, rivolgendosi pure qualche considerazione alle equazioni alle differenze finite tanto ordinarie, che parziali. Siccome però in quest' ultimo rapporto sembra, che egli non abbia fatto che accennare i metodi, che conducono alla soluzione dei problemi relativi. così ho stimato opportuno di esporre nuovamente i principj fondamentali di tutta la dottrina delle funzioni generatrici ad una sola variabile con più estese dimostrazioni di quelle, che ne diede il Laplace, deducendone l'integrazione delle equazioni lineari a differenze finite ordinarie coi coefficienti costanti, unico oggetto di questa memoria; ed applicandola alla risoluzione di diversi problemi appartenenti alle serie specialmente ricorrenti, alla dottrina delle combinazioni, alla partizione dei numeri, ed al calcolo de' probabili.

---

(1) Vedi - Memorie della Società Italiana. tom. VIII. pag. 575.
Paoli - Supplemento agli Elementi di Algebra. Opuscolo. III. pag. 165. e seg.

(2) V. Lacroix. Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral - Seconde édition. Paris 1819. Tom. III. pag. 322. e seg.

1. Sia y_x una funzione qualunque di x. Può sempre concepirsi una tale funzione di t, che sviluppata secondo le potenze di t dia la seguente serie:

$$y_0+y_1.t+y_2.t^2+y_3.t^3....+y_x.t^x+y_{x+1}.t^{x+1}....+y_\infty.t^\infty \quad ,$$

Questa funzione è quella che chiamasi *funzione generatrice di* y_x, essendo questa variabile il coefficiente di t^x. Se questa serie, per qualunque operazione, che possa farsi sulla medesima, riceva per t^x un diverso coefficiente, la serie così modificata diverrà la funzione generatrice di questo nuovo coefficiente. Moltiplicando per esempio la detta serie, che quind' innanzi può esprimersi con u, per $\frac{1}{t^r}$, la funzione $\frac{u}{t^r}$ sarà la generatrice di y_{x+r}, giacchè y_{x+r} diviene allora il coefficiente di t^x. Ciò posto se anche u si moltiplichi per $\left(\frac{1}{t}-1\right)$, il coefficiente di t^x in $u\left(\frac{1}{t}-1\right)$ sarà $y_{x+1}-y_x$, che è la differenza finita di y_x, supposto che x varj dell' unità; e fatto $y_{x+1}-y_x=\Delta y_x$, sarà $u\left(\frac{1}{t}-1\right)$ la funzione generatrice di Δy_x. Intanto si ha

---

(1) V. Laplace. Théorie Analytique des probabilités.-Seconde édition. Paris. 1814.

$$u\left(\frac{1}{t}-1\right)=y_0.t^{-1}+(y_1-y_0)t^0+(y_2-y_1)t+(y_3-y_2)t^2....+(y_{x+1}-y_x)t^x+\text{ec.}=$$
$$y_0t^{-1}+\Delta y_0.t^0+\Delta y_1.t+\Delta y_2.t^2....+\Delta y_x.t^x+\text{ec.}$$

Moltiplicando ancora questa nuova funzione per $\frac{1}{t}-1$, si vedrà facilmente essere la funzione $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^2$ generatrice di $\Delta y_{x+1}-\Delta y_x=\Delta^2 y_x$, giacchè tale riesce il coefficiente di t^x in $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^2$; e siccome moltiplicando nuovamente per $\frac{1}{t}-1$, il coefficiente di t^x nella funzione $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^3$ riesce $\Delta^2 y_{x+1}-\Delta^2 y_x=\Delta^3 y_x$, se ne inferisce, che la funzione generatrice di $\Delta^3 y_x$ è $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^3$: ed in generale la funzione generatrice di $\Delta^i y_x$ è $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^i$.

2. Moltiplicando la funzione $u=y_0+y_1.t+y_2.t^2...+y_x.t^x+$ec. per $a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}+\frac{e}{t^3}...+\frac{q}{t^n}$, il coefficiente di t^x nella nuova funzione che risulterà è $ay_x+by_{x+1}+cy_{x+2}...+qy_{x+n}$, giac-

chè per ottenerlo i termini $a, \frac{b}{t}, \frac{c}{t^2} \dots \frac{q}{t^n}$ dovranno moltiplicarsi rispettivamente, e per ordine per tutti i termini della u da $y_x t^x$ fino ad $y_{x+n} t^{x+n}$, ed è poi chiaro, che $ay_x + by_{x+1} + cy_{x+2} \dots + qy_{x+n}$ può considerarsi come il termine generale della serie de' coefficienti della nuova funzione, cosicchè fatto successivamente $x=0, x=1$ ec. sarà $ay_0+by_1+cy_2 \dots \dots + qy_n$ il coefficiente di t^0, ed $ay_1+by_2+cy_3 \dots + qy_{n+1}$ il coefficiente di t^1 ec. Perciò indipendentemente dai termini contenenti potenze negative di t, quali si hanno dal moltiplicare $y_0, y_1 t \dots$ fino ad $y_{n-1} t^{n-1}$ inclusivamente per $a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}\dots\dots+\frac{q}{t^n}$, la proposta moltiplicazione di u produce lo stesso effetto, che il cambiare in essa la y_x in $ay_x+by_{x+1}+cy_{x+2}\dots\dots+qy_{x+n}$, o piuttosto in ∇y_x, con cui quest' ultima espressione può denotarsi. Sarà dunque per tal modo

$$u\left(a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}\dots+\frac{q}{t^n}\right) \text{ovvero } \nabla y_0+\nabla y_1.t+\nabla y_2.t^2..+\nabla y_x.t^x+\text{ec.}$$

la funzione generatrice di ∇y_x. Quindi poichè $u\left(a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}\dots+\frac{q}{t^n}\right)$, prescindendo dai termini che contengono potenze negative di t, è lo stesso che $\nabla y_0+\nabla y_1.t+\nabla y_2.t^2\dots+\nabla y_x.t^x+$ec., e questa ultima serie ha la stessa forma della u, si proverà similmente, che, moltiplicandola per $a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}\dots+\frac{q}{t^n}$, indipendentemente dalle potenze negative di t si ottiene lo stesso risultato che si ha qualora a ∇y_x si sostituisca in essa $a\nabla y_x+b\nabla y_{x+1}+c\nabla y_{x+2}\dots+q\nabla y_{x+n}$, quantità che si indicherà per $\nabla^2 y_x$, e la cui funzione generatrice sarà per conseguenza $\nabla^2 y_0 + \nabla^2 y_1 . t + \nabla^2 y_2 . t^2 .. + \nabla^2 y_x . t^x +$ ec. ovvero $u\left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} .... + \frac{q}{t^n}\right)^2$. Proseguendo si dimostrerà allo stesso modo, che la funzione generatrice di $a\nabla^2 y_x + b\nabla^2 y_{x+1} + c\nabla^2 y_{x+2} ... + q\nabla^2 y_{x+n} = \nabla^3 y_x$ è $\nabla^3 y_0 + \nabla^3 y_1 . t + \nabla^3 y_2 . t^2 ... + \nabla^3 y_x . t^x +$ ec. ovvero $u\left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} .... + \frac{q}{t^n}\right)^3$; e così di seguito si troveranno le funzioni generatrici di $\nabla^4 y_x$, $\nabla^5 y_x$ ec.; e si giungerà finalmente a conchiudere in generale essere $u\left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} .... + \frac{q}{t^n}\right)^i$ la funzione generatrice di $\nabla^i y_x$.

3. Avendo quindi la funzione $u\left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} .... + \frac{q}{t^n}\right)^s$, nella quale l'esponente s esprime un numero intero qualunque, indipendentemente sempre dai termini che contengono potenze negative di t, la stessa forma rispetto a $\nabla^s y_x$ che ha la u rispetto ad y_x, ne viene, che siccome pel n.° 1. $u\left(\frac{1}{t} - 1\right)^i$ è la funzione generatrice di $\Delta^i y_x$ così sarà $u\left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} .... + \frac{q}{t^n}\right)^s \left(\frac{1}{t} - 1\right)^i$ la funzione generatrice di $\Delta^i \nabla^s y_x$. Perciò essendo pure la forma di questa funzione rispetto a $\Delta^i \nabla^s y_x$ la stessa che quella di u rispetto ad y_x come è evidente per le cose dette, ed essendo pel n.° 1. $\frac{u}{t^r}$ la funzione generatrice di y_{x+r}, sarà $\frac{u}{t^r}\left(a + \frac{b}{t} + \frac{c}{t^2} .... + \frac{q}{t^n}\right)^s \left(\frac{1}{t} - 1\right)^i$ la funzione generatrice di $\Delta^i \nabla^s y_{x+r}$.

4. Si possono generalizzare i risultati del n.° precedente supponendo, che ∇y_x rappresenti una qualunque funzione li-

neare di y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, ec. cioè di tutte, o di alcune soltanto di queste espressioni. È certo, che considerando ∇y_x come coefficiente di t^x nella funzione u moltiplicata per una funzione di $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{t^2}$, $\frac{1}{t^3}$ ec. questa deve rendersi identica a ∇y_x sostituendo in essa y_x all' unità, y_{x+1} ad $\frac{1}{t}$, y_{x+2} ad $\frac{1}{t^2}$ ec. Ciò si verifica appunto, come deve verificarsi in qualunque altro caso analogo, in quello del prec. n.° 2., in cui la funzione moltiplicatrice di u è espressa da $a+\frac{b}{t}+\frac{c}{t^2}\ldots.+\frac{q}{t^n}$, risultandone per coefficiente di t^x nel prodotto la funzione $ay_x+by_{x+1}+cy_{x+2}\ldots.+qy_{x+n}$. Quindi viceversa nel supposto significato di ∇y_x la sua funzione generatrice sarà us, indicando per s ciò che diviene ∇y_x quando in luogo di y_x, y_{x+1}, y_{x+2} ec. si pone rispettivamente e per ordine 1, $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{t^2}$ ec. E poichè, come si vede facilmente, la funzione us, prescindendo dai termini contenenti potenze negative di t, ha la stessa forma di u, come fu dimostrato nel caso speciale del n.° 2., nel quale può ridursi a $\nabla y_0+\nabla y_1.t+\nabla y_2.t^2\ldots.+\nabla y_x.t^x$; moltiplicandola per s, locchè equivale a cambiare in essa la ∇y_x in una funzione di ∇y_x, ∇y_{x+1}, ∇y_{x+2} ec. che si rappresenta per $\nabla^2 y_x$, si avrà nella funzione us^2 la generatrice di $\nabla^2 y_x$. Così procedendo innanzi allo stesso modo si dimostra essere in generale us^i la funzione generatrice di $\nabla^i y_x$.

5. Se nella funzione u si ponga $\Sigma^i y_x$ in luogo di y_x, indicando per $\Sigma^i y_x$ l' integrale $i.^{esimo}$ di y_x, e la nuova funzione

si chiami z, sicchè si abbia $\Sigma^i y_0 + \Sigma^i y_1 . t + \Sigma^i y_2 . t^2 \ldots + \Sigma^i y_x . t^x +$ ec. $= z$, per le cose dimostrate nel n.° 1. sarà la funzione generatrice della differenza $i.^{esima}$ di $\Sigma^i y_x$ cioè di y_x espressa da $z\left(\frac{1}{t} - 1\right)^i$, essendo z la funzione generatrice di $\Sigma^i y_x$. Perciò supposto, che u sia sempre la funzione generatrice di y_x, $z\left(\frac{1}{t} - 1\right)^i$ dovrebbe ridursi ad u; ma le successive i integrazioni di y_x introducono nella z tutte le quantità costanti che per esse si aggiungono, le quali impediscono che si verifichi questa identità. Per trovare dunque un' equazione fra u e $z\left(\frac{1}{t} - 1\right)^i$, tenendo conto di dette costanti, si osservi, che se nella funzione u si pone $\Sigma y_x + A$, cioè l'integrale primo di y_x colla sua costante in luogo di y_x, la nuova funzione sarà $\Sigma y_0 + A + (\Sigma y_1 + A)t + (\Sigma y_2 + A)t^2 \ldots + (\Sigma y_x + A)t^x +$ ec., la quale si indichi per u'. Moltiplicandola per $\frac{1}{t} - 1$ essa diviene $\frac{1}{t}\ \Sigma y_0 + \frac{A}{t} - \Sigma y_0 - A + \Sigma y_1 + A - \Sigma y_1 . t - At + \Sigma y_2 . t + At -$ ec. la quale, prescindendo dal termine $\frac{1}{t}\ \Sigma y_0$ che contiene una potenza negativa di t, si riduce ad $u + \frac{A}{t}$, essendo $\Sigma y_1 - \Sigma y_0 = y_0$, $\Sigma y_2 - \Sigma y_1 = y_1$ ec. sarà dunque $u'\left(\frac{1}{t} - 1\right) = u + \frac{A}{t}$ onde $u' = \left(u + \frac{A}{t}\right) : \left(\frac{1}{t} - 1\right)$. Ma se in luogo di $\Sigma y_x + A$ si ponga $\Sigma(\Sigma y_x + A) + B$, ed il risultato, che si chiami u'', si moltiplichi per $\frac{1}{t} - 1$, si proverà allo stesso modo indipendentemente dalla funzione sommatoria moltiplicata per t^{-1}, essere $u''\left(\frac{1}{t}-1\right)=u'+\frac{B}{t}$; e sostituendo in questa equazione il già trovato valore di u', sarà pure $u''\left(\frac{1}{t}-1\right)=\dots$ $\left(u+\frac{A}{t}\right):\left(\frac{1}{t}-1\right)+\frac{B}{t}$ ovvero $u''\left(\frac{1}{t}-1\right)^2=u+\frac{A}{t}+\frac{B}{t}\cdot\left(\frac{1}{t}-1\right)=u+\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}-\frac{B}{t}=u+\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}$, essendo indifferente l'esprimere la costante divisa per t con A—B o con A. Se ora nella funzione u'' si ponga $\Sigma(\Sigma(\Sigma y_x+A)+B)+C$ in luogo di $\Sigma(\Sigma y_x+A)+B$ nascerà una nuova funzione u''' per cui si avrà $u'''\left(\frac{1}{t}-1\right)=u''+\frac{C}{t}$, ed essendo $u''=\left(u+\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}\right):\left(\frac{1}{t}-1\right)^2$ sarà $u'''\left(\frac{1}{t}-1\right)^3=u+\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t}\left(\frac{1}{t}-1\right)^2=u+\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t^3}-\frac{2C}{t^2}+\frac{C}{t}=u+\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t^3}$. Proseguendo per tal maniera si viene a conoscere, che rappresentando z la funzione generatrice dell' integrale i^{esimo}. di y_x, siccome u', u'', u''', rappresentano quelle del primo, secondo, terzo, sarà generalmente $z\left(\frac{1}{t}-1\right)^i=u+\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t^3}\dots\dots+\frac{F}{t^i}$ tante essendo le costanti A, B, . . . F quante sono le successive integrazioni in $\Sigma^i y_x$. Da quest'ultima equazione poi si ricava

$$z=\frac{ut^i+At^{i-1}+Bt^{i-2}+Ct^{i-3}\dots+F}{(1-t)^i},$$

che è il valore della funzione generatrice dell'integrale i^{esimo}. di y_x esteso soltanto ai valori positivi di x, giacchè nelle funzioni generatrici fin quì considerate non essendosi avuto riguardo, che alle potenze positive di t, sonosi per conseguenza trascurate le funzioni y_{-1}, y_{-2}, ec. y_{-x} corrispondenti alle potenze negative di t. Quindi, facendosi pure astrazione dalle accennate costanti, la funzione generatrice di $\Sigma^i y_x$ è $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^{-i}$, vale a dire che questa funzione generatrice si ottiene cambiando in quella di $\Delta^i y_x$, i in $-i$, cosicchè $\Delta^{-i} y_x$ può rappresentare una quantità identica a $\Sigma^i y_x$. Però se si ha riguardo alle costanti arbitrarie, bisogna passando dalle potenze positive di $\frac{1}{t}-1$ alle negative, cioè cambiando i in $-i$ nella funzione $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^i$ generatrice di $\Delta^i y_x$, aumentare u della serie $\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t^3}+$ec. prolungata come si disse.

6. Si è veduto fin quì come le funzioni generatrici si formino dalla legge delle variabili corrispondenti. È d'uopo ora vedere come le variabili si deducano dalle loro funzioni generatrici. Essendo quindi s una funzione qualunque di $\frac{1}{t}$ si tratta di ricavare $\nabla^i y_x$ dalla sua funzione generatrice. Poichè secondo ciò che si è veduto al n.° 4. $\nabla^i y_x$ è il coefficiente di t^x nella funzione us^i, in cui s è ciò che diviene ∇y_x quando vi si pone l'unità in luogo di y_x, $\frac{1}{t}$ in luogo di y_{x+1}, $\frac{1}{t^2}$ in luogo di y_{x+2} ec. sviluppando s^i secondo le potenze di $\frac{1}{t}$, ogni termine dello sviluppo di s^i potrà essere generalmente rappresentato da $\frac{k}{t^n}$, ed il coefficiente di t^x nella funzione $\frac{ku}{t^n}$ sarà (n. 1.) ky_{x+n}, che rappresenta pure ciascun termine del coefficiente di t^x in us^i. Quindi i termini dello sviluppo di s^i, tutti compresi sotto la forma $\frac{k}{t^n}$, daranno quelli di $\nabla^i y_x$ quando in $\frac{k}{t^n}$ si sostituisca $(y_x)^n$ in vece di $\frac{1}{t^n}$, e l'esponente si tra-

sporti ad accrescere l' indice x. Così a cagion d'esempio quando $n=1$, il termine $\frac{k}{t}$ dello sviluppo di us^i dà il termine ky_{x+1} di $\nabla^i y_x$, e quando $n=0$ il termine k del predetto sviluppo darà il termine ky_x di $\nabla^i y_x$. Di quì nasce la regola per avere $\nabla^i y_x$, la quale prescrive 1.° di porre in s, y_x in luogo di $\frac{1}{t}$ sviluppando poi ciò che diviene s^i secondo le potenze di y_x; 2.° di trasportare all' indice x gli esponenti di y_x; 3.° di moltiplicare per y_x i termini indipendenti da y_x, e che possono riguardarsi avere $(y_x)^0$ per coefficiente. Per rendere intanto la cosa più sensibile con un esempio si supponga $s=a+\frac{b}{t}$, e per la regola data si troverà il coefficiente di t^x in us^2 ponendo in s, y_x in luogo di $\frac{1}{t}$, ed innalzando $a+by_x$ al quadrato, che sarà $a^2+b^2(y_x)^2+2ab(y_x)^1$ da cui, cambiando $(y_x)^2$ in y_{x+2}, $(y_x)^1$ in y_{x+1}, e moltiplicando a^2 per y_x, risulterà $a^2y_x+b^2y_{x+2}+2aby_{x+1}=\nabla^2 y_x$. Lo stesso risultato si ottiene osservando, che $\nabla y_x=ay_x+by_{x+1}$, giacchè se s è ciò che diviene ∇y_x cambiando y_x nell' unità, ed y_{x+1} in $\frac{1}{t}$, viceversa s dà il valore di ∇y_x quando ad $\frac{1}{t}$ si sostituisce y_{x+1}, ed i termini indipendenti da $\frac{1}{t}$ si moltiplicano per y_x. E poichè $\nabla^2 y_x$ è ciò che diviene ∇y_x quando in esso si sostituisce ∇y_x ad y_x sarà $\nabla^2 y_x=a(ay_x+by_{x+1})+b(ay_{x+1}+by_{x+2})=a^2y_x+2aby_{x+1}+b^2y_{x+2}$ come prima.

7. La regola data nel n.° precedente onde trovare $\nabla^i y_x$

serve pure a trovare $\Delta^i y_x$ cioè la differenza i^{seima} di y_x, giacchè $\nabla^i y_x$ si cambia in $\Delta^i y_x$, o piuttosto si riduce al caso speciale di $\Delta^i y_x$, quando $s = \frac{1}{t} - 1$, poichè si è veduto al n.° 1. essere $u\left(\frac{1}{t} - 1\right)^i$ la funzione generatrice di $\Delta^i y_x$; e quindi poichè $\left(\frac{1}{t} - 1\right)^i = \frac{1}{t^i} - \frac{i}{t^{i-1}} + \frac{i(i-1)}{1.2} \cdot \frac{1}{t^{i-2}} - \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3} \cdot \frac{1}{t^{i-3}} +$ ec. sostituendo y_{x+i} ad $\frac{1}{t^i}$, y_{x+i-1} ad $\frac{1}{t^{i-1}}$, y_{x+i-2} ad $\frac{1}{t^{i-2}}$ ec. si avrà $\Delta^i y_x = y_{x+i} - iy_{x+i-1} + \frac{i(i-1)}{1.2} y_{x+i-2} - \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3.} y_{x+i-3} +$ ec.

8. Se in vece di sviluppare s^i secondo le potenze di $\frac{1}{t}$, si sviluppi secondo quelle di $\frac{1}{t} - 1$, e si denoti per $k\left(\frac{1}{t} - 1\right)^n$ un termine qualunque della serie che ne risulta, il coefficiente di t^x in $ku\left(\frac{1}{t} - 1\right)^n$ sarà $k\left(y_{x+n} - ny_{x+n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} y_{x+n-2} - \text{ec.}\right) = k\Delta^n y_x$ secondo ciò che si è veduto nel n.° precedente, e come apparisce dallo sviluppo di $\left(\frac{1}{t} - 1\right)^n$ colla regola del binomio neutoniano, moltiplicandone i termini rispettivamente per quelli di u per avere tutti i prodotti parziali che contengono il fattore t^x. Ciò posto con riflessioni analoghe a quelle del n.° 6. si rileva, che si avranno tutti i termini di $\nabla^i y_x$ sostituendo per ogni valore particolare di $k\left(\frac{1}{t} - 1\right)^n$, Δy_x in luogo di $\frac{1}{t} - 1$ e trasportando l' esponente n all' indice del segno della differenza, cosicchè ne risulti $k\Delta^n y_x$, che rappresenta pure generalmente ciascun termine di $\nabla^i y_x$. Per questa regola simile alla data nel citato n.° 6. si avrà $\nabla^i y_x$, ponendo come si è detto in s, sempre supposta funzione di

$\frac{1}{t}$, Δy_x in luogo di $\frac{1}{t} - 1$, o ciò che torna lo stesso $\Delta y_x + 1$ in luogo di $\frac{1}{t}$. Sviluppando allora s^i secondo le potenze di Δy_x si porrà quindi nel risultato, Δy_x in luogo di $(\Delta y_x)^1$, e $\Delta^2 y_x$ in luogo di $(\Delta y_x)^2$ ec., e finalmente i termini indipenti da Δy_x, che possono considerarsi moltiplicati per $(\Delta y_x)^0$, si moltiplicheranno per $\Delta^0 y_x = y_x$.

9. La dimostrazione del n.° precedente può ricevere una maggiore generalità, poichè se sia s funzione di r, ed r sia funzione di $\frac{1}{t}$ di modo che il coefficiente di t^x in ur sia Πy_x, si avrà $\nabla^i y_x$ sostituendo in s, Πy_x in luogo di r, sviluppando in seguito s^i secondo le potenze di Πy_x, ed applicando al solito gli esponenti alla caratteristica Π, cioè indicando per n un esponente qualunque comprensivamente al caso di $n = 0$ col porre $\Pi^n y_x$ in luogo di $(\Pi y_x)^n$. Nelle supposizioni del n.° preced. si ha $r = \frac{1}{t} - 1$ funzione di $\frac{1}{t}$, ed s è sviluppato secondo le potenze di $\frac{1}{t} - 1$. Quindi $ur = u\left(\frac{1}{t} - 1\right)$, ed il coefficiente di t^x in ur è, come già si è veduto al n.° 1., Δy_x, cosicchè Πy_x in questo caso diviene Δy_x da sostituirsi in s in luogo di $\frac{1}{t} - 1$ per ottenere poi l'espressione di $\nabla^i y_x$, nel modo spiegato.

Si raccoglie pertanto generalmente, che lo sviluppo di $\nabla^i y_x$ per una serie ordinata secondo le variazioni successive di Πy_x, $\Pi^2 y_x$ ec. si riduce alla formazione della funzione generatrice di $\nabla^i y_x$ cioè di us^i, allo sviluppo della funzione stessa secondo le potenze di una data funzione; e finalmente al ritorno dalla funzione generatrice così sviluppata ai coefficienti variabili corrispondenti, divenendo gli esponenti delle potenze dello sviluppo gli indici della caratteristica di questi coefficienti. Il passaggio da questi coefficienti alle loro funzioni generatrici, e *viceversa* costituisce il *calcolo delle funzioni generatrici* di cui restano a vedersi le applicazioni.

10. Rischiarata fin quì la Teoria delle funzioni generatrici ad una sola variabile seguendo collo stesso ordine le proposizioni stabilite dal Sig. Laplace non è difficile di prevederne le molte applicazioni; e si richiede ora mostrarne quelle poche, le quali si riferiscono alla soluzione delle equazioni alle differenze finite coi coefficienti costanti.

Sia pertanto l' equazione generale alle differenze coi coefficienti costanti a, b, c, d, ec. e col secondo membro nullo, che trattasi di risolvere

$$\text{(A)} \ldots ay_{x+m}+by_{x+m-1}\ldots\ldots+fy_{x+4}+gy_{x+3}+py_{x+2}+qy_{x+1}+y_x=0$$

ovvero

$$y_x=-(ay_{x+m}+by_{x+m-1}\ldots+fy_{x+4}+gy_{x+3}+py_{x+2}+qy_{x+1}).$$

Considerata la funzione u del n.° 1. come generatrice di y_x, è chiaro per le riflessioni esposte nel successivo n.° 2. che $-u\left(\frac{q}{t}+\frac{p}{t^2}+\frac{g}{t^3}+\frac{f}{t^4}\ldots.+\frac{b}{t^{m-1}}+\frac{a}{t^m}\right)$ sarà la funzione generatrice di $-(ay_{x+m}+by_{x+m-1}\ldots+fy_{x+4}+gy_{x+3}+py_{x+2}+qy_{x+1})$ quantità, che può rappresentarsi per $-\nabla y_x$. Ora essendo secondo l' equazione proposta $y_x=-\nabla y_x$, sarà anche $y_{x\pm m}=-\nabla y_{x\pm m}$ finchè $x-m$ non riceva un tale valore o negativo, od anche positivo, per cui secondo le particolari condizioni dei problemi ai quali l' equazione medesima può riferirsi, essa non si verifichi. Prima pertanto che ciò avvenga, si eguaglieranno fra loro i termini corrispondenti delle due funzioni u, $-u\left(\frac{q}{t}+\frac{p}{t^2}+\frac{g}{t^3}+\frac{f}{t^4}\ldots.+\frac{b}{t^{m-1}}+\frac{a}{t^m}\right)$, e per trovare una equazione fra le medesime sarà d' uopo sottrarre dalla prima tutti que' termini pe' quali non si verifica l' equazione $y_{x\pm m}t^{x\pm m}=-\nabla y_{x\pm m}.t^{x\pm m}$, e dalla seconda, oltre il sottrarne le quantità, che si riducono alla forma $-\nabla y_x.t^{x\pm m}$ e per le quali pure non si verifica la stessa equazione, si dovranno inoltre levare quelle, che non possono ridursi a tal forma, e che sono introdotte dalla moltiplicazione della funzione u per l' esposto fattore. Ciò premesso affine di rendere la cosa più sensibile si osservi essere

$$-u\left(\frac{q}{t}+\frac{p}{t^2}+\frac{g}{t^3}+\frac{f}{t^4}\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{b}{t^{m-1}}+\frac{a}{t^m}\right)=$$

$$-(qy_0t^{-1}+qy_1t^0+qy_2t\ldots\ldots+qy_{x+1}t^x+\text{ec.})$$

$$-(py_0t^{-2}+py_1t^{-1}+py_2t^0+py_3t\ldots\ldots+py_{x+2}t^x+\text{ec.})$$

$$-(gy_0t^{-3}+gy_1t^{-2}+gy_2t^{-1}+gy_3t^0+gy_4t\ldots\ldots+gy_{x+3}t^x+\text{ec.})$$

$$-(fy_0t^{-4}+fy_1t^{-3}+fy_2t^{-2}+fy_3t^{-1}+fy_4t^0+fy_5t\ldots\ldots+fy_{x+4}t^x+\text{ec.})$$

. . . .

. . . .

$$-(by_0t^{-m+1}+by_1t^{-m+2}+by_2t^{-m+3}+by_3t^{-m+4}\ldots+by_{x+m-1}t^x+\text{ec.})$$

$$y_0t^{-m}\quad+ay_1t^{-m+1}+ay_2t^{-m+2}+ay_3t^{-m+3}+ay_4t^{-m+4}\ldots+ay_{x+m}t^x+\text{ec.}$$

ovvero, ordinando secondo le potenze negative di t, e successivamente secondo le positive si avrà.

$$-u\left(\frac{q}{t}+\frac{p}{t^2}+\frac{g}{t^3}+\frac{f}{t^4}\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{b}{t^{m-1}}+\frac{a}{t^m}\right)=$$

$$-(qy_0+py_1+gy_2+fy_3\ldots\ldots\ldots+by_{m-2}+ay_{m-1})\,t^{-1}$$

$$-(py_0+gy_1+fy_2\ldots\ldots\ldots\ldots+by_{m-3}+ay_{m-2})\,t^{-2}$$

$$-(gy_0+fy_1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+by_{m-4}+ay_{m-3})\,t^{-3}$$

. . . .

$$-ay_0t^{-m}$$

$$-(qy_1+py_2+gy_3+fy_4\ldots\ldots\ldots\ldots+by_{m-1}+ay_m)\,t^0$$

$$-(qy_2+py_3+gy_4+fy_5\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+by_m+ay_{m+1})\,t$$

. . . .

$$-(qy_{x+1}+py_{x+2}+gy_{x+3}+fy_{x+4}\ldots\ldots+by_{x+m-1}+ay_{x+m})t^x-\text{ ec.}$$

È facile intanto a vedersi, che il coefficiente di t^{-1} può esprimersi per $-\nabla y_{-1}$, giacchè esso è appunto ciò, che diviene la quantità come sopra rappresentata da $-\nabla y_x$ allorquando in essa si pone $x=-1$. Si vedrà pure che il coefficiente di t^{-2} è $-\nabla y_{-2}+qy_{-1}$, essendo lo stesso coefficiente ciò che diviene la quantità espressa da $-\nabla y_x$ allorchè si fa $x=-2$ sottratto però il termine $-qy_{-1}$. Parimenti il coefficiente di t^{-3} nel terzo termine riesce $=-\nabla y_{-3}+qy_{-2}+py_{-1}$, e quello di t^{-4} nel quarto è $=-\nabla y_{-4}+qy_{-3}+py_{-2}+gy_{-1}$ e così successivamente finchè pel coefficiente t^{-m} si avrà $-\nabla y_{-m}+qy_{-m+1}+py_{-m+2}\ldots\ldots\ldots+by_{-1}=-ay_0$. Si rileva eziandio, che i coefficienti di t^0, t^1, $t^2\ldots\, t^x$ sono rispettivamente $-\nabla y_0$, $-\nabla y_1$, $-\nabla y_2\ldots\ldots -\nabla y_x$. Sarà quindi ancora

$$-u\left(\frac{q}{t}+\frac{p}{t^2}+\frac{g}{t^3}+\frac{f}{t^4}\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{b}{t^{m-1}}+\frac{a}{t^m}\right)=$$

$$-\nabla y_{-1}t^{-1}-(\nabla y_{-2}-qy_{-1})t^{-2}-(\nabla y_{-3}-qy_{-2}-py_{-1})t^{-3}-\ldots$$

$- ay_0 t^{-m} - \nabla y_0 - \nabla y_1 . t - \nabla y_2 . t^2 - \nabla y_3 . t^3 \ldots - \nabla y_x . t^x$. Confrontata ora questa funzione colla u, e supposto che l'uguaglianza dei termini corrispondenti non cominci, che fra il termine $-\nabla y_n . t^n$ dell' una, e il termine $y_n . t^n$ dell'altra, è chiaro, che sottraendo dalla prima tutti i termini precedenti a $-\nabla y_n . t^n$, e dalla seconda tutti quelli, che precedono $y_n t^n$ ne nascerà l' equazione

$$- u \left(\frac{q}{t} + \frac{p}{t^2} + \frac{g}{t^3} + \frac{f}{t^4} \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{b}{t^{m-1}} + \frac{a}{t^m} \right)$$

$$+ \nabla y_{-1} . t^{-1} + (\nabla y_{-2} - qy_{-1}) t^{-2} + (\nabla y_{-3} - qy_{-2} - py_{-1}) t^{-3} \ldots$$

$$\ldots\ldots + ay_0 t^{-m} + \nabla y_0 + \nabla y_1 . t + \nabla y_2 . t^2 \ldots\ldots\ldots$$

$$+ \nabla y_{n-1} . t^{n-1} = u - y_0 - y_1 . t - y_2 . t^2 \ldots - y_{n-1} . t^{n-1}$$; e

ponendo

$$(B) \ldots \left\{ \begin{array}{l} \nabla y_{-1} t^{-1} + (\nabla y_{-2} - qy_{-1}) t^{-2} + (\nabla y_{-3} - qy_{-2} - py_{-1}) t^{-3} \ldots \\ \ldots\ldots + ay_0 t^{-m} + \nabla y_0 + \nabla y_1 . t + \nabla y_2 . t^2 \ldots\ldots \\ \ldots + \nabla y_{n-1} . t^{n-1} + y_0 + y_1 . t + y_2 . t^2 \ldots + y_{n-1} . t^{n-1} \end{array} \right.$$

$$= \varphi(t)$$

si otterrà finalmente

$$(C) \ldots\ldots u = \frac{\varphi(t) . t^m}{t^m + qt^{m-1} + pt^{m-2} + gt^{m-3} \ldots\ldots + bt + a}$$

e quindi per avere il valore di y_x non resterà che a svolgere in serie questo valore di u secondo le potenze di t, per trovare quello del coefficiente di t^x, che sarà il ricercato. A ciò potranno servire molte maniere di sviluppi, fra i quali quello, che sembra più opportuno, consiste nel decomporre, quando sia possibile, la frazione esprimente la funzione generatrice di y_x in altrettante quanti sono i fattori del suo denominatore, locchè equivale, quando lo stesso denominatore abbia solamente fattori disuguali, e possa in essi risolversi coi metodi conosciuti per la risoluzione delle equazioni algebraiche, a trovare altrettante frazioni col numeratore costante quante sono le radici dell' equazione $t^m + qt^{m-1} + pt^{m-2} + gt^{m-3} \ldots + bt + a = 0$.

11. Per applicare le cose spiegate nel n.° precedente, si prenda ad esempio il problema appartenente al giuoco degli scacchi proposto dal geometra Charles, e poscia risoluto colle differenze finite dal Padre Gregorio Fontana (1), e dal Brunacci (2). Tale problema dall' ultimo de' citati Autori si enuncia così: „ Data nello Scacchiere una casella qualunque, e supponendo la torre posta in una casella parimente data; si dimanda in quante maniere la torre facendo x mosse, possa andare dalla casella o scacco in cui si trova, alla detta determinata casella „.

Indicando quindi per y_x il numero delle maniere nelle quali la torre partendo da una sede qualunque dello Scacchiere può ritornarvi dopo x mosse; per z_x il numero delle maniere nelle quali la stessa torre facendo x mosse dopo essere partita da una sede qualunque può fermarsi in un' altra, che sia colla prima nella stessa linea parallela al lato dello Scacchiere; finalmente per u_x il numero delle maniere nelle quali quel pezzo fatte x mosse può fermarsi in una sede diversa da quella da cui partì, e non posta in una stessa linea parallela al lato dello Scacchiere, si hanno le tre seguenti equazioni già stabilite con ingegnoso raziocinio:

---

(1) V. Biblioteca Fisica di Europa. Tom. VIII. pag. 29. e seg.

(2) V. Brunacci. Corso di Matematica Sublime. Tom. I. pag. 131.

$$1.^a \quad y_{x+1}=14z_x$$

$$2.^a \quad z_{x+1}=y_x+6z_x+7u_x$$

$$3.^a \quad u_{x+1}=2z_x+12u_x.$$

E prima di risolvere l' equazione

$$y_{x+3}=18y_{x+2}-44y_{x+1}-168y_x, \text{ ovvero}$$

$$\frac{1}{168}y_{x+3}-\frac{3}{28}y_{x+2}+\frac{11}{42}y_{x+1}+y_x=0,$$

che pel Brunacci viene dedotta dalle precedenti colle opportune eliminazioni, giova col soccorso delle medesime trovare i valori di y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, ec. anche per far vedere come il metodo delle sostituzioni successive conduca qualche volta a determinare con maggiore facilità, che non si otterrebbe dalle formole generali, i valori particolari di y_x. D' altronde i valori di y_0, y_1, y_2, y_3 sono necessarj come quantità costanti a fissare l' espressione della funzione generatrice, il cui sviluppo determina poi quella di y_x. Ciò posto, poichè è manifesto essere $y_0=y_1=0$, $z_1=1$, $u_1=0$, fatto nella 2.ª, e nella 3.ª delle precedenti equazioni $x=1$, si avrà $z_2=y_1+6z_1+7u_1=6$, $u_2=2z_1+12u_1=2$. Quindi posto $x=1$ anche nella 1.ª si ha $y_2=14z_1=14$. Fatto ora $x=2$ nella 2.ª viene $z_3=y_2+6z_2+7u_2=64$: dunque ponendo successivamente $x=2$, $x=3$ nella 1.ª sarà $y_3=14.z_2=84$, $y_4=14z_3=896$. E posto $x=2$ nella 3.ª sarà $u_3=2z_2+12u_2=36$, e fatto $x=3$ nella 2.ª viene $z_4=y_3+6z_3+7u_3=720$, e quindi dalla 1.ª si ha $y_5=14.z_4=10080$. Per trovare il valore di z_5 da cui dipende quello di y_6 si osservi, che posto $x=3$ nella 3.ª viene $u_4=2z_3+12u_3=560$. Pertanto fatto $x=4$

nella 2.ª si ha finalmente $z_5 = y_4 + 6z_4 + 7u_4 = 9136$, onde dalla 1.ª si ricava $y_6 = 14z_5 = 127904$.

Ripigliando adesso l' equazione $\frac{1}{168} y_{x+3} - \frac{3}{28} y_{x+2} + \frac{11}{42} y_{x+1} + y_x = 0$ e paragonandola colla (A) del n.° prec. si vedrà essere $g = \frac{1}{168}$, $p = -\frac{3}{28}$, $q = \frac{11}{42}$ annullandosi tutti gli altri coefficienti della formola generale. Sarà dunque la funzione generatrice di y_x espressa (n.° 10.) da $\frac{\phi(t).t^3}{t^3 + \frac{11}{42} t^2 - \frac{3}{28} t + \frac{1}{168}} = \frac{\phi(t).t^3.168}{168t^3 + 44t^2 - 18t + 1}$. Per determinare $\phi(t)$ conviene notare, che il più piccolo valore di x che verifica l' equazione proposta è quello di $x = 1$ come può facilmente sperimentarsi dopo le cose dette. Perciò applicando la formola (B) del n.° prec. si scorgerà essere nel nostro caso $\phi(t) = \nabla y_{-1} t^{-1} + \nabla y_0$ annullandosi tutti gli altri termini di quella; ed essendo $\nabla y_x = \frac{1}{168} y_{x+3} - \frac{3}{28} y_{x+2} + \frac{11}{42} y_{x+1}$ sarà $\nabla y_{-1} = \frac{1}{12}$, $\nabla y_0 = -1$: dunque $\phi(t) = \frac{t^{-1} - 12}{12}$.
E perciò si avrà $\frac{\phi(t)\, t^3\, 168}{168t^3 + 44t^2 - 18t + 1} = \frac{14(t^{-1} - 12)t^3}{168t^3 + 44t^2 - 18t + 1} = \frac{14(t^{-1} - 12)}{t^{-3} - 18t^{-2} + 44t^{-1} + 168}$ frazione, il cui denominatore si risolve nei tre fattori $\frac{1}{t} - 6$, $\frac{1}{t} - 14$, $\frac{1}{t} + 2$, ed eguagliato a zero, dà quella stessa equazione da cui dipende secondo i metodi conosciuti, l' integrazione della equazione proposta. Si tratta pertanto dopo aver fatto $\frac{1}{t} = t'$ di risolvere la frazione $\frac{t' - 12}{t'^3 - 18t'^2 + 44t' + 168}$ nelle tre altre $\frac{A}{t' - 6}$, $\frac{B}{t' - 14}$, $\frac{C}{t' + 2}$, nelle quali i numeratori sono quantità costanti. A determinarle varrà il metodo de' coefficienti

indeterminati pel quale si avranno le tre segnenti equazioni
$A+B+C=0$, $-12A-4B-20C-1=0$
$-7A-3B+21C+3=0$

da cui si ricava facilmente $A=\frac{6}{64}$, $B=\frac{1}{64}$, $C=-\frac{7}{64}$. Ora pertanto sarà $u=\frac{(t'-12)14}{t'^3-18t'^2+44t'+168}=14\left(\frac{6}{64}\cdot\frac{1}{t'-6}+\frac{1}{64}\cdot\frac{1}{t'-4}-\frac{7}{64}\cdot\frac{1}{t'+2}\right)$. E poichè in generale $\frac{1}{t'-a}$, essendo a una qualunque quantità positiva o negativa, si sviluppa nella serie $\frac{1}{t'}+\frac{a}{t'^2}+\frac{a^2}{t'^3}+$ ec. nella quale il coefficiente di $\frac{1}{t'^x}=t^x$ è evidentemente a^{x-1}, sarà perciò u la somma di tre serie ordinate secondo le potenze di t, che riunite in una sola danno pel coefficiente di t^x, o ciò che è lo stesso pel valore di y_x la quantità $14\left(\frac{6}{64}\cdot 6^{x-1}+\frac{1}{64}\cdot 14^{x-1}-\frac{7}{64}(-2)^{x-1}\right)$ $=\frac{14.6^x+14^x+49.(-2)^x}{64}$ formola identica alla ritrovata dal Brunacci (1). Dopo ciò è facile il ritrovare le espressioni di z_x, e di u_x. Di fatto dipendentemente dall' equazione $y_{x+1}=14z_x$ sarà $z_x=\frac{6.6^x+14^x-7.(-2)^x}{64}$, e dipendentemente dall' equazione $z_{x+1}=y_x+6z_x+7u_x$ si ottiene $u_x=\frac{-2.6^x+14^x+(-2)^x}{64}$.

12. Se in vece di decomporre l' espressione della funzione u del n.° precedente nelle tre frazioni considerate, se ne richiami la prima forma $\frac{\phi(t)t^3.168}{168t^3+44t^2-18t+1}=\frac{14(t^{-1}-12)t^3}{168t^3+44t^2-18t+1}$ $=\frac{14t^2(1-12t)}{168t^3+44t^2-18t+1}$ e si ponga $\frac{1-12t}{168t^3+44t^2-18t+1}=A+Bt+Ct^2$ $+Dt^3+Et^4+$ec. determinando col metodo pure de' coefficienti

---

(1) V. Brunacci. Op. e Vol. citati pag. 133.

indeterminati le costanti A, B, C ec. si avrà una nuova serie, che moltiplicata in ogni suo termine per $14t^2$ darà nel coefficiente di t^x il valore di y_x secondo le condizioni del probl. precedente. Eseguite pertanto le opportune operazioni, si ottiene la seguente equazione

$$\begin{array}{rllllll}
1-12t = & A & +Bt & +Ct^2 & +Dt^3 & +Et^4 & +Ft^5+\text{ec.} \\
 & & -18At & -18Bt^2 & -18Ct^3 & -18Dt^4 & -18Et^5-\text{ec.} \\
 & & & +44At^2 & +44Bt^3 & +44Ct^4 & +44Dt^5+\text{ec.} \\
 & & & & +168At^3 & +168Bt^4 & +168Ct^5+\text{ec.}
\end{array}$$

onde $A=1$, $B=6$, $C=64$, $D=720$, $E=9136$. Si potrebbe non difficilmente proseguire la determinazione dei coefficienti della sviluppata serie, che cominciando da E ed inoltrando verso le potenze più alte di t, tutti dipendono dai tre precedenti, in modo che un coefficiente qualunque S si avrà dall'equazione $S-18R+44Q+168P=0$, supposto che P, Q, R, sieno per ordine i coefficienti che precedono S. Basta però vedere la corrispondenza dei valori di tali coefficienti con quelli che si determinarono per y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, col metodo delle sostituzioni successive nel n.° prec. Essi si troveranno identici ai coefficienti della serie ultimamente considerata, quando questa come si disse venga in ogni suo termine moltiplicata per $14t^2$. Ne risulterà di fatto l' altra serie $14t^2+14.6t^3+14.64t^4+14.720t^5+14.9136t^6+$ ec. in cui i coefficienti di t^2, t^3, t^4, t^5, t^6 sono gli stessi valori già prima trovati in altro modo benchè con minore semplicità per y_2, y_3, y_4, y_5, y_6. Perciò l' ultimo metodo spiegato sembra da preferirsi agli altri per determinare il valore di y_x in qualunque supposizione di x, che con troppo lunghe operazioni soltanto può ottenersi anche dalla formola generale del n.° precedente per valori alquanto grandi di x.

13. Per continuare le applicazioni del metodo esposto per la risoluzione dell' equazione generale considerata nel n.° 10.

giova cercar quella di un problema già trattato pure dal Brunacci, il quale conduce come si vedrà ad una funzione generatrice frazionaria, in cui il denominatore contiene fattori eguali. Abbiasi pertanto la serie seguente nella quale i tre primi termini sieno dati, essendo la legge con cui tutti mutuamente si legano espressa dall'equazione $y_{x+3}=5y_{x+2}-8y_{x+1}+4y_x$

Indici	0,	1,	2,	3,	4,	5.	. . . . . x.
Termini	0,	0,	1,	5.	17,	49	. . . . . . y_x.

Si avrà : $y_x - \frac{1}{4} y_{x+3} + \frac{5}{4} y_{x+2} - 2y_{x+1} = 0$, e quindi nella formola (A) del n.° 10. sarà $g = -\frac{1}{4}$, $p = \frac{5}{4}$, $q = -2$ ponendo a zero tutti i coefficienti degli altri termini che precedono ; ed applicando la formola (C) dello stesso n.° viene $u = \frac{\varphi(t)t^3}{t^3 - 2t^2 + \frac{5}{4}t - \frac{1}{4}} = \frac{-4\varphi(t)}{t^{-3} - 5t^{-2} + 8t^{-1} - 4}$. Per determinare $\varphi(t)$ si osservi, che nel nostro caso ∇y_x è (n.° 2.) $= -\frac{1}{4} y_{x+3} + \frac{5}{4} y_{x+2} - 2y_{x+1}$, e siccome l' equazione $-\nabla y_x = y_x$ si verifica anche quando $x = 0$, nel qual caso si ha $\frac{1}{4} y_3 - \frac{5}{4} y_2 + 2y_1 = y_0 = 0$, onde sarà $y_3 = 5$, essendo già per ipotesi $y_2 = 1$, $y_1 = y_0 = 0$, e $\varphi(t)$ nella formola (B) del citato n.° si ridurrà a $\nabla y_{-1} t^{-1} = -\frac{1}{4} t^{-1}$. Si avrà quindi $u = \frac{t^{-1}}{t^{-3} - 5t^{-2} + 8t^{-1} - 4}$, e fatto $t^{-1} = \frac{1}{t} = z$ verrà $u = \frac{z}{z^3 - 5z^2 + 8z - 4} = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2} = z\left(\frac{C}{z-1} + \frac{C'}{(z-2)^2} + \frac{C''}{z-2}\right)$ supposto C, C', C'' tre quantita costanti determinabili secondo il metodo dei coefficienti indeterminati. Qualunque però sia il valore che di esse risulti colle analoghe operazioni (1) svolgendo in serie i tre termini frazionarj che compongono l'ultima espressione di u, e prendendo per ciascuno di essi il coefficiente di $\frac{1}{z^{x+1}}$, si troverà facilmente la forma di y_x dipendentemente dalla sua funzione generatrice. Di fatto essendo perciò che si è detto anche nel n.° 11. il coefficiente di $\frac{1}{z^{x+1}}$ nello sviluppo di $\frac{1}{z-1}$ espresso da $1^x=1$, e in quello di $\frac{1}{z-2}$ essendo tale coefficiente $=2^x$; ed essendo inoltre generalmente $\frac{1}{(z-a)^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{2a}{z^3} + \frac{3a^2}{z^4} + \frac{4a^3}{z^5} +$ ec. sarà il coefficiente di $\frac{1}{z^{x+1}}$ nello sviluppo di $\frac{1}{(z-2)^2}$ espresso da $x.2^{x-1}$, e per conseguenza il termine della funzione u, il cui coefficiente esprime il valore di y_x, sarà come è chiaro $z\left(\frac{C.1}{z^{x+1}} + \frac{C'.x.2^{x-1}}{z^{x+1}} + \frac{C''.2^x}{z^{x+1}}\right) = \frac{C+C'.x.2^{x-1}+C''.2^x}{z^x}$ $=(C+C'x.2^{x-1}+C''2^x)t^x$; e finalmente $y_x=C+C'x.2^{x-1}+C''2^x$, espressione identica a quella, che trovasi presso il Brunacci (1) solo, che si cambj nella prima C' in 2C', locchè può farsi trattandosi di costanti da determinarsi, cosicchè il metodo fin quì adoperato non toglie il maggior comodo eventuale di determinare le costanti nel modo proprio dell' integrazione delle equazioni alle differenze. Volendosi però anche in questo esempio determinare le costanti colla decomposizione della frazione $\frac{z}{(z-1)(z-2)^2} = z\left(\frac{C}{z-1} + \frac{C'}{(z-2)^2} + \frac{C''}{z-2}\right)$ si troveranno le tre seguenti equazioni $C+C''=0$, $-4C+C'-3C''=0$, $4C-C'+2C''=1$, dalle quali si ricava $C''=-1$, $C=1$, $C'=1$.

---

(1) V. Euler. Introductio in Analysin infinitorum Cap. II.

---

(1) V. Brunacci. Corso di Matematica Sublime Tom. I. pag. 111.

Sarà dunque $\frac{z}{(z-1)(z-2)^2} = z\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{z-2}\right)$, e per le cose già dette prendendo i coefficienti di $\frac{1}{z^{x+1}}$ nelle tre serie che nascono dal rispettivo sviluppo di $\frac{1}{z-1}$, $\frac{1}{(z-2)^2}$, $-\frac{1}{z-2}$ verrà $z\left(\frac{1+x.2^{x-1}-2^x}{z^{x+1}}\right) = \frac{1+x.2^{x-1}-2^x}{z^x} = (1+x.2^{x-1}-2^x)t^x$ pel termine della funzione u che ha per coefficiente y_x; e sarà finalmente $y_x = 1+x.2^{x-1}-2^x$ come precisamente rinvenne il citato Brunacci. (1)

14. La funzione generatrice del n.° precedente ridotta alla forma $z\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{z-2}\right)$ può condurre allo scoprimento della somma della serie, di cui si è già trovato il termine generale. Di fatto si sviluppa tale funzione nelle tre serie

(1)..... $(1 + 1 + 1 + 1 + \text{ec} \ldots.)$

(2)..... $(1 + 2.2 + 3.2^2 + 4.2^3 + \ldots.. + x.2^{x-1} + \text{ec.})$

(3)... $-(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots\ldots. + 2^x + \text{ec.})$

i cui rispettivi termini generali sono per ordine 1, $x.2^{x-1}$, -2^x, prescindendo però dal primo termine della serie (3) che non può ridursi alla forma -2^x nella necessaria supposizione di $x>0$, e supposto pure $z=1$ come quantità arbitraria. E siccome detti termini generali, che possono chiamarsi parziali, compongono appunto colla loro somma il termine generale determinato nel n.° prec., così è facile a vedersi che sommando i primi x termini delle serie (1), (2), e gli x termini dopo il primo della serie (3), la riunione delle tre somme darà la cercata. Sia quindi S la somma della serie (1), la quale evidentemente si scopre essere espressa da x, S′ la somma della serie (2), S″ la somma della serie (3) presa positivamente, ed ommesso il primo termine. Se si rifletta, che queste serie nascono dal dividere all' infinito l' unità pe' fattori $z-1$, $(z-2)^2$, $z-2$, fatto poi in seguito $z=1$, e che la divisione arrestata al quoziente parziale x^{esimo} rispetto allo sviluppo della frazione $\frac{1}{(z-2)^2}$ lascia generalmente il residuo $\frac{(x+1)2^x}{z^x}-\frac{x.2^{x+1}}{z^{x+1}}$, ed arrestata al quoziente parziale $x+1^{esimo}$ nello sviluppo della frazione $\frac{1}{z-2}$ lascia generalmente il residuo $\frac{2^{x+1}}{z^{x+1}}$, si vedrà pure essere $1=S'(z-2)^2+\frac{(x+1)2^x}{z^x}-\frac{x.2^{x+1}}{z^{x+1}}$, ed $S'=1-(x+1)2^x+x.2^{x+1}$ fatto $z=1$; e così si avrà $1=\left(S''+\frac{1}{z}\right)(z-2)+\frac{2^{x+1}}{z^{x+1}}$, ed $S''=2^{x+1}-2$. Sarà dunque finalmente $S+S'-S''=x+1-(x+1).2^x+x.2^{x+1}+2-2^{x+1}=3+x+2(x-1)2^x-(x+1)2^x=3+x+x.2^x-3.2^x$ somma cercata, e pure identica a quella che con altro metodo determinò il Brunacci (*).

---

(1) V. Brunacci. Opera e Vol. citati pag. 112.

15. Sia ancora l' equazione $y_{x+3}+y_{x+2}-y_{x+1}-y_x=0$ ovvero $-y_{x+3}-y_{x+2}+y_{x+1}+y_x=0$, la quale esprime le condizioni di una serie ricorrente in cui un termine qualunque dopo i tre primi che possono prendersi ad arbitrio, eguaglia la differenza tra la somma dei due antiprecedenti prossimi, ed il precedente, e se ne cerchi pertanto la somma. Osservando, che in corrispondenza della formola (A) del n.° 10. si ha $g=-1$, $p=-1$, $q=1$, la funzione generatrice di y_x sarà quindi pel n.° stesso $\frac{\phi(t)t^3}{t^3+t^2-t-1}$. Per determinare $\phi(t)$, conviene richiamare,

---

(*) V. Brunacci. Opera e Vol. sopracitati pag. 112.

che essendo nel nostro caso $\nabla y_x = -y_{x+3} - y_{x+2} + y_{x+1}$ se si supponga $y_0 = y_1 = 0$, $y_2 = -1$ sussisterà l'equazione $-\nabla y_0 = y_0$ ed anche $-\nabla y_x = y_x$ nella supposizione di $x=0$. Perciò è facile a vedersi che $\phi(t)$ si ridurrà nell'espressione generale della formola (B) del citato numero al solo termine $\nabla y_{-1}\, t^{-1} = t^{-1}$ sicchè sarà $u = \frac{t^2}{t^3+t^2-t-1} = \frac{t^{-1}}{1+t^{-1}-t^{-2}-t^{-3}} = \frac{-t^{-1}}{t^{-3}+t^{-2}-t^{-1}-1}$ $= \frac{-z}{z^3+z^2-z-1}$ $\left(\text{dopo aver fatto } z = \frac{1}{t}\right) = \frac{-z}{(z+1)^2(z-1)}$ $= -z\left(\frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{2(z+1)^2} - \frac{1}{4(z+1)}\right)$ spezzando il valore di u in tre frazioni come nel n.° 13., e sarà in ultimo

$$
\begin{aligned}
u = z &\left(\frac{1}{4(z+1)} + \frac{1}{2(z+1)^2} - \frac{1}{4(z-1)} \right) \\
= \frac{z}{4} &\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} \ldots - \frac{(-1)^{x+1}}{z^{x+1}} + \text{ec.} \right) \\
+ \frac{z}{2} &\left(\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z^3} + \frac{3}{z^4} - \frac{4}{z^5} \ldots - \frac{x(-1)^x}{z^{x+1}} + \text{ec.} \right) \\
- \frac{z}{4} &\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} \ldots + \frac{1}{z^{x+1}} + \text{ec.} \right) \\
= \frac{1}{4} &\left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} \ldots - \frac{(-1)^{x+1}}{z^x} + \text{ec.} \right) \\
+ \frac{1}{2} &\left(\frac{1}{z} - \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^3} - \frac{4}{z^4} \ldots - \frac{x(-1)^x}{z^x} + \text{ec.} \right) \\
- \frac{1}{4} &\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} \ldots + \frac{1}{z^x} + \text{ec.} \right)
\end{aligned}
$$

Si vede facilmente, che il termine generale della serie proposta è espresso da $-\frac{1}{4}(-1)^{x+1} - \frac{1}{2}x(-1)^x - \frac{1}{4}$, e che per averne la somma è d'uopo raccogliere in una le tre somme di x termini corrispondenti delle serie, che danno come sopra il valore di u. Ora siccome l'ultimo termine di queste serie, indipendentemente dal coefficiente numerico, è rispettivamente $\frac{-(-1)^{x+1}}{z^x}$, $\frac{-x(-1)^x}{z^x}$, $\frac{1}{z^x}$; perciò con un raziocinio simile a quello adoprato nel n.° preced. si vedrà, che essendo $\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}\dots-\frac{(-1)^{x+1}}{z^x}\right)=-\frac{1}{4}S'$, indicata per S′ la somma di x termini della serie, che si ottiene sviluppando $\frac{1}{z+1}$, si avrà $S'(z+1)+\frac{(-1)^{x+2}}{z^x}=1$, da cui ricavasi $S'=\frac{1-(-1)^x}{2}$ fatto $z=1$. Si vedrà inoltre essere $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{2}{z^2}+\frac{3}{z^3}-\frac{4}{z^4}\dots\dots-\frac{x(-1)^x}{z^x}\right)=\frac{z}{2}S''$, indicata per S″ la somma di x termini della serie che nasce sviluppando $\frac{1}{(z+1)^2}$, ed $S''(z+1)^2+\frac{(x+1)(-1)^x}{z^x}-\frac{x(-1)^{x+1}}{z^{x+1}}=1$, onde $S''=\frac{1-(x+1)(-1)^x+x(-1)^{x+1}}{4}$ fatto $z=1$. Finalmente essendo $-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}\dots\dots+\frac{1}{z^x}\right)=-\frac{x}{4}$ fatto $z=1$, verrà la somma cercata $=-\frac{1}{4}S'+\frac{1}{2}S''-\frac{x}{4}$

$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{1-(-1)^x}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1-(x+1)(-1)^x+x(-1)^{x+1}}{4}\right)-\frac{x}{4}=x\left(\frac{(-1)^{x+1}-1}{4}\right).$$

16. Essendo fin quì considerata l'equazione generale alle differenze coi coefficienti costanti, e col secondo membro nullo, si tratta ora di esaminare quella, che avendo il secondo membro funzione di x, o quantità costante, ritenga tutte le altre condizioni della precedente. Sia perciò l'equazione

$$ay_{x+m}+by_{x+m-1}\dots+fy_{x+4}+gy_{x+3}+py_{x+2}+qy_{x+1}+y_x=X$$

ovvero

$$(D)\dots y_x-X=-(ay_{x+m}+by_{x+m-1}\dots+fy_{x+4}+gy_{x+3}+py_{x+2}+qy_{x+1})=-\nabla y_x.$$

Si consideri al solito u come funzione generatrice di y_x, ed u' come generatrice di X, la quale sia simile ad u, cosicchè esprimendo per $X^{(0)}$, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $X^{(3)}\dots X^{(x-1)}$ i valori che prende X quando in essa si sostituisce 0, 1, 2, 3.....$x-1$ in vece di x, essi occupino nella u' gli stessi luoghi occupati nella u da y_{0}, y_{1}, y_{2}.....y_{x-1}. Ciò posto, poichè in conformità di quanto emerge dai precedenti n.^{i} 2. 10. $u\left(\frac{q}{t}+\frac{p}{t^2}+\frac{g}{t^3}+\frac{f}{t^4}\ldots\ldots\ldots+\frac{b}{t^{m-1}}+\frac{a}{t^m}\right)$ è la funzione generatrice di ∇y_{x}, sarà facile a vedersi, che si avrebbe dipendentemente dall' equazione proposta, $u-u'=-u\left(\frac{q}{t}+\frac{p}{t^2}+\frac{g}{t^3}+\frac{f}{t^4}\ldots\ldots+\frac{b}{t^{m-1}}+\frac{a}{t^m}\right)$ se valesse in ogni supposizione $y_{x}-X=-\nabla y_{x}$. Ma siccome questa equazione non si verifica che dentro certi limiti, e secondo le diverse condizioni dei problemi ai quali si applica; per esempio, quando $x=n$, ovvero $x>n$, e non quando $x<n$, onde avere un' equazione fra le tre funzioni soprindicate sarà d' uopo prima sottrarre da ciascuna rispettivamente i termini che hanno per coefficienti, quanto alle funzioni u, u', le quantità y_{0}, y_{1}, y_{2}.....y_{n-1} e le $X^{(0)}$, $X^{(1)}$, $X^{(2)}$.....$X^{(n-1)}$, e rispetto alla funzione $u\left(\frac{q}{t}+\frac{p}{t^2}+\frac{g}{t^3}+\frac{f}{t^4}\ldots\ldots+\frac{b}{t^{m-1}}+\frac{a}{t^m}\right)$ quelli ne' quali il coefficiente delle potenze di t non si riduce alla forma ∇y_x, o anche riducendovisi moltiplica però una potenza di t inferiore a t^{n}. Così, essendo, per ciò che si è pure dimostrato al n.° 10. la stessa funzione $u\left(\frac{q}{t}+\frac{p}{t^2}+\frac{g}{t^3}+\frac{f}{t^4}\ldots\ldots\ldots+\frac{b}{t^{m-1}}+\frac{a}{t^m}\right)=\nabla y_{-1}\,t^{-1}+(\nabla y_{-2}-qy_{-1})\,t^{-2}$ $+(\nabla y_{-3}-qy_{-2}-py_{-1})\,t^{-3}+\ldots\ldots\ldots+ay_{0}\,t^{-m}+\nabla y_{0}$ $+\nabla y_{1}.t\ldots\ldots+\nabla y_{n-1}.t^{n-1}+\nabla y_{n}.t^{n}+\nabla y_{n+1}.t^{n+1}\ldots\ldots+\nabla y^{x}.t^{x}$ si dovranno per lo scopo accennato sottrarre da questa espressione tutti i termini precedenti a $\nabla y_{n}.t^{n}$. Si avrà pertanto

$$u-y_0-y_1.t-y_2.t^2\ldots\ldots-y_{n-1}.t^{n-1}-u'+X^{(0)}+X.^{(1)}t+X^{(2)}.t^2\ldots.$$
$$\ldots.+X^{(n-1)}.t^{n-1}=-u\left(\frac{q}{t}+\frac{p}{t^2}+\frac{g}{t^3}\ldots\ldots+\frac{b}{t^{m-1}}+\frac{a}{t^m}\right)$$
$$+\nabla y_{-1}.t^{-1}+(\nabla y_{-2}-qy_{-1})t^{-2}+(\nabla y_{-3}-qy_{-2}-py_{-1})t^{-3}\ldots.$$
$+ay_0 t^{-m}+\nabla y_0+\nabla y_1.t+\nabla y_2.t^2\ldots.+\nabla y_{n-1}.t^{n-1}$; e fatto

$$\text{(E)}\ldots\left\{\begin{array}{l} y_0+y_1.t+y_2.t^2\ldots.+y_{n-1}.t^{n-1}-X^{(0)}-X^{(1)}.t-X^{(2)}.t^2\ldots.. \\ \ldots\ldots-X^{(n-1)}.t^{n-1}+\nabla y_{-1}.t^{-1}+(\nabla y_{-2}-qy_{-1})t^{-2} \\ +(\nabla y_{-3}-qy_{-2}-py_{-1})t^{-3}\ldots..+ay_0.t^{-m}+\nabla y_0 \\ +\nabla y_1.t+\nabla y_2.t^2\ldots..+\nabla y_{n-1}.t^{n-1} \end{array}\right.$$
$$=\phi(t)$$

sarà

$$u-u'=-u\left(\frac{q}{t}+\frac{p}{t^2}+\frac{g}{t^3}\ldots\ldots+\frac{b}{t^{m-1}}+\frac{a}{t^m}\right)+\phi(t),$$

e quindi

$$\text{(F)}\ldots\ldots\ldots\ldots\; u=\frac{u'+\phi(t)}{at^{-m}+bt^{-m+1}\ldots.+pt^{-2}+qt^{-1}+1}.$$

17. Per applicare subito queste formole generali, si consideri il problema già trattato (1) dal Brunacci, e con cui cercasi, essendo x il numero totale delle palle esistenti in un' urna, la probabilità di estrarre a caso un numero pari di esse e la probabilità di estrarne un numero dispari.

Rappresentando per y_x la somma dei casi nei quali il numero delle palle prese sia pari, e per z_x la somma dei casi, ne' quali il numero delle palle sia dispari, si hanno secondo il lodato Autore le due equazioni

---

(1) V. Brunacci. Opera, e Vol. sopracitati pag. 260. e seguente.

$$y_{x+1}=y_x+z_x \qquad z_{x+1}=z_x+y_x+1$$

da cui colla opportuna eliminazione, e riduzione si ottiene l'altra $y_x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}y_{x+1}$, la quale paragonata colla generale (D) del preced. n.° 16. dà $X=-\frac{1}{2}$, $q=-\frac{1}{2}$, $a=b=c=\ldots\ldots=p=0$, $X^{(0)}=X^{(1)}=X^{(2)}=\ldots=X=-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}y_{x+1}=-\nabla y_x$. Pertanto applicando la formola (F) del citato n.° sarà

$$u=\frac{-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t^3\ldots\ldots+\frac{1}{2}t^x+\text{ec.}\right)+\varphi(t)}{-\frac{1}{2}t^{-1}+1}, \text{ e}$$

poichè l'equazione proposta non si verifica quando $x=0$, essendo allora $y_1=y_0=0$, come è evidente per la natura del problema, e d'altronde si adempie quando $x=1$, avendosi allora $y_2-2y_1=1$, perciò $\varphi(t)$ si ridurrà a $-X^{(0)}=\frac{1}{2}$, e sarà finalmente $u=\dfrac{-\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t^3\ldots\ldots+\frac{1}{2}t^x+\text{ec.}\right)}{-\frac{1}{2}t^{-1}+1}=\dfrac{t+t^2+t^3\ldots+t^x+ec.}{t^{-1}-2}$, cosicchè fatto nel denominatore $t^{-1}=z$ si tratterà primieramente di sviluppare in serie $\frac{1}{z-2}$, locchè eseguito colla successiva divisione produce $\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z^3}\ldots\ldots+\frac{2^{x-2}}{z^{x-1}}+$ ec. $=t+2t^2+4t^3\ldots+2^{x-2}t^{x-1}+$ ec. serie geometrica, di cui la somma per $x-1$ termini fatto $t=1$ darà il coefficiente di t^x nella funzione generatrice u. Si avrà così $y_x=\frac{1\,(2^{x-1}-1)}{2-1}=2^{x-1}-1$. Di fatto il prodotto $(t+t^2+t^3\ldots\ldots+t^{x-1}+\text{ec.})(t+2t^2+4t^3\ldots\ldots+2^{x-2}t^{x-1})$ essendo sviluppato secondo le potenze di t, dà pel termine affetto della potenza

t^x, $t^x+2t^x+4t^x \ldots\ldots + 2^{x-2}t^x = (2^{x-1}-1)t^x$, locchè conferma la regola già data. Pertanto essendo per la prima delle stabilite equazioni $z_x = y_{x+1} - y_x = 2^x - 1 - 2^{x-1} + 1 = 2^x - 2^{x-1} = 2^{x-1}$, si trovano facilmente secondo le note regole le probabilità ricercate.

18. Sia ora l'equazione alle differenze di secondo ordine $y_{x+2} - y_x = 1$, la quale esprime le condizioni del problema con cui cercasi il valore di y_x denotante il numero dei modi, ne' quali un numero qualunque intero x può partirsi in altri due diseguali della serie de' naturali da 1 ad x inclusivamente. Sarà pertanto eziandio $y_x + 1 = y_{x+2}$; e si avrà confrontando questa equazione colla generale (D) del n.° 16. $p = -1$, $q = 0$, $a = b = c = \ldots\ldots = g = 0$, $X = -1$, $\nabla y_x = -y_{x+2}$; e quindi per la formola (F) dello stesso n.° si avrà

$u = \frac{-(1+t+t^2+t^3+\ldots\ldots+t^x+ec.)+\phi(t)}{-t^{-2}+1}$. Ora poichè l'equazione proposta non sussiste finchè non sia $x=1$, nel qual caso si verifica essere $y_3 - 2y_1 = 1$, ovvero $y_3 = 1$ essendo $y_1 = y_0 = 0$, sarà $\phi(t) = -X^{(0)} = 1$, onde $u = \frac{-(t+t^2+t^3\ldots+t^x+ec.)}{-t^{-2}+1} = \frac{t+t^2+t^3\ldots\ldots+t^x+ec.}{t^{-2}-1} = \frac{t+t^2+t^3\ldots\ldots+t^x+ec.}{z^2-1}$ fatto $t^{-1} = z$; e decomponendo $\frac{1}{z^2-1}$ in due frazioni, che abbiano rispettivamente per denominatori $z+1$, $z-1$ sarà $\frac{1}{z^2-1} =$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}\ldots\ldots+\frac{1}{z^{x-1}}+\text{ec.}\right)$$

$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}-\frac{1}{z^4}\ldots\ldots-\frac{(-1)^{x-1}}{z^{x-1}}+\text{ec.}\right)$, sicchè prendendo la differenza delle somme di queste due serie per $x-1$ termini in ciascuna fatto prima $z = 1$, per le cose già dette anche nell' esempio del precedente n.° 17. sarà $y_x = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1.((-1)^{x-1}-1)}{-1-1}\right) = \frac{2x-3+(-1)^{x-1}}{4}$.

19. Giova quì richiamare un altro problema risoluto pure dal Brunacei (1) col calcolo delle differenze finite, al quale si applica il metodo esposto al n.° 16. di questa Memoria. Sia la serie ricorrente cogli indici corrispondenti

Indici 0, 1, 2, 3, 4, 5, ... x
Termini 1, 2, 4, 9, 30, 157. . . . . . y_x

la legge della quale viene espressa dalla equazione

$y_{x+3} = 5^x + 9y_{x+2} - 26y_{x+1} + 24y_x$ ovvero dalla $y_x + \frac{5^x}{24} = \frac{y_{x+3}}{24} - \frac{9y_{x+2}}{24} + \frac{26y_{x+1}}{24}$. Confrontata questa equazione colla (D) del n.° 16. sarà $X = -\frac{5^x}{24}$, $g = -\frac{1}{24}$, $p = \frac{9}{24}$, $q = -\frac{26}{24}$, $\nabla y_x = -\frac{y_{x+3}}{24} + \frac{9y_{x+2}}{24} - \frac{26y_{x+1}}{24}$; e nella formola (F) dello stesso num.° sarà $u' = -\frac{1}{24}(5^0 + 5t + 5^2t^2 + 5^3t^3 \dots + 5^xt^x + \text{ec.})$ ed $u = \left(\frac{-5^0+5t+5^2t^2+5^3t^3\dots+5^xt^x+\text{ec.})+24\,\varphi(t)}{24}\right) : \left(\frac{-t^{-3}+9t^{-2}-26t^{-1}+24}{24}\right)$ $= \frac{5^0+5t+5^2t^2+5^3t^3\dots+5^xt^x+\text{ec.}-24\varphi(t)}{t^{-3}-9t^{-2}+26t^{-1}-24}$. Per determinare $\varphi(t)$ si osservi, che verificandosi l' equazione proposta anche nella supposizione di $x=0$, giacchè essendo per ipotesi $y_0=1$, $y_1=2$, $y_2=4$ si ha da essa per l'appunto $y_3=9$, svaniranno nell'espressione generale (E) di $\varphi(t)$ del n.° 16. tutti i termini $X^{(0)}$ $X^{(1)}t$ ec. ∇y_0, $\nabla y_1 t$, ec. ed y_0, $y_1 t$ ec. e resterà $\varphi(t) = \nabla y_{-1}.t^{-1} + (\nabla y_{-2} - qy_{-1})\,t^{-2} + (\nabla y_{-3} - qy_{-2} - py_{-1})\,t^{-3} =$

---

(1) V. Brunacci. Opera e Vol. sopra indicati pag. 109. e seg.

$-\frac{12}{24}t^{-1}+\frac{7}{24}t^{-2}-\frac{1}{24}t^{-3}$; e sarà finalmente

$$u=\frac{5^0+5t+5^2t^2+5^3t^3\ldots..+5^xt^x+ec.+12t^{-1}-7t^{-2}+t^{-3}}{t^{-3}-9t^{-2}+26t^{-1}-24}$$

, e fatto $t^{-1}=z$ nel denominatore, si ha ancora

$$u=\frac{5^0+5t+5^2t^2+5^3t^3\ldots\ldots\ldots+5^xt^x+ec.+12t^{-1}-7t^{-2}+t^{-3}}{z^3-9z^2+26z-24}$$

$$=\frac{5^0+5t+5^2t^2+5^3t^3\ldots\ldots\ldots+5^xt^x+ec.+12t^{-1}-7t^{-2}+t^{-3}}{(z-2)(z-3)(z-4)}$$

$$=(5^0+5t+5^2t^2+5^3t^3\ldots+5^xt^x+\text{ec.}+12t^{-1}-7t^{-2}+t^{-3})$$

$$\times\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-4}\right)=\ldots$$

$$(5^0+5t+5^2t^2+5^3t^3\ldots\ldots+5^xt^x+\text{ec.}+12t^{-1}-7t^{-2}+t^{-3})\times$$

$$\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{2}{z^2}+\frac{2^2}{z^3}\ldots+\frac{2^{x+2}}{z^{x+3}}+\text{ec.}\right)-\left(\frac{1}{z}+\frac{3}{z^2}+\frac{3^2}{z^3}\ldots\right.\right.$$

$$\left.\left.\ldots+\frac{3^{x+2}}{z^{x+3}}+\text{ec.}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{4}{z^2}+\frac{4^2}{z^3}\ldots+\frac{4^{x+2}}{z^{x+3}}+\text{ec.}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(t.5^{x-1}t^{x-1}+2t^2.5^{x-2}t^{x-2}\ldots+2^{x-1}t^x.5^0+\text{ec.}\right)-\ldots$$

$$(t.5^{x-1}t^{x-1}+3t^2.5^{x-2}t^{x-2}\ldots\ldots+3^{x-1}t^x.5^0+\text{ec.})+\ldots$$

$$\frac{1}{2}\left(t.5^{x-1}t^{x-1}+4t^2.5^{x-2}t^{x-2}\ldots\ldots\ldots+4^{x-1}t^x.5^0+\text{ec.}\right)+$$

$$(12t^{-1}-7t^{-2}+t^{-3})\left(\frac{1}{2}(t+2t^2+2^2t^3\ldots\ldots+2^{x+2}t^{x+3}+\text{ec.})\right.$$

$$-(t+3t^2+3^2t^3\ldots+3^{x+2}t^{x+3}+\text{ec.})+\frac{1}{2}(t+4t^2+4^2t^3\ldots$$

$\left.\ldots+4^{x+2}t^{x+3})\right)$. Ridotta la funzione generatrice a questa forma, è facile a vedersi non essere la medesima, che l' aggregato di più serie tutte ordinate secondo le potenze di t all' infinito. Sommando pertanto tutti i coefficienti di t^x nelle diverse serie, il risultato sarà il valore cercato di y_x; e per trovare tali coefficienti, sarà d' uopo, prima di tutto fatto $t=1$ per maggiore semplicità, prendere la somma di x termini delle tre progressioni geometriche, ciascuna delle quali ha per primo termine 5^{x-1}, essendo poi $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$ i rispettivi quozienti, ed in seguito trovare il coefficiente di t^x nelle altre tre serie, che hanno per primo termine comune l'unità, e per quozienti rispettivi i numeri 2, 3, 4, essendo ciascuna moltiplicata per la quantità $12t^{-1} - 7t^{-2} + t^{-3}$. Così si avrà $y_x = \frac{1}{2}\left(\frac{5^x-2^x}{3}\right) - \left(\frac{5^x-3^x}{2}\right) + \frac{1}{2}(5^x-4^x) + \frac{1}{2}\left(12.2^x - 7.2^{x+1} + 2^{x+2}\right) - 12.3^x + 7.3^{x+1} - 3^{x+2} + \frac{1}{2}\left(12.4^x - 7.4^{x+1} + 4^{x+2}\right) = \frac{5^x+5.2^x+3\,3^x-3\,4^x}{6}$, espressione identica a quella già trovata (1) dal Brunacci.

20. Prima d'innoltrare alla soluzione di un altro problema è opportuno l'osservare per maggiore chiarezza e comodità del calcolo, che esso richiede, come volendo risolvere una frazione della forma $\frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)}$ in tre altre $\frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} + \frac{C}{z-c}$, si trova generalmente $A = \frac{1}{(a-b)(a-c)}$, $B = \frac{1}{(b-c)(b-a)}$, $C = \frac{1}{(c-a)(c-b)}$, e quindi supposto, che a, b, c sieno le tre radici cubiche dell'unità 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, la seconda, e la terza delle quali si rappresentino eziandio per α, β, sarà in questo caso $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{3\beta}$, $C = \frac{1}{3\alpha}$ come si ricava avendo riguardo alle conosciute proprietà delle radici cubiche dell'unità. Ciò posto cercasi l'espressione generale del numero dei modi, ne' quali un numero intero x può partirsi in altri tre disuguali sopra x termini della serie de' naturali. L'equa-

---

(1) V. Brunacci. Opera e Vol. citati pag. 111.

zione, che esprime lè condizioni di tale problema, indicando per y_x il numero ricercato, è $y_{x+3}-y_x=\frac{2x-3-(-1)^x}{4}$ ovvero $y_x+\frac{2x-3-(-1)^x}{4}=y_{x+3}$, la quale paragonata colla generale (D) del n.° 16. dà $X=\frac{3-2x+(-1)^x}{4}$, $a=b=c=\ldots\ldots=p=q=0$ $g=-1$, $\nabla y_x=-y_{x+3}$; e per la formola (F) dello stesso num.° si ha $u=\frac{u'+\varphi(t)}{-t^{-3}+1}=\frac{-u'-\varphi(t)}{t^{-3}-1}=\left(\frac{-(3-2.0+(-1)^0)}{4}-\frac{(3-2.1+(-1)^1)t}{4}\right.$ $\left.-\frac{(3-2.2+(-1)^2)t^2}{4}-\frac{(3-2.3+(-1)^3)t^3}{4}-\ldots\ldots-\varphi(t)\right):(t^{-3}-1)$.

Per determinare $\varphi(t)$ si osservi, che l' equazione proposta si verifica finchè non sia $x=0$, nel qual caso si avrebbe $y_3-y_0=-1$, mentre d'altronde per la natura del problema si ha $y_3=y_0=0$. Pertanto $\varphi(t)$ si ridurrà nella formola generale (E) del n.° 16. $=-X^{(0)}=-1$. Sarà dunque

$$u=\left(\frac{-(3-2.1+(-1)^1)t-(3-2.2+(-1)^2)t^2-(3-2.3+(-1)^3)t^3-\ldots.}{4}\right)\cdot\frac{1}{t^{-3}-1}$$

$$=\left(\frac{-(3-2.1+(-1)^1)t-(3-2.2+(-1)^2)t^2-(3-2.3+(-1)^3)t^3-\ldots.}{4}\right)$$

$$\times\left(\frac{1}{3(z-1)}+\frac{1}{3\beta(z-\alpha)}+\frac{1}{3\alpha(z-\beta)}\right)=$$

$$\left(\frac{-(3-2.1+(-1)^1)t-(3-2.2+(-1)^2)t^2-(3-2.3+(-1)^3)t^3-\ldots}{4}\right)\times$$

$$\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\text{ec.}\right)+\frac{1}{3\beta}\left(\frac{1}{z}+\frac{\alpha}{z^2}+\frac{\alpha^2}{z^3}+\text{ec.}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3\alpha}\left(\frac{1}{z}+\frac{\beta}{z^2}+\frac{\beta^2}{z^3}+\text{ec.}\right)\right)=$$

$$\left(\frac{-(3-2.1+(-1)^1)t-(3-2.2+(-1)^2)t^2-(3-2.3+(-1)^3)t^3-\ldots.}{4}\right)\times$$

$$\left(\frac{1}{3}(t+t^2+t^3+\text{ec.})+\frac{1}{3\beta}(t+\alpha t^2+\alpha^2t^3+\text{ec.})+\frac{1}{3\alpha}(t+\beta t^2+\beta^2t^3+\text{ec.})\right)$$

fatto al solito $t^{-1}=z$, e poi decomponendo la frazione $\frac{1}{z^3-1}$ nelle tre sopradivisate, e restituendo t in luogo di $\frac{1}{z}$. È facile quindi a vedersi anche per gli esempj già recati, che il valore di y_x si avrà raccogliendo in una sola le somme di nove serie ciascuna di termini $x-1$, e si vedrà pure, che fatto $t=1$ le somme parziali sono le seguenti:

1.^{a} $-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}(1+1^2+1^3..+1^{x-1})\right)=-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}(x-1)\right)=\frac{-3x+3}{3.4.}$

2.^{a} $\frac{-3}{3.4\beta}\left(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3\ldots+\alpha^{x-2}\right)=-\frac{3}{3.4\beta}\left(\frac{\alpha^{x-1}-1}{\alpha-1}\right)$

3.^{a} $\frac{-3}{3.4\alpha}\left(1+\beta+\beta^2+\beta^3\ldots+\beta^{x-2}\right)=-\frac{3}{3.4\alpha}\left(\frac{\beta^{x-1}-1}{\beta-1}\right)$

4.^{a} $\frac{2}{3.4}\left(1+2+3+4\ldots+(x-1)\right)=\frac{2}{3.4}(x-1)\left(1+\frac{x-2}{2}\right)=\frac{x^2-x}{3.4}$

5.^{a} $\frac{2}{3.4\beta}\left(\alpha^{x-2}+2\alpha^{x-3}+3\alpha^{x-4}+\text{ec.}\right)=\frac{2}{3.4\beta}\left(\frac{\alpha^x+x-1-\alpha x}{(\alpha-1)^2}\right)$

6.^{a} $\frac{2}{3.4\alpha}\left(\beta^{x-2}+2\beta^{x-3}+3\beta^{x-4}+\text{ec.}\right)=\frac{2}{3.4\alpha}\left(\frac{\beta^x+x-1-\beta x}{(\beta-1)^2}\right)$

7.^{a} $\frac{-1}{3.4}\left((-1)^{x-1}+(-1)^{x-2}+(-1)^{x-3}+\text{ec.}\right)=\frac{1}{3.4.2}\left(1+(-1)^x\right)$

8.^{a} $\frac{-1}{3.4\beta}\left((-1)^{x-1}+\alpha(-1)^{x-2}+\alpha^2(-1)^{x-3}+\text{ec.}\right)=\frac{1}{3.4\beta}\left(\frac{\alpha^{x-1}+(-1)^x}{\alpha+1}\right)$

9.^{a} $\frac{-1}{3.4\alpha}\left((-1)^{x-1}+\beta(-1)^{x-2}+\beta^2(-1)^{x-3}+\text{ec.}\right)=\frac{1}{3.4\alpha}\left(\frac{\beta^{x-1}+(-1)^x}{\beta+1}\right)$

È d' uopo osservare che la 1.^{a} delle indicate somme è quella di una progressione aritmetica, siccome pure lo è la 4.^{a} La 2.^{a} e 3.^{a} appartengono a progressioni geometriche, siccome pure la 7.^{a} 8.^{a} e 9.^{a}. Quanto poi alle serie 5.^{a} e 6.^{a} l' espressione della loro somma, che è la stessa per amendue variata soltanto α in β o viceversa, trovasi come segue: essendo $\frac{2}{3.4\beta}(\alpha^{x-2}+2\alpha^{x-3}+3\alpha^{x-4}+\text{ec.})=\frac{2\alpha^{x-2}}{3.4\beta}\left(1+\frac{2}{\alpha}+\frac{3}{\alpha^2}+\text{ec.}\right)$ si tratterà per avere la somma 5.^{a} di prendere $x-1$ termini

della serie che nasce sviluppando colla successiva divisione la frazione $\frac{1}{z^2-2az+a^2}$ posto in essa $z=1$, $a=\frac{1}{\alpha}$; e moltiplicarne in seguito l'aggregato per $\frac{2\alpha^{x-2}}{3.4\beta}$. Di fatto si ha $\frac{1}{z^2-2az+a^2}$ $=\frac{1}{z^2}+\frac{2a}{z^3}+\frac{3a^2}{z^4}+\frac{4a^3}{z^5}+$ ec. e la somma S di $x-1$ termini di questa serie si ha generalmente dall' equazione $S(z-a)^2+\frac{xa^{x-1}}{z^{x-1}}-\frac{(x-1)a^x}{z^x}=1$ stabilita coll' osservare, che arrestando la divisione dopo il termine $(x-1)^{esimo}$ dello sviluppo, cioè dopo il termine $\frac{(x-1)a^{x-2}}{z^x}$, il residuo è $\frac{xa^{x-1}}{z^{x-1}}-\frac{(x-1)a^x}{z^x}$, e quindi sarà $S=\left(\frac{(x-1)a^x}{z^x}-\frac{xa^{x-1}}{z^{x-1}}+1\right):(z-a)^2$; e fatto come si è detto in questa espressione $z=1$, e rispettivamente $a=\frac{1}{\alpha}$, $a=\frac{1}{\beta}$, moltiplicandola pure rispettivamente per $\frac{2\alpha^{x-2}}{3.4\beta}$, e per $\frac{2\beta^{x-2}}{3.4\alpha}$ ne nasceranno le somme 5.ª e 6.ª già indicate. Ciò premesso per raccogliere le diverse somme che riunite costituiscono il valore di y_x si riducano primieramente le due somme 2.ª e 3.ª unendole insieme, le quali daranno il complesso $-\frac{3}{3.4}\left(\frac{\alpha^{x-1}-1}{(\alpha-1)\beta}+\frac{\beta^{x-1}-1}{(\beta-1)\alpha}\right)=-\frac{1}{3.4}(\alpha^{x-1}-\alpha^x-3+\beta^{x-1}-\beta^x)$.
Così riunendo le due somme 5.ª e 6.ª risulterà
$\frac{2}{3.4}\left(\frac{\alpha^x+x-1-\alpha x}{\beta(\alpha^2-2\alpha+1)}+\frac{\beta^x+x-1-\beta x}{\alpha(\beta^2-2\beta+1)}\right)=\frac{-1}{3.3.2}(\alpha^x+\beta^x+3x-2)$; e dalla riunione della 8.ª e della 9.ª si avrà il risultato
$\frac{1}{3.4}\left(\frac{\alpha^{x-1}+(-1)^x}{1+\beta}+\frac{\beta^{x-1}+(-1)^x}{1+\alpha}\right)=\frac{1}{3.4}(\alpha^{x-1}+\alpha^x+\beta^{x-1}$ $+\beta^x+(-1)^x)$; e dalla riunione di tutte le somme si avrà finalmente

$$y_x = \frac{-3x+3}{3.4} - \frac{1}{3.4}(\alpha^{x-1} - \alpha^x - 3 + \beta^{x-1} - \beta^x) + \frac{x^2-x}{3.4} - \frac{1}{3.3.2} \times$$
$$(\alpha^x + \beta^x + 3x - 2) + \frac{1}{3.4.2}(1+(-1)^x) + \frac{1}{3.4}(\alpha^{x-1} + \alpha^x + \beta^{x-1} + \beta^x + (-1)^x)$$
$$= \frac{6x^2-36x+47}{8.9} + \frac{(-1)^x}{8} + \frac{\alpha^x+\beta^x}{9}$$

formola identica a quella che si sarebbe ottenuta però con un processo alquanto prolisso, e brigoso, dall'integrazione dell' equazione proposta esprimente le condizioni del problema, usando del calcolo delle differenze finite.

21. Il metodo fin quì esposto si applica pure a quelle equazioni alle differenze, nelle quali la quantità incognita è funzione di due variabili, purchè l' una di esse non cambj al variare dell' altra. Prendasi ad esempio il seguente problema.

„ Data una somma c al frutto semplice annuo di m per
„ 1, si cerca la somma x', che vuolsi annualmente spendere, per
„ consumare in x anni e sorte, e frutti. „

Poichè la sorte residua al principio di ogni anno detratte le somme già spese, è una funzione di x', e di x, prendendo x per un numero qualunque di anni, potrà essa generalmente rappresentarsi per $y_{x',x}$. Così la sorte residua al principio dell'anno $(x-1)^{esimo}$ sarà $y_{x',x-1}$. Ma per le condizioni del problema $y_{x',x-1}$ deve produrre nell' anno $(x-1)^{esimo}$ il frutto $my_{x',x-1}$, e deve pure alla fine di esso diminuirsi della somma x' per formare la sorte residua al principio dell' anno x^{esimo}, dunque si avrà l'equazione $y_{x',x} = y_{x',x-1} + my_{x',x-1} - x'$, ovvero facendo crescere la x di un' unità

$$y_{x',x+1} = y_{x',x} + my_{x',x} - x' = (m+1)y_{x',x} - x',$$

ossia $\frac{y_{x',x+1}}{m+1} = y_{x',x} - \frac{x'}{m+1}$, la quale paragonata colla generale (D) del n.° 16. dà $X = \frac{x'}{m+1}$, $q = \frac{-1}{m+1}$, $\nabla y_x = \frac{-1}{m+1} y_{x'.x+1}$

$a=b=c=\ldots\ldots=p=0$, e per la formola (F) dello stesso numero si ha

$$u=\frac{\frac{x'}{m+1}+\frac{x't}{m+1}+\frac{x't^2}{m+1}+\ldots\ldots\ldots+\phi(t)}{\frac{-1}{m+1}t^{-1}+1}=$$

$$\frac{-(x'+x't+x't^2+\ldots\ldots\ldots+(m+1)\phi(t))}{t^{-1}-(m+1)}.$$

Per determinare $\phi(t)$ si rifletta, che l' equazione proposta sussiste finchè sia $x=0$. In questa supposizione altresì si determina il valore di $y_{x',0}$ osservando che $y_{x',1}=c$ cosicchè dall' equazione proposta nell' ipotesi di $x=0$ si ha $X^{(0)}=\frac{x'}{m+1}$, $y_{x',0}=\frac{c+x'}{m+1}$, $\nabla y_0=\frac{-c}{m+1}$, $\nabla y_{-1}.t^{-1}=\frac{-(c+x')t^{-1}}{(m+1)^2}$. Dunque dovendosi prendere nell'espressione di $\phi(t)$ della (E) (n.° 16.) tutprecedenti valori, siccome quelli, che non si annullano, e corti i rispondono al caso in cui l'equazione non si verifica secondo l'ipotesi da cui deriva, sarà perciò $\phi(t)=y_{x',0}-X^{(0)}+\nabla y_{-1}.t^{-1}+\nabla y_0=\frac{c+x'}{m+1}-\frac{x'}{m+1}-\frac{(c+x')t^{-1}}{(m+1)^2}-\frac{c}{m+1}=-\frac{(c+x')t^{-1}}{(m+1)^2}$,

e quindi verrà $u=\frac{-(x'+x't+x't^2+\text{ec.})+\frac{(c+x')t^{-1}}{(m+1)}}{t^{-1}-(m+1)}$, e per le cose dette nei numeri precedenti sarà $y_{x',x}=-x'(m+1)^{x-1}-x'(m+1)^{x-2}-\ldots\ldots-x'(m+1)^0+\frac{(c+x')(m+1)^x}{m+1}=-x'\left(\frac{(m+1)^x-1}{m}\right)+(c+x')(m+1)^{x-1}$. Parimenti sarà $y_{x',x+1}=-x'\left(\frac{(m+1)^{x+1}-1}{m}\right)+(c+x')(m+1)^x=0$, giacchè nel principio dell'anno $(x+1)^{esimo}$ deve appunto essersi annullata la sorte c secondo l'ipotesi, e quindi sarà $x'-x'(m+1)^{x+1}+(c+x')m(m+1)^x=0$, da cui si ricava $x' = \frac{cm(m+1)^x}{(m+1)^x - 1}$, risultato conforme a quello, che ottenne (1) il Marie sciogliendo in altra maniera questo problema.

22. Sonovi alcuni problemi, i quali nella loro risoluzione possono ammettere promiscuamente l'uso del calcolo delle differenze finite insieme a quello delle funzioni generatrici. Si cerchi a cagion d'esempio in quanti modi il numero qualunque x intero possa partirsi in quattro pure interi, e disuguali sopra x termini della serie de' naturali. Sia il numero de' modi richiesti espresso da z^{iv}_{x}, e quello dei modi ne' quali x può partirsi in tre presi nella detta maniera si esprima per z'''_{x}. Avrà così luogo l'equazione $z^{iv}_{x} - z^{iv}_{x-4} = z'''_{x-4}$, ovvero $z^{iv}_{x+4} - z^{iv}_{x} = z'''_{x}$, la quale, quantunque con calcolo sommamente operoso, potrebbe integrarsi secondo i metodi conosciuti. Quindi ad ottenere il prefisso scopo sembra dover preferirsi altro metodo, che vi conduce per altra via più semplice e più breve. Perciò osservando, che l'equazione proposta dà l'altra $z^{iv}_{x} = z'''_{x-4} + z'''_{x-8} + z'''_{x-12} + z'''_{x-16} +$ ec. in cui il secondo membro costituisce una serie il cui termine generale è z'''_{x-4n}, e che si tronca col termine z'''_{x-4n-4} esclusivamente, essendo n un numero tale per cui riesca $z'''_{x-4n-4} < 6$. Intanto, poichè il valore di z'''_{x-4} dato per x, si ha dalla formola $y_{x} = \frac{6x^2 - 36x + 47}{8.9} + \frac{(-1)^x}{8} + \frac{\alpha^x + \beta^x}{9}$ del n.° 20. ponendo in essa $x-4$ in luogo di x, cosicchè la formola stessa così ridotta può riguardarsi come il termine generale della serie proposta presa però inversamente, nel quale attribuito ad x il minor valore, che renda la funzione z_{x-4} maggiore dello zero,

---

(1) V. Marie. Lezioni Elementari di Matematiche tradotte ed illustrate dai PP. Canovai, e Del-Ricco. Quinta Edizione. Firenze 1803. pag. 389.

essa poi cresca successivamente andando verso i termini più grandi per la differenza di quattro unità. Sarà pertanto, onde avere la somma di questa serie, o ciò che è lo stesso il valore di z'^{v}_{x}, da integrarsi l' espressione $\frac{6(x-4)^2-36(x-4)+47}{8.9}+\frac{(-1)^{x-4}}{8}+\frac{\alpha^{x-4}+\beta^{x-4}}{9}=\frac{6x^2-84x+287}{8.9}+\frac{(-1)^x}{8}+\frac{\alpha^{x-1}+\beta^{x-1}}{9}$, la quale perciò sommata col suo integrale preso nella supposizione della differenza $=4$ darà

$$z'^{v}_{x}=\frac{6x(x-4)(2x-4)}{2.3.4.8.9}-\frac{84x(x-4)}{2.4.8.9}+\frac{287x}{4.8.9}+\frac{(-1)^x x}{4.8}+\frac{\alpha^{x-1}}{9(\alpha-1)}+\frac{\beta^{x-1}}{9(\beta-1)}+\frac{6x^2-84x+287}{8.9}+\frac{(-1)^x}{8}+\frac{\alpha^{x-1}+\beta^{x-1}}{9}+C=\frac{1}{9}\left(\frac{x^3-15x^2+66x}{2.8}+\frac{(3+9(-1)^x)x}{4.8}+\frac{574}{2.8}+\frac{9.2(-1)^x}{2.8}+\frac{\alpha^x}{\alpha-1}+\frac{\beta^x}{\beta-1}\right)+C,$$

dove C è la costante introdotta dalla integrazione. Quì è d' uopo prima di tutto osservare, che la quantità $(-1)^x$ nella integrazione eseguita si è considerata come costante, poichè, come è facile a rilevarsi essa non varia al variare continuo della x per la differenza 4. Trattasi ora di determinare la costante C per quattro casi diversi, giacchè dipende essa dal primo o se si voglia dall'ultimo termine della serie, a cui secondo la diversa forma di x rispetto al multiplo di 4, corrispondono altrettanti valori di x. Di fatto potendo x appartenere ad una delle forme $4n+9$, $4n+8$, $4n+7$, $4n+6$, essendo rispettivamente $x-4$ di una delle forme $4n+5$, $4n+4$, $4n+3$, $4n+2$, si vede essere nei diversi casi l'ultimo termine della serie z'''_{9}, z'''_{8}, z'''_{7}, z'''_{6} corrispondentemente ad $n=1$, cosicchè quando sia $n=0$ si annullano pure i termini seguenti. Dunque nelle supposizioni di $x=9$, $x=8$, $x=7$, $x=6$ la somma dei termini diviene nulla; e con questa condizione attribuendo successivamente alla x nella formola testè ritrovata tali valori, si determinano quelli della costante C in corrispondenza alle quattro forme diverse di x. Fatto pertanto in essa $x=9$, si ha

$\frac{1}{9}\left(\frac{729-1215+594}{2.8}-\frac{27}{2.8}+\frac{574}{2.8}-\frac{18}{2.3}-\frac{16}{2.8}\right)+C=0$, e quindi $C=\frac{-621}{2.8.9}$, e nelle supposizioni di $x=8$, $x=7$, $x=6$ si ha similmente e per ordine $C=\frac{-720}{2.8.9}$, $C=\frac{-621}{2.8.9}$, $C=\frac{-684}{2.8.9}$, e quindi le quattro diverse somme che ne risultano, chiamate S, S′, S″, S‴ rispettivamente, saranno le seguenti:

Per x della forma $4n+9$,

$$S=\frac{1}{9}\left(\frac{x^3-15x^2+66x-47}{2.8}+\frac{(3+9(-1)^x)x}{4.8}+\frac{9.2(-1)^x}{2.8}+\frac{\alpha^x}{\alpha-1}+\frac{\beta^x}{\beta-1}\right).$$

Per x della forma $4n+8$,

$$S'=\frac{1}{9}\left(\frac{x^3-15x^2+66x-146}{2.8}+\frac{(3+9(-1)^x)x}{4.8}+\frac{9.2(-1)^x}{2.8}+\frac{\alpha^x}{\alpha-1}+\frac{\beta^x}{\beta-1}\right).$$

Per x della forma $4n+7$,

$$S''=\frac{1}{9}\left(\frac{x^3-15x^2+66x-47}{2.8}+\frac{(3+9(-1)^x)x}{4.8}+\frac{9.2(-1)^x}{2.8}+\frac{\alpha^x}{\alpha-1}+\frac{\beta^x}{\beta-1}\right).$$

Per x della forma $4n+6$,

$$S'''=\frac{1}{9}\left(\frac{x^3-15x^2+66x-110}{2.8}+\frac{(3+9(-1)^x)x}{4.8}+\frac{9.2(-1)^x}{2.8}+\frac{\alpha^x}{\alpha-1}+\frac{\beta^x}{\beta-1}\right).$$

Per comprendere in una sola e generale tutte queste espressioni si rileva facilmente, poichè esse non differiscono che nella quantità costante numerica, essere d' uopo ritrovare una tale funzione di x, la quale si annulli allorchè x è di una delle forme $4n+9$, $4n+7$, e si eguagli alla differenza $\frac{-146+47}{2.8.9}=\frac{-99}{2.8.9}$ quando x è della forma $4n+8$, ed alla differenza $\frac{-110+47}{2.8.9}=\frac{-63}{2.8.9}$ quando x è della forma $4n+6$. Allora tale funzione unita in somma colla prima delle sopranotate espressioni darà il valore generale di z'^{v}_{x}. Essa può trovarsi non meno coll' ordinario calcolo delle differenze finite quanto con quello delle funzioni generatrici. Onde facilitare nell' un modo o nell' altro le necessarie operazioni, che riescono sempre alquanto prolisse, giova il dar luogo ad un' altra considerazione, che può renderle più semplici. La funzione di x richiesta come sopra dev' essere composta di due parti pure funzioni di x, vale a dire di una che nel caso generico di x dispari si annulli, ed in quello di x pari sussista, e riesca $= \frac{-63}{2.8.9} = \frac{-7}{2.8}$, e di un'altra parte, la quale riesca $= \frac{-36}{2.8.9} = -\frac{1}{4}$ quando x è della forma $4n+8$, e si annulli in tutti gli altri casi. Riguardo quindi alla prima parte si ottiene l'intento col porre $V_{x+1} + V_x = -\frac{7}{2.8}$, indicando per V_x quella funzione, che si annulla, e rispettivamente riesce $= -\frac{7}{2.8}$ quando x è dispari, e quando è pari. Si avrà dunque integrando, $V_x = -\frac{7}{4.8} + A(-1)^x$, essendo A la costante introdotta dall' integrazione: e poichè quando x è dispari $V_x = 0$, sarà perciò $A = \frac{-7}{4.8}$, e l'integrale completo V_x verrà $= -\frac{7}{4.8} - \frac{7}{4.8}(-1)^x$. Ciò posto si avrà l'altra parte richiesta dalla risoluzione dell' equazione $V'_{x+3} + V'_{x+2} + V'_{x+1} + V'_x = -\frac{1}{4}$, rappresentando per V'_x la funzione, che abbia le quattro condizioni richieste. Per risolverla col metodo delle funzioni generatrici sarà d' uopo paragonarla colla generale (D) del n.° 16., nella quale perciò si ha $y_x = V'_x$, $X = -\frac{1}{4}$, $a = b = c = \ldots = f = 0$, $g = p = q = 1$, $\nabla y_x = V'_{x+3} + V'_{x+2} + V'_{x+1}$. Sarà quindi fatto $t^{-1} = z$, $u = \frac{u' + \varphi(t)}{t^{-3} + t^{-2} + t^{-1} + 1} = \frac{u' + \varphi(t)}{z^3 + z^2 + z + 1} = (u' + \varphi(t)) \times \frac{1}{(z+1)(z-\sqrt{-1})(z+\sqrt{-1})} = (u' + \varphi(t)) \left(\frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1+\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1-\sqrt{-1}}{z+\sqrt{-1}} \right)$. Per determinare $\varphi(t)$ si osservi, che sussistendo l' equazione proposta anche quando sia $x=0$, giacchè si ha $V'_0 = -\frac{1}{4}$

si dovranno prendere nell' espressione generale di $\varphi(t)$ (n.° 16.) i soli termini $\nabla y_{-1}.t^{-1}$, $(\nabla y_{-2}-qy_{-1})t^{-2}$, $(\nabla y_{-3}-qy_{-2}-py_{-1})t^{-3}$; ed essendo $\nabla y_{-1}=V'_2+V'_1+V'_0=-\frac{1}{4}$, $\nabla y_{-2}-qy_{-1}=V'_1+V'_0=-\frac{1}{4}$, $\nabla y_{-3}-qy_{-2}-py_{-1}=-\frac{1}{4}$, sarà per conseguenza $\varphi(t)=-\frac{1}{4}(t^{-1}+t^{-2}+t^{-3})$. E siccome nel nostro caso $u'=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}t^2-$ ec. sarà ancora

$$u=\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}t^2-\text{ec.}-\frac{1}{4}t^{-1}-\frac{1}{4}t^{-2}-\frac{1}{4}t^{-3}\right)$$

$$\times\left(\frac{1}{2(z+1)}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1+\sqrt{-1}}{z-\sqrt{-1}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\sqrt{-1}}{z+\sqrt{-1}}\right)=$$

$$\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}t^2-\text{ec.}\ldots-\frac{1}{4}t^{-1}-\frac{1}{4}t^{-2}-\frac{1}{4}t^{-3}\right)$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z}+\frac{(-1)}{z^2}+\frac{(-1)^2}{z^3}+\frac{(-1)^3}{z^4}+\text{ec.}\right)\\ -\frac{1}{4}(1+\sqrt{-1})\left(\frac{1}{z}+\frac{\sqrt{-1}}{z^2}+\frac{(\sqrt{-1})^2}{z^3}+\frac{(\sqrt{-1})^3}{z^4}+\text{ec.}\right)\\ -\frac{1}{4}(1-\sqrt{-1})\left(\frac{1}{z}+\frac{(-\sqrt{-1})}{z^2}+\frac{(-\sqrt{-1})^2}{z^3}+\frac{(-\sqrt{-1})^3}{z^4}+\text{ec.}\right)\end{array}\right\}$$

Quindi avendosi $\frac{1}{z}=t$, si rileverà facilmente essere il valore di V'_x per le cose dette nei numeri precedenti lo stesso, che il coefficiente di t^x nell' espressione:

$$-\frac{1}{8}(t^x+(-1)t^x+(-1)^2t^x\ldots.+(-1)^{x-1}t^x)$$

$$+\frac{1}{16}(1+\sqrt{-1})(t^x+(\sqrt{-t})t^x+(\sqrt{-1})^2t^x\ldots.+(\sqrt{-1})^{x-1}t^x)$$

$$+\frac{1}{16}(1-\sqrt{-1})(t^x+(-\sqrt{-1})t^x+(-\sqrt{-1})^2t^x\ldots.+(-\sqrt{-1})^{x-1}t^x)$$

$$-\frac{(-1)^xt^x}{8}+\frac{1}{16}(1+\sqrt{-1})(\sqrt{-1})^xt^x+\frac{1}{16}(1-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1})^xt^x$$

$$-\frac{(-1)^{x+1}t^x}{8}+\frac{1}{16}(1+\sqrt{-1})(\sqrt{-1})^{x+1}t^x+\frac{1}{16}(1-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1})^{x+1}t^x$$

$$-\frac{(-1)^{x+2}t^x}{8}+\frac{1}{16}(1+\sqrt{-1})(\sqrt{-1})^{x+2}t^x+\frac{1}{16}(1-\sqrt{-1})(-\sqrt{-1})^{x+2}t^x,$$

dalla quale, fatto pure $t=1$, e sommando le serie geometriche di x termini, e riducendo, si avrà $V'_x = -\frac{1}{16} - \frac{(-1)^x}{16} - \frac{\sqrt{(-\ )^x}}{16} - \frac{(-\sqrt{-1})^x}{16}$. Per avere adunque l'espressione generale di $z^{\prime v}_x$ riassumendo le premesse dichiarazioni non si avrà, che a sommare i valori di S, V_x, V'_x, cosicchè $z^{\prime v}_x = S + V_x + V'_x$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{x^3-15x^2+66x-47}{2.8} + \frac{(3+9(-1)^x)x}{4.8} + \frac{9.2(-1)^x}{2.8} + \frac{\alpha^x}{\alpha-1} + \frac{\beta^x}{\beta-1}\right)$$

$$-\frac{7}{4.8} - \frac{7}{4.8}(-1)^x - \frac{1}{16} - \frac{(-1)^x}{16} - \frac{(\sqrt{-1})^x}{16} - \frac{(-\sqrt{-1})^x}{16} =$$

$$\frac{1}{9}\left(\frac{x^3-15x^2+63x-65}{2.8} + \frac{\alpha^x}{\alpha-1} + \frac{\beta^x}{\beta-1}\right) + \frac{(x-5)(1+(-1)^x)}{4.8} - \left(\frac{(-\sqrt{-1})^x + (\sqrt{-1})^x}{16}\right).$$

Se si amasse di trattare questo problema col solo calcolo delle funzioni generatrici converrebbe prendere in altro modo le somme delle serie, che nascono dalla considerazione dell' equazione $z^{\prime v}_x = z'''_{x-4} + z'''_{x-8} + z'''_{x-12} +$ ec. poichè allora sostituendo nel termine generale dato per x il suo valore $4n+9$, $4n+8$ ec. secondo le particolari ipotesi converrebbe determinare ciascuna somma considerando sempre n come numero dei termini in ogni serie, e quindi variabile per la differenza 1. Le somme poi si avrebbero tutte separatamente dall'equazione $S_n - S_{n-1} = T$, indicando per S_n la somma richiesta, per S_{n-1} la somma di $n-1$ termini della stessa serie, e per T il termine generale corrispondente. Ottenute le quattro diverse somme date per n, in luogo di questa lettera si sostituirebbe il suo valore dato per x rispettivamente dalle equazioni $x = 4n+9$, $x = 4n+8$, ec. e si riunirebbero in fine le stesse ad una sola espressione col metodo già spiegato.

23. Vedutosi l' uso del metodo delle funzioni generatrici per la risoluzione di ogni equazione lineare alle differenze finite, e coi coefficienti costanti non è fuor del proposito il notare come le equazioni fondamentali dei problemi dati ai n.^{i} 18. 20. 22. per la partizione di un numero x in due, in tre

o in quattro parti intere e disuguali non sono che casi particolari di un' equazione assai più generale. Essa nasce dalla ricerca del numero dei modi ne' quali il numero qualunque intero x può essere la somma di x' termini disuguali delle serie aritmetica m, $m+n$, $m+2n$, $m+3n$, ec. di numeri interi. Se si rappresenti per $z_{x,x'}$ la funzione corrispondente, da cui ottengasi in ogni caso il numero richiesto, si vedrà facilmente, che la totalità delle partizioni si dividerà in quelle nelle quali non entra la parte m, e in quelle nelle quali essa si trova. Quanto alle prime esse sono evidentemente altrettante, quante quelle per le quali $x-nx'$ può essere la somma di x' termini qualunque e disuguali della serie, cioè $z_{x-nx',x'}$ giacchè per ipotesi n dev' essere elemento comune di ciascuna delle x parti. Rispetto poi alle partizioni, nelle quali esiste la parte m esse saranno altrettante, quante quelle per le quali $x-m$ può essere la somma di $x'-1$ termini della serie fra i quali non entri la m, ossia per ciò che si è detto prima, altrettante, quante sono quelle per le quali il numero $x-m-n\,(x'-1)$ può essere la somma di $x'-1$ termini qualunque purchè disuguali della serie, cioè $z_{x-m-n(x'-1),x'-1}$, e si avrà così l'equazione $z_{x,x'}=z_{x-nx',x'}+z_{x-m-n(x'-1),x'-1}$ la quale, fatto $m=n=1$, diviene $z_{x,x'}=z_{x-x',x'}+z_{x-x',x'-1}$ in cui $z_{x,x'}$ rappresenta il numero de' modi, ne' quali il numero qualunque x può essere la somma di x' termini disuguali della serie de' numeri naturali. Dunque fatto successivamente $x'=2, =3, =4$, sarà primieramente $z_{x,2}-z_{x-2,2}=z_{x-2,1}$ ovvero $z_{x+2,2}-z_{x,2}=z_{x,1}$, che ha lo stesso significato di quella che fu stabilita al n.' 18, giacchè è evidente essere $z_{x,1}=1$. Così si avranno pure le equazioni $z_{x+3,3}-z_{x,3}=z_{x,2}$, e $z_{x+4,4}-z_{x,4}=z_{x,3}$, che sono le stesse di quelle che rispettivamente furono poste nei n.^{i} 20. 22. L' equazione poi $z_{x,x'}=z_{x-nx',x'}+z_{x-m-n(x'-1),x'-1}$ esprime un importante e generalissimo teorema, che in altro modo fu già dimostrato (1) dall' illustre geometra Sig. Paoli.

24. Si raccoglie intanto dalle premesse cose, che la maggior difficoltà, che può incontrarsi nell' uso del calcolo delle funzioni generatrici per la risoluzione dei problemi, oltre quella di stabilirne opportunamente le equazioni, dipende dallo sviluppo delle stesse funzioni generatrici, per cui si richiedono sovente metodi speciali, i quali potrebbero talvolta riuscire soggetti agli inconvenienti dell' induzione. Il Sig. Marchese Laplace nelle citate sue opere ne ha accennati parecchi sommamente ingegnosi, benchè l'esposizione da Lui fattane lasci in essi sussistere il bisogno di una maggiore illustrazione. I confini prescritti ad una memoria comunque estesa non consentono di trattarne in questa diffusamente, e soltanto a fondamento delle cose, che sono per dirsi nei numeri seguenti per la rigorosa soluzione di un interessantissimo problema pure trattato dal Sig. Laplace, merita di essere quì recato il metodo appartenente allo sviluppo della formola $(1+t+t^2+t^3+t^4 \ldots\ldots + t^x + \text{ec.})^n$, o ciò che è lo stesso alla ricerca generale del coefficiente di t^x nel prodotto da essa indicato. Per trovarlo giova prima di tutto avvertire, che supposti n, p, m tre numeri qualunque interi se il coefficiente di t^x abbia in $(1+t+t^2+t^3+t^4+\text{ec.})^p$ la forma $\frac{(x+m)(x+m-1)(x+m-2)\ldots\ldots(x+1)}{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots 2.1}$, il coefficiente di t^x in $(1+t+t^2+t^3+t^4+\text{ec.})^{p+1}$ sarà espresso da $\frac{(x+m+1)(x+m)(x+m-1)\ldots\ldots(x+1)}{(m+1)(m)(m-1)\ldots 2.1}$. Di fatto dovendo per ipotesi i coefficienti di t^0, t^1, t^2, t^3, $t^4 \ldots t^x$ in $(1+t+t^2+t^3+t^4+\text{ec.})^p$

---

(1) V. Memorie della Società Italiana. Tom. II. pag. 832. Paoli. Opuscula Analytica. Liburni. 1780.

formare la serie 1, $m+1$, $\frac{(m+2)(m+1)}{2}$ .... $\frac{(x+m-2)(x+m-3)\,..(x-1)}{m(m-1)....2.1}$, $\frac{(x+m-1)(x+m-2.)..x}{m(m-1)...2.1}$, $\frac{(x+m)(x+m-1).....(x+1)}{m(m-1)...2.1}$, la quale ha $x+1$ termini, si vede facilmente che la somma della medesima deve essere il coefficiente di t^{x} in $(1+t+t^2+t^3....+t^x+\text{ec.})^{p+1}$ qualora si rifletta al modo con cui i termini contenenti rispettivamente t^{0}, t^{1}, t^{2}, t^{3} ec. in $(1+t+t^2+t^3....+t^x+\text{ec.})^{p}$ si moltiplichino coi termini di $(1+t+t^2+t^3....+t^{x}+\text{ec.})$. Ora trattasi di dimostrare una tal somma eguale al numero dei modi ne' quali $x+m+1$ cose possono combinarsi ad $m+1$ ad $m+1$, il quale appunto è espresso come d' altronde si sa da $\frac{(x+m+1)\,(x+m)\,(x+m-1)\,.\,.\,.\,.\,.\,(x+1)}{1.2\,.\,.\,.\,.\,.\,(m-1)(m)(m+1)}$. A rendere più sensibile la dimostrazione si immagini, che le $x+m+1$ cose sieno rappresentate da a, b, c, d, e, ec. Nella totalità delle combinazioni in questione vi saranno le parziali, che contengono la a, le quali saranno altrettante, quante sono quelle nelle quali $x+m$ cose possono combinarsi ad m ad m, numero che è espresso da $\frac{(x+m)(x+m-1)....(x+1)}{1.2.....(m-1)m}$. Le combinazioni ad $m+1$ ad $m+1$, che contengono la b saranno in parte comprese fra quelle, nelle quali entra pure la a, e le rimanenti saranno altrettante, quante sono quelle nelle quali $x+m-1$ cose possono combinarsi ad m ad m cioè saranno in numero espresso da $\frac{(x+m-1)(x+m-2)....x}{1.2....(m-1)m}$. Similmente le combinazioni ad $m+1$ ad $m+1$ nelle quali entra la c saranno, oltre quelle già assegnate nelle quali entra pure la a, e la b quelle eziandio nelle quali la c può combinarsi colle altre $x+m-2$ cose. Il numero pertanto di tali combinazioni nelle quali entra la c esclusa la a e la b sarà espresso da $\frac{(x+m-2)(x+m-3)....(x-1)}{m(m-1)....2.1}$. Così procedendo si vedrà essere $\frac{(x+m-3)(x+m-4)...(x-2)}{m(m-1)....2.1}$ il numero delle combinazioni ad $m+1$ ad $m+1$ nelle quali entra la d escluse le a, b, c. Continuando pure la stessa analisi, si troverà il numero delle combinazioni ad $m+1$ ad $m+1$, nelle quali entra una qualunque delle cose indicate esclusivamente a tutte le precedenti a, b, c, d ec. espresso da uno de' termini della indicata serie corrispondentemente retrocedendo dall' ultimo, cosicchè quando si giungerà alla cosa $(x+1)^{esima}$ secondo l'ordine divisato, la quale, escluse tutte le precedenti, deve ancora combinarsi insieme alle altre m ad $m+1$ ad $m+1$ si troverà, che il numero delle combinazioni corrispondenti è lo stesso che quello delle combinazioni di m cose ad m ad m cioè 1, che è il primo termine della serie proposta. Sarà quindi esaurito il total numero delle combinazioni di $x+m+1$ cose ad $m+1$ ad $m+1$ colla somma della serie medesima, e sapendosi d'altronde, che detto numero è espresso da $\frac{(x+m+1)(x+m)(x+m-1)\ldots(x+1)}{1.2\ldots(m-1)(m)(m+1)}$, esprimerà esso pure la somma della serie. Ciò si evince eziandio sottraendo da questa espressione quella che nasce ponendo in essa x in luogo di $x+1$, o ciò che è lo stesso $x-1$ in luogo di x, con che si ha

$$\frac{(x+m+1)(x+m)(x+m-1)\ldots(x+1)}{1.2\ldots(m-1)(m)(m+1)} - \frac{(x+m)(x+m-1)(x+m-2)\ldots\ldots x}{1.2\ldots(m-1)(m)(m+1)} =$$

$\frac{(x+m)(x+m-1)(x+m-2)\ldots(x+1)}{1.2\ldots(m-1)m}$, che è il termine generale della serie proposta.

Il lemma precedente conduce a determinare il coefficiente di t^x in $(1+t+t^2+t^3+t^4\ldots\ldots+t^x+\text{ec.})^n$. Si ponga perciò $n=1$, ed allora si vede essere 1 il coefficiente di t^x. Si faccia ancora $n=2$ e si vedrà essere $(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})^2 = 1+2t+3t^2+4t^3+\text{ec.}$, e quindi $x+1$ sarà il coefficiente di t^x. Così pure se $n=3$ sarà in $(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})^3$ il coefficiente di $t^x = 1+2+3+\ldots\ldots+(x+1) = \frac{(x+2)(x+1)}{2}$, che appartiene alla forma del termine generale della serie considerata nel lemma precedente. Similmente pel lemma stesso il coefficiente di t^x in $(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})^4$ si troverà espresso da $\frac{(x+3)(x+2)(x+1)}{1.2.3}$, e quello di $(1+t^2+t^3+\text{ec.})^5$ riceverà il valore $\frac{(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)}{1.2.3.4}$, e così successivamente riguardo ai coefficienti di t^x nelle potenze superiori di $(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})$; e quindi in generale il coefficiente di t^x in $(1+t+t^2+t^3+t^4 \ldots\ldots + t^x + \text{ec.})^n$ supposto n non <3 sarà $\frac{(x+n-1)(x+n-2)(x+n-3)\ldots\ldots(x+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots(n-1)}$.

25. Le considerazioni del numero precedente giovano per mostrare la rigorosa applicazione di un metodo analogo a quello, che è stato seguito nell' integrazione delle equazioni alle differenze di ordine determinato ad altre di ordine indeterminato come meglio si chiarirà coll' esempio. Una di queste nasce dal problema seguente proposto dal Sig. Laplace. (1)

Sia q la probabilità di un evento semplice per ciascuno di x colpi, cioè la probabilità di condurre un evento determinato dipendentemente da una sola prova, la quale poi debba ripetersi x volte. Si cerca la probabilità composta risguardante la ripetizione continua per i volte dell' evento semplice dentro il numero x di colpi o di prove.

Sia $z_{x,i}$ la funzione di x, i esprimente la probabilità di condurre l' evento composto al colpo x^{esimo}; e poichè nell' ipotesi, che esso così si verifichi, il colpo $x - i^{esimo}$ dev' essere contrario all' evento semplice, ed il colpo $x - i - 1^{esimo}$ può essere a questo o favorevole o contrario, si indichi per P la somma delle due probabilità l'una favorevole e l'altra contraria all' evento semplice pel colpo $x-i-1^{esimo}$, probabilità tali però che escludano la verificazione dell'evento composto prima del colpo $x-i-1^{esimo}$ come contraria all'ipotesi. Si indichino pure per P', P'', P''', ec. le analoghe somme di probabilità per ordine corrispondenti ai colpi precedenti fino allo $x-2i.^{esimo}$ intorno al quale giova osservare, che qualora si suppongano tutti i colpi dopo di esso fino allo $x-i-1^{esimo}$ inclusivamente favorevoli all'evento semplice, non si potrà il colpo suddetto $x-2i^{esimo}$ supporre che contrario, altrimenti si avrebbe l' evento composto al colpo $x-i-1^{esimo}$: ciò posto si vedrà valere l'equazione $z_{x,i}=P(1-q)q^i$, ed essendo $P=F+C$ quando per F, C si esprima rispettivamente la probabilità favorevole e la contraria all' evento semplice, ed essendo d'altronde $F=qP'$, $Cq^i=z_{x-1,i}$, $C=\frac{z_{x-1,i}}{q^i}$ sarà pure $P=q\,P'+\frac{z_{x-1,i}}{q^i}$, e quindi $P'=q\,P''+\frac{z_{x-2,i}}{q^i}$, $P''=qP'''+\frac{z_{x-3,i}}{q^i}$ . . . . . . $P^{(i-1)}=\frac{z_{x-i.i}}{q^i}$, giacchè anche per le cose dette la probabilità corrispondente all'evento semplice pel colpo $x-2i$ non può essere che contraria. Sostituendo pertanto nell' equazione $z_{x,i}=(1-q)Pq^i$ successivamente i valori di P, P', P'', P''' . . . . . $P^{(i-1)}$ si troverà

---

(1) V. Laplace. Théorie analytique des probabilités. Seconde édition 1814. pag. 247.

$$z_{x,i}=(1-q)(z_{x-1,i}+qz_{x-2,i}+q^2z_{x-3,i}+\text{ec.}+q^{i-1}z_{x-i,i})$$

ovvero

$$\text{G)}\quad z_x=(1-q)(z_{x-1}+qz_{x-2}+q^2z_{x-3}+\text{ec.}+q^{i-1}z_{x-i}),$$

poichè non variando la i al variare della x, si può considerare

rare la probabilità ricercata come funzione della sola variabile x.

Seguendo ora il metodo del Sig. Laplace trattasi di ritrovare la funzione generatrice di z_x, da cui avendosi quelle di z_{x-1}, z_{x-2}, z_{x-3}, ec. z_i riunendole tutte in una somma si ricaverà la funzione generatrice della probabilità richiesta col presente problema, e quindi la probabilità stessa in cui si raccolgono tutte le combinazioni di probabilità semplici, per le quali si ottiene l' evento composto dal colpo $i.^{esimo}$ fino allo x^{esimo} inclusivamente per amendue. Per risolvere ora l'equazione (G) si rappresenti il secondo membro di essa per $(1-q)\nabla z_x$, cioè sia $z_x=(1-q)\nabla z_x$. Quindi indicando al solito per u la funzione generatrice di z_x, quella di $(1-q)\nabla z_x$ dev' essere $(1-q)u(t+qt^2+q^2t^3....+q^{i-1}t^i)=u'$, giacchè in questa il coefficiente di t^x dev' essere appunto $(1-q)(z_{x-1}+qz_{x-2}.....+q^{i-1}z_{x-i})$. E le funzioni u, u' sarebbero anche perfettamente eguali se l' equazione proposta sussistesse per qualunque supposizione del valore di x, poichè allora sarebbero eziandio corrispondentemente uguali tutti i coefficienti delle potenze di t nelle due funzioni. Ad ogni modo si avrà sempre l' equazione $u+\varphi(t)=u'$, esprimendo per $\varphi(t)$ una quantità contenente una o più potenze di t che si annullerà o riceverà un determinato valore secondo la diversità dei casi. Nel presente, poichè il minor valore che possa darsi ad x è quello di $x=i$ essendo $z_i=q^i$, e d'altronde l'equazione in questa ipotesi darebbe $z_i=(1-q)(z_{i-1}+qz_{i-2}+\text{ec.})=0$, se ne inferisce, che essendo il coefficiente di t^i in u espresso da q^i mentre si annulla in u', sarà $\varphi(t)=-q^it^i$ circoscrivendosi poi questo valore dall' osservare, che ponendo $x = i + 1$ l' equazione sussiste come nelle successive supposizioni. Sarà pertanto $u - q^i t^i = u' = (1 - q)u(t + qt^2 + q^2t^3 \ldots\ldots + q^{i-1} t^i) = (1 - q)\, ut\, \frac{q^i t^i - 1}{qt - 1}$, e finalmente $u = \frac{q^i(1 - qt)t^i}{1 - t + (1 - q)q^i t^{i+1}}$. Ritrovata ora l'espressione di u funzione generatrice di z_x si vede subito essere la funzione generatrice di $z_x + z_{x-1} + z_{x-2} + z_{x-3} \ldots\ldots + z$ cioè della probabilità totale ricercata espressa da $u\,(1 + t + t^2 + t^3 \ldots + t^{x-i}) = u\left(\frac{t^{x-i+1} - 1}{t - 1}\right) = \frac{u}{1 - t} - \frac{ut^{x-i+1}}{1 - t} = u\,(1 + t + t^2 + t^3 \ldots \ldots + t^x + \text{ec.}) - ut^{x-i+1}(1 + t + t^2 \ldots\ldots + t^x + \text{ec.})$ sviluppata in serie ordinata secondo le potenze di t. Riflettendo per altro al modo con cui nella nuova funzione nasce il coefficiente di t^x, e considerando perciò la funzione u sotto la forma generale $z_0 + z_1 t + z_2 t^2 + z_3 t^3 \ldots\ldots + z_i t^i \ldots\ldots + z_x t^x + \text{ec.}$ si vedrà, che la prima parte del coefficiente in questione corrispondente ad $u(1 + t + t^2 + t^3 \ldots + t^x + \text{ec.})$ è $z_x + z_{x-1} + z_{x-2} \ldots + z_{x-i+1} + \text{ec.}$ e l'altra parte corrispondente a $-ut^{x-i+1}(1 + t + t^2 \ldots + t^{i-1} + \text{ec.})$ è $-(z_{i-1} + z_{i-2} + z_{i-3} + \text{ec.})$, la quale si riduce a zero, poichè, come si è veduto, i è il minor valore, che possa darsi ad x. Dunque resterà la sola parte del coefficiente, che corrisponde ad $u\,(1 + t + t^2 \ldots\ldots\ldots\ldots + t^x + \text{ec.}) = \frac{u}{1 - t}$

$$= \frac{q^i(1 - qt)t^i}{(1 - t)^2\left(1 + \frac{(1 - q)q^i t^{i+1}}{1 - t}\right)}$$

a cui perciò si riduce la funzione generatrice della probabilità totale ricercata, funzione pertanto che si ottiene in questo come in altri casi analoghi con dividere soltanto l' espressione di u per $1 - t$ come usò il Sig. Marchese Laplace. A sviluppare ora l' ultima funzione ritrovata per avere il coefficiente di t^{x+i} si faccia $\frac{(1-q)q^it^{i+1}}{1-t}=-z$, e sarà $\frac{q^i(1-qt)t^i}{(1-t)^2(1-z)} = q^i(1-qt)t^i(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})^2\times(1+z+z^2+z^3+\text{ec.}) = q^i(1-qt)t^i(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})^2\times\left(1-\frac{(1-q)q^it^{i+1}}{1-i}+\frac{(1-q)^2q^{2i}t^{2i+2}}{(1-t)^2}-\frac{(1-q)^3q^{3i}t^{3i+3}}{(1-t)^3}+\frac{(1-q)^4q^{4i}t^{4i+4}}{(1-t)^4}-\text{ec.}\right)$ $= q^i(1-qt)t^i(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})^2-(1-q)(1-qt)q^{2i}t^{2i+1}\times(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})^3+(1-q)^2(1-qt)q^{3i}t^{3i+2}(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})^4$ $-(1-q)^3(1-qt)q^{4i}t^{4i+3}(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})^5+\text{ec.}$ Per trovare quindi il coefficiente di t^{x+i} si rifletta, che riguardo al primo termine della funzione così sviluppata, la parte del coefficiente ricercato sarà $q^i(x+1)-q^{i+1}x=q^i((1-q)x+1)$, essendo facile a vedersi che a ciò si richiede di prendere i due coefficienti di t^x, e di t^{x-1} nella serie $(1+t+t^2+t^3+t^4+\text{ec.})^2$ e moltiplicarli rispettivamente per q^i, e q^{i+1}. Con simil norma applicando le cose dette nel precedente numero 24. si vedrà, che il coefficiente di t^{x+i} in $-(1-q)(1-qt)q^{2i}t^{2i+1}(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})^3$ è $-(1-q)q^{2i}\frac{(x-i+1)(x-i)}{2}+(1-q)q^{2i+1}\frac{(x-i)(x-i-1)}{2} =$ $-(1-q)q^{2i}\frac{(x-i)}{2}\times(x-i-1+2)+(1-q)q^{2i+1}\frac{(x-i)}{2}(x-i-1) =$ $-(1-q)q^{2i}\frac{(x-i)}{2}((1-q)(x-i-1)+2)$.

Proseguendo si troverà il coefficiente di t^{x+i} in $(1-q)^2(1-qt)q^{3i}t^{3i+2}(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})^4$ espresso da

$$(1-q)^2q^{3i}\frac{(x-2i+1)(x-2i)(x-2i-1)}{2.3}-(1-q)^2q^{3i+1}\times$$

$$\frac{(x-2i)(x-2i-1)(x-2i-2)}{2.3} =$$

$$(1-q)^2q^{3i}\frac{(x-2i)(x-2i-1)}{2.3}(x-2i-2+3)$$

$$-q(1-q)^2q^{3i}\frac{(x-2i)(x-2i-1)}{2.3}(x-2i-2)=$$

$$(1-q)^2q^{3i}\frac{(x-2i)(x-2i-1)}{2.3}((1-q)(x-2i-2)+3).$$

Parimenti il coefficiente di t^{x+i} in $-(1-q)^3(1-qt)\times$ $q^{4i}t^{4i+3}(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})^5$ sarà

$$-(1-q)^3q^{4i}\frac{(x-3i+1)(x-3i)(x-3i-1)(x-3i-2)}{2.3.4}$$

$$+(1-q)^3q^{4i+1}\frac{(x-3i)(x-3i-1)(x-3i-2)(x-3i-3)}{2.3.4}=$$

$$-(1-q)^3q^{4i}\frac{(x-3i)(x-3i-1)(x-3i-2)}{2.3.4}(x-3i-3+4)$$

$$+q(1-q)^3q^{4i}\frac{(x-3i)(x-3i-1)(x-3i-2)}{2.3.4}(x-3i-3)=$$

$$-(1-q)^3q^{4i}\frac{(x-3i)(x-3i-1)(x-3i-2)}{2.3.4}((1-q)(x-3i-3)+4).$$

Sarà dunque il ricercato coefficiente di t^{x+i} nella funzione generatrice della totale richiesta probabilità:

$$q^i((1-q)x+1)$$

$$-(1-q)q^{2i}\frac{(x-i)}{1.2}((1-q)(x-i-1)+2)$$

$$+(1-q)^2q^{3i}\frac{(x-2i)(x-2i-1)}{1.2.3}((1-q)(x-2i-2)+3)$$

$$-(1-q)^3q^{4i}\frac{(x-3i)(x-3i-1)(x-3i-2)}{1.2.3.4}((1-q)(x-3i-3)+4)+\text{ec.}$$

conformemente a quanto ritrovò (1) il Sig. Laplace risolvendo lo stesso problema. È intanto evidente, che se in quest' ultima formola si ponga $x-i$ in luogo di x si avrà da essa la probabilità totale per ottenere l'evento composto al colpo x o prima, cioè al colpo x, o per qualunque altro de' precedenti fino all' i^{esimo} inclusivamente. Sarà pertanto questa nuova espressione

---

(1) V. Laplace. Opera citata pag. 249.

$$
(\mathrm{H})\ldots\left\{
\begin{array}{l}
q^i((1-q)(x-i)+1) \\
-(1-q)\,q^{2i}\,\frac{(x-2i)}{1.2}\,((1-q)(x-2i-1)+2) \\
+(1-q)^2 q^{3i}\,\frac{(x-3i)(x-3i-1)}{1.2.3}\,((1-q)(x-3i-2)+3) \\
-(1-q)^3 q^{4i}\,\frac{(x-4i)(x-4i-1)(x-4i-2)}{1.2.3.4}\,((1-q)(x-4i-3)+4) \\
+\text{ec.}
\end{array}\right.
$$

la quale come la precedente nelle particolari applicazioni deve essere continuata finchè i fattori, che essa contiene diventino nulli o negativi. Per farne una s'immagini il giuoco conosciuto dai francesi sotto il nome di *Croix ou Pile*, e si cerchi la probabilità totale per ottenere dentro sette colpi l'evento composto di tre favorevoli a *Croix*, cioè sia $x=7$, $i=3$. Essendo pure per la natura del giuoco stesso $q=1-q=\frac{1}{2}$ si troverà la probabilità totale espressa da

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 4+\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{47}{128}.$$

26. L'espressione (H) del numero precedente può considerarsi come l'integrale di una equazione contenente differenze ordinarie, cioè costanti ed insieme variabili, la quale ha inoltre un coefficiente funzione di una delle variabili come si vedrà in seguito. Di fatto prendendo a considerare in altro aspetto il problema del numero precedente, ed indicando per $z'_{x,i}$ la probabilità totale per ottenere entro gli x colpi l'evento composto di i eventi semplici, con più facile raziocinio verrà a stabilirsi una relazione fra $z'_{x,i}$ ed altre funzioni simili. A ciò si perviene riflettendo potere l'evento composto verificarsi in ciascuno dei colpi $x,^{\text{esimo}}$ $x-1,^{\text{esimo}}$ $x-2,^{\text{esimo}}$ $\ldots\, i^{\text{esimo}}$ cioè generalmente nel colpo $x-m.^{\text{esimo}}$ supposto m numero intero che non escluda lo zero, ed in ogni caso tale che $x-m$ non sia minore di i. Si troverà quindi la probabilità dell'evento composto al colpo $x-m$ osservando, che nell'ipotesi relativa il colpo $x-m-i.^{\text{esimo}}$ deve essere contrario, corrispondendo-

gli la probabilità $1-q$, essendo poi tutti i colpi dallo $x-m-i+1.^{\text{esimo}}$ fino allo $x-m.^{\text{esimo}}$ comprensivamente ad amendue gli estremi favorevoli all' evento semplice, cosicchè la probabilità corrispondente al loro seguito sia espressa da q^i. Inoltre poichè non dee verificarsi l' evento composto prima del colpo $x-m$, varrà pel seguito dei colpi precedenti ad $x-m-i$ la probabilità contraria all'evento composto dentro il numero dei colpi $x-m-i-1$, la quale verrà espressa da $1-z'_{x-m-i-1,i}$. Dunque la probabilità di verificarsi l'evento composto al colpo $x-m^{\text{esimo}}$ sarà $(1-q)q^i(1-z'_{x-m-i-1,i})$. Posto ora successivamente $m=0$, $=1$, $=2$ ec. fino ad $m=x-i-1$ in questa espressione, essa darà la probabilità dell' evento composto in ciascuno dei colpi $x.^{\text{esimo}}$, $x-1.^{\text{esimo}}$, ec. fino all' $i+1^{\text{esimo}}$ inclusivamente; e siccome $z'_{x,i}$ è la somma delle probabilità parziali per la verificazione dell' evento in ciascuno dei colpi $x.^{\text{esimo}}$, $x-1.^{\text{esimo}}$, $x-2.^{\text{esimo}}$, ec. $i.^{\text{esimo}}$, così si avrà l' equazione:

$$z'_{x,i}=(1-q)q^i\Big((1-z'_{x-i-1,i})+(1-z'_{x-i-2,i})+(1-z'_{x-i-3,i})+\text{ ec. }+(1-z'_{0,i})\Big)+q^i$$

essendo q^i, come è evidente, la probabililà per la verificazione dell' evento composto al colpo i^{esimo}, la quale non può ridursi all' espressione generale $(1-q)q^i(1-z'_{x-m-i-1,i})$. Se quindi nell' equazione si fa decrescere la x di una unità nascerà l' altra

$$z'_{x-1,i}=(1-q)q^i\Big((1-z'_{x-i-2,i})+(1-z'_{x-i-3,i})+\text{ec.}+(1-z'_{0,i})\Big)+q^i,$$

la quale sottratta dalla precedente dà

(K) . . . . $z'_{x,i} - z'_{x-1,i} = (1-q)q^{i}(1-z'_{x-i-1,i})$

equazione dotata delle condizioni esposte al principio di questo numero, e di cui l' integrale dev'essere appunto l'espressione (H) del numero precedente, come potrebbe verificarsi colle opportune sostituzioni. Intanto l' equazione (K) è una di quelle, di cui la soluzione sfugge ai metodi conosciuti dal calcolo delle differenze, la quale però come molte altre analoghe può guidare ad una risoluzione dipendente dal calcolo delle funzioni generatrici. È prezzo ora dell' opera l' indagare quale altra forma possa ricevere l' equazione (K) subordinatamente a tale intendimento, per ricavarne eziandio il metodo da tenersi per altri problemi, che presentino somiglianti condizioni. Osservando perciò, che qualora si indichi per $z_{x-m,i}$ la probabilità parziale per condurre l' evento composto generalmente al colpo $x-m^{esimo}$ essendo m tale, che riceva tutti i valori da 0 fino ad $x-i$ inclusivamente per amendue gli estremi, si ha $z'_{x-m,i} = z_{x-m,i} + z_{x-m-1,i} + z_{x-m-2,i} + \text{ec.} + z_{i,i}$, può quindi l' equazione (K) ridursi all' altra seguente

(I) . . $z_{x,i} = (1-q)q^{i}(1 - z_{x-i-1,i} - z_{x-i-2,i} - \text{ec.} - z_{i,i})$.

Col mezzo di questa formola a cui potrebbe eziandio applicarsi il metodo già seguito per ritrovare la funzione generatrice di z_x nella equazione (G) del numero precedente, giova richiamando l' esempio adotto sul fine del numero stesso ritrovare il valore di $z'_{x,i}$ nell' ipotesi cioè di $x=7$, $i=3$, $1-q=q=\frac{1}{2}$. Si ha pertanto $z'_{7,3} = z_{7,3} + z_{6,3} + z_{5,3} + z_{4,3} + z_{3,3}$. Ora essendo $z_{3,3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3}$, ed avendosi dalla formola (I) $z_{7,3} = \left(\frac{1}{4}\right)^{4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{7}$, e $z_{6,3} = z_{5,3} = z_{4,3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4}$ sarà

$z'_{7,3} = \frac{47}{128}$ come si era già trovato in altra maniera.

27. Dalla formola (I) del numero precedente può ricavarsi la (G) del num.° 25, locchè per altro non sembra malgrado parecchj tentativi potersi fare in un modo abbastanza diretto. Però dall' equazione (I) si vede facilmente potersi ricavare le seguenti:

$$z_{x-1,i}=(1-q)\,q^i(1-z_{x-i-2,i}-z_{x-i-3,i}-\text{ec.}-z_{i,i})$$

$$z_{x-2,i}=(1-q)\,q^i(1-z_{x-i-3,i}-z_{x-i-4,i}-\text{ec.}-z_{i,i})$$

$$z_{x-3,i}=(1-q)\,q^i(1-z_{x-i-4,i}-z_{x-i-5,i}-\text{ec.}-z_{i,i})$$

. . . .

. . . .

) . . . . $z_{x-i\,i}=(1-q)q^i(1-z_{x-2i-1,i}-z_{x-2i-2,i}-\text{ec.}-z_{i,i})$,

e deducendo da queste

$$\frac{z_{x-1,i}}{q^i}=(1-q)(1-z_{x-i-2,i}-z_{x-i-3,i}-\text{ec.}-z_{i,i})$$

$$\frac{z_{x-2,i}}{q^i}=(1-q)(1-z_{x-i-3,i}-z_{x-i-4,i}-\text{ec.}-z_{i,i})$$

$$\frac{z_{x-3,i}}{q^i}=(1-q)(1-z_{x-i-4,i}-z_{x-i-5,i}-\text{ec.}-z_{i,i})$$

ec. ec.

se si sostituiscano opportunamente questi valori nell'equazione (I) si avrà

$${}_{,i}=(1-q)q^i\left(\frac{z_{x-1,i}}{q^i}+q(1-z_{x-i-2,i}-z_{x-i-3,i}-\text{ec.}-z_{i,i})-z_{x-i-1,i}\right)$$

$$=(1-q)\,q^i\left(\frac{z_{x-1,i}}{q^i}+q\,\frac{z_{x-2,i}}{q^i}+q^2(1-z_{x-i-3,i}\right.$$

$$\left.-z_{x-i-4,i}-\text{ec.}-z_{i,i})-z_{x-i-1,i}-q\,z_{x-i-2,i}\right)=$$

$$(1-q)q^i\left(\frac{z_{x-1,i}}{q^i}+\frac{qz_{x-2,i}}{q^i}+\frac{q^2z_{x-3,i}}{q^i}\right.$$

$$+q^3(1-z_{x-i-4,i}-z_{x-i-5,i}-\text{ec.}-z_{i,i})-z_{x-i-1,i}$$

$$-qz_{x-i-2,i}-q^2z_{x-i-3,i}\Big)=(1-q)q^i\Big(\frac{z_{x-1,i}}{q^i}$$

$$+\frac{qz_{x-2,i}}{q^i}+\frac{q^2z_{x-3,i}}{q^i}\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{q^{i-1}z_{x-i,i}}{q^i}$$

$$+q^i(1-z_{x-2i-1,i}-z_{x-2i-2,i}-\text{ec.}-z_{i,i})$$

$$-(z_{x-i-1,i}+qz_{x-i-2,i}+\text{ec.}+q^{i-1}z_{x-2i,i})\Big)\Big)$$

e ponendo $z_{x-i,i}$ in luogo del suo valore dato dall' equazione (L) sarà

$$z_{x,i}=(1-q)q^i\Big(\frac{z_{x-1,i}}{q^i}+\frac{qz_{x-2,i}}{q^i}+\frac{q^2z_{x-3,i}}{q^i}\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+\frac{q^{i-1}z_{x-i,i}}{q^i}\Big)+q^iz_{x-i,i}-(1-q)q^i(z_{x-i-1,i}$$

$$+qz_{x-i-2,i}+\text{ec.}+q^{i-1}z_{x-2i,i})=(1-q)(z_{x-1,i}$$

$$+qz_{x-2,i}+q^2z_{x-3,i}\ldots\ldots+q^{i-1}z_{x-i,i})+q^iz_{x-i,i}$$

$$-(1-q)q^i(z_{x-i-1,i}+qz_{x-i-2,i}+\text{ec.}+q^{i-1}z_{x-2i,i})$$

ovvero

$$z_{x,i}-q^iz_{x-i,i}=(1-q)(z_{x-1,i}+qz_{x-2,i}+q^2z_{x-3,i}\ldots\ldots+q^{i-1}z_{x-i,i})$$

$$-(1-q)q^i(z_{x-i-1,i}+qz_{x-i-2,i}+\text{ec.}+q^{i-1}z_{x-2i,i}).$$

Se ora si pone $z_{x-1,i}+qz_{x-2,i}+q^2z_{x-3,i}+\text{ec.}+q^{i-1}z_{x-i,i}=V_{x,i}$ sarà $z_{x-i-1,i}+qz_{x-i-2,i}+q^2z_{x-i-3,i}+\text{ec.}+q^{i-1}z_{x-2i,i}=V_{x-i,i}$, e l'equazione precedente prenderà questa forma

$$z_{x,i}-q^iz_{x-i,i}=(1-q)V_{x,i}-(1-q)q^iV_{x-i,i}$$

ovvero ponendo $x+i$ in luogo di x, e dividendo tutto per q^{x+i}

$$\frac{z_{x+i,i}}{q^{x+i}}-\frac{z_{x,i}}{q^x}=\frac{1-q}{q^{x+i}}V_{x+i,i}-\frac{1-q}{q^x}V_{x,i}$$

cosicchè integrando i due membri dell' equazione secondo la differenza i della variabile x riesce $\frac{z_{x,i}}{q^x} = \frac{1-q}{q^x} V_{x,i}$ ossia ancora

$$z_{x,i} = (1-q)(z_{x-1,i} + q z_{x-2,i} + q^2 z_{x-3,i} + \text{ec.} + q^{i-1} z_{x-i,i})$$

come si era trovato in altro modo al numero 25. Non sembra quì inopportuno soggiungere, che a giustificare pienamente la ritrovata equazione occorre di tener conto della costante introdotta dall' integrazione per cui indicandosi con C_i una funzione arbitraria di i si abbia $\frac{z_{x,i}}{q^x} + C_i = \frac{1-q}{q^x} V_{x,i}$ sicchè ponendo $x=i+1$ onde $V_{i+1,i}=q^i$, derivi $\frac{z_{i+1,i}}{q^{i+1}} + C_i = \frac{(1-q)q^i}{q^{i+1}}$, e perciò $C_i=0$, essendo evidente che $z_{i+1,i}=(1-q)q^i$. Dunque annullandosi la costante nella fatta supposizione sarà come prima $z_{x,i}=(1-q)V_{x,i}$ poichè d'altronde non potrebbe la costante determinarsi nella supposizione di $x=i$, per la quale non sussistendo l' equazione (I) del numero precedente, non può neppure sussistere qualunque altra che possa derivarsene.

28. Un metodo eguale a quello, che si è tenuto per la soluzione del problema precedente serve a risolverne un altro che fu pure proposto dal Laplace (1), e di cui sembra opportuno di recare quì la soluzione da esso lui datane con qualche rischiarimento, che ne renderà facile l'intelligenza per avventura difficile a chiunque si accingesse a meditarla nella citata opera della Teoria analitica delle probabilità. Il problema, che ora proponesi colle parole stesse del mentovato Autore è il seguente:

„ Un nombre $n+1$ de joueurs jouent ensemble aux con-
„ ditions suivantes. Deux d' entre eux jouent d'abord, et celui

---

(1) V. Laplace. Opera sopra citata pag. 238.

„ qui perd se retire après avoir mis un franc au jeu, pour
„ n'y rentrer qu'après que tous les autres joueurs ont joué;
„ ce qui a lieu généralement pour tous les joueurs qui per-
„ dent, et qui par là deviennent les derniers. Celui des deux
„ premiers joueurs qui a gagné, joue avec le troisième, et
„ s'il le gagne, il continue de jouer avec le quatrième, et
„ ainsi de suite jusqu'à ce qu'il perde, ou jusqu'à ce qu'
„ il ait gagné successivement tous les joueurs. Dans ce dernier
„ cas, la partie est finie. Mais si le joueur gagnant au pre-
„ mier coup, est vaincu par l'un des autres joueurs, le vain-
„ queur joue avec le joueur suivant, et continue de jouer jus-
„ qu'à ce qu'il soit vaincu, ou jusqu'à ce qu'il ait gagné
„ de suite tous les joueurs; le jeu continue ainsi jusqu'à ce
„ qu'il y ait un joueur qui gagne de suite tous les autres, ce
„ qui finit la partie, et alors le joueur qui la gagne, emporte
„ tout ce qui a été mis au jeu. „

Ciò posto si offrono in un solo due problemi, l'uno dei quali riguarda il determinare la probabilità, che può indicarsi per z_x, che il giuoco o la partita finisca precisamente al colpo x^{esimo}, cioè che accaduto questo colpo uno qualunque de' giuocatori abbia superati gli altri n vincendo per n colpi di seguito. L'altro problema si riferisce alla ricerca della probabilità totale, che il giuoco sia terminato dentro x colpi, potendo finire nel colpo x^{esimo}, od in alcuño de' precedenti. Considerando quindi innanzi all'altro il primo degli accennati problemi è facile il riflettere che z_x sarà la somma di tutte le probabilità composte derivanti dalla doppia supposizione, che il giuocatore fortunato abbia vinto n colpi di seguito terminati col colpo x^{esimo}, e che sia entrato in giuoco al colpo $x-n+1^{esimo}$ vincendo in questo contro un altro, che può aver vinto precedentemente un solo colpo oppure due, tre, quattro ec. fino ad $n-1$ colpi di seguito. Si avranno dunque altrettante probabilità parziali componenti colla lor somma il valore di z_x quante sono le unità in $n-1$. Indicando ora per P la probabilità, che il giuocatore superato nel colpo $x-n+1^{\text{esimo}}$ abbia vinto precedentemente a questo m colpi di seguito, essendo m non <1, e non $>n-1$, $P \times \frac{1}{2^n}$ esprimerà generalmente la probabilità parziale del terminarsi la partita al colpo x^{esimo}. Ma se la partita terminasse col colpo $x-m^{\text{esimo}}$ sarebbe $z_{x-m} = P \times \frac{1}{2^{n-m}}$, e $P = z_{x-m} . 2^{n-m}$, poichè se il giuocatore superato al colpo $x-n+1^{\text{esimo}}$ avesse continuato a vincer sempre, la partita sarebbe terminata m colpi prima, perciò l' esposta probabilità parziale sarà espressa da $\frac{z_{x-m} . 2^{n-m}}{2^n}$; e facendo m successivamente $=1$, $=2$, $=3$, ec. $=n-1$, e sommando le probabilità parziali, che ne derivano, si avrà anche secondo le cose già dette

$$(M) \ldots . z_x = \frac{1}{2} z_{x-1} + \frac{1}{2^2} z_{x-2} + \frac{1}{2^3} z_{x-3} \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}} z_{x-n+1} .$$

Ora si vede che indicando per u la funzione generatrice di z_x, quella di $\frac{1}{2} z_{x-1} + \frac{1}{2^2} z_{x-2} + \frac{1}{2^3} z_{x-3} \ldots\ldots + \text{ec.} + \frac{1}{2^{n-1}} z_{x-n+1}$ deve essere $u \left(\frac{1}{2} t + \frac{1}{2^2} t^2 + \frac{1}{2^3} t^3 \ldots . + \frac{1}{2^{n-1}} t^{n-1} \right)$, e queste due funzioni sarebbero pure eguali se l'equazione proposta sussistesse per ogni valore di x. Ma quando $x=n$ si ha $z_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, perchè dovendo finire la partita col colpo n^{esimo} qualunque sia il giuocatore che vinca nel primo, essendo pur certo, che di due giuocatori che cominciano il giuoco l' uno dee vincere avendo inoltre a suo favore la stessa probabilità che ha l'altro, basterà perciò, che quegli che ottiene favorevole il primo colpo ottenga anche gli $n-1$ successivi, e quindi la probabilità z_n dovrà essere il prodotto della certezza per la probabilità di vincere per $n-1$ colpi di seguito, il quale appunto si esprime per $1 \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}$. D'altronde il secondo membro della stessa equazione divien nullo come è evidente nell' ipotesi di $x=n$. Dunque dalla funzione generatrice di z_x per eguagliarla a quella del secondo membro dell' equazione (M) si dovrà sottrarre il termine $\frac{t^n}{2^{n-1}}$ cioè si avrà $u - \frac{t^n}{2^{n-1}} = u\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2^2}t^2 + \frac{1}{2^3}t^3 \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-1}}t^{n-1}\right)$ $= \frac{ut\left(\frac{t^{n-1}}{2^{n-1}} - 1\right)}{t-2}$ e quindi $u(t-2) - ut\left(\frac{t^{n-1}}{2^{n-1}} - 1\right)$ $= (t-2)\left(\frac{t^n}{2^{n-1}}\right)$, onde $n = \frac{\frac{1}{2^n}t^n(2-t)}{1-t+\frac{t^n}{2^n}}$, che è la stessa formola trovata dal Sig. Laplace per l' espressione della funzione generatrice di z_x, la quale pure si riduce all' altra forma datale dallo stesso Autore ponendo $1-t=t'$, $\frac{t^n}{2^n}=t''$ cosicchè sia $\frac{\frac{1}{2^n}t^n(2-t)}{1-t+\frac{t^n}{2^n}} = \frac{\frac{1}{2^n}t^n(2-t)}{t'+t''} = \frac{1}{2^n}t^n(2-t)\left(\frac{1}{t'} - \frac{t''}{t'^2} + \frac{t''^2}{t'^3}\right.$ $\left. - \frac{t''^3}{t'^4} + \text{ec.}\right) = \frac{1}{2^n}t^n\frac{(2-t)}{1-t}\left(1 - \frac{1}{2^n} \cdot \frac{t^2}{1-t} + \frac{1}{2^{2n}} \cdot\cdot \frac{t^{2n}}{(1-t)^2} - \frac{1}{2^{3n}} \times \right.$ $\left. \frac{t^{3n}}{(1-t)^3} + \text{ec.}\right)$. Ora che la funzione generatrice di z_x è statà così ridotta, per avere il valore di z_x basterà trovare generalmente il coefficiente di t^x in $\frac{t^{rn}(2-t)}{2^{rn}(1-t)^r}$, potendo ciascuno dei termini della precedente espressione riferirsi, come è manifesto a questa forma, dipendentemente dal porre successivamente $r = 1, = 2, = 3, =$ ec. Pertanto il coefficiente di t^x in $\frac{t^{rn}(2-t)}{2^{rn}(1-t)^r}$ o ciò che è lo stesso in $\frac{t^{rn}(2-t)}{2^{rn}}(1+t+t^2+t^3+t^4+\text{ec.})^r$ qualora sia $r=3$, o comunque >3, si avrà sommando i coefficienti di t^{x-rn}, e di t^{x-rn-1} in $(1+t+t^2+t^3+t^4+\text{ec.})^r$, che si hanno per un' applicazione della formola generale trovata al numero 24, moltiplicati rispettivamente per $\frac{2}{2^{rn}}$, e per $\frac{-1}{2^{rn}}$. E sarà perciò il coefficiente di t^x in $\frac{t^{rn}(2-t)}{2^{rn}(1-t)^r}$ espresso da

$$\frac{2}{2^{rn}} \; \frac{(x-rn+r-1)(x-rn+r-2)\ldots\ldots(x-rn+1)}{1.2.3\ldots.(r-1)}$$

$$-\frac{1}{2^{rn}} \cdot \frac{(x-rn+r-2)(x-rn+r-3)\ldots\ldots(x-rn)}{1.2.3\ldots..(r-1)}$$

$$= \frac{(x-rn+2r-2)}{2^{rn}} \cdot \frac{(x-rn+r-2)(x-rn+r-3)\ldots\ldots(x-rn+1)}{1.2.3\ldots..(r-1)}.$$

Ora poichè quando si ha $r=1$, ovvero $r=2$ non vale questa formola pel coefficiente di t^x rispettivamente in $\frac{t^n(1-t)}{2^n(2-t)}$, ed in $\frac{t^{2n}(2-t)}{2^{2n}(1-t)^2}$, e si sa d' altronde come si è veduto altre volte, che il coefficiente di t^x nello sviluppo di $\frac{1}{1-t}$ è 1, ed in quello di $\frac{1}{(1-t)^2}$ è $x+1$, dunque il coefficiente di t^x in $\frac{t^n(2-t)}{2^n(1-t)}$ è $\frac{2-1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$, ed in $\frac{t^{2n}(2-t)}{2^{2n}(1-t)^2}$ è $\frac{2}{2^{2n}}(x-2n+1) - \frac{1}{2^{2n}}(x-2n) = \frac{x-2n+2}{2^{2n}}$. Perciò il cercato coefficiente totale di t^r in $\frac{1}{2^n} t^n \frac{(2-t)}{1-t}\left(1 - \frac{1}{2^n} \cdot \frac{t^n}{1-t} + \frac{1}{2^{2n}} \cdot \frac{t^{2n}}{(1-t)^2} - \text{ec.}\right)$ sarà

$$z_x = \frac{1}{2^n} - \frac{(x-2n+2)}{2^{2n}} + \frac{(x-3n+1)}{1.2.2^{3n}} \cdot (x-3n+4)$$

$$-\frac{(x-4n+1)(x-4n+2)}{1.2.3.2^{4n}}.(x-4n+6)+\text{ec.}$$

formola, in cui per ogni caso particolare, siccome osserva il Sig. Laplace, debbono prendersi tanti termini quante sono le unità intiere nel quoziente $\frac{x}{n}$, locchè è evidente se si rifletta, che ogni termine della trovata espressione contiene una differenza che in generale può indicarsi per $x-rn$, la quale, quando riesca quantità positiva $<n$, pone un limite inclusivo al numero de' termini da prendersi, essendochè risultando allora la differenza $x-(r+1)n$ quantità negativa non può più considerarsi come si è fatto per uno degli esponenti di t in $(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})^r$ ove gli esponenti tutti sono necessariamente positivi. Secondo questa regola per altro si avrebbe posto $x=n$, $z_n=\frac{1}{2^n}$, mentre si sa dover essere $z_n=\frac{1}{2^{n-1}}$. Questo apparente paradosso si dilegua col riflettere, che nella supposizione di $x=n$ non vi ha luogo a prendere il coefficiente di t^x in $\frac{t^{rn}(2-t)}{2^{rn}(1-t)^r}$ che nel caso di $r=1$, cioè per un solo termine della serie a cui è stata ridotta l' espressione della funzione generatrice di z_x. Quindi il coefficiente di t^x o di t^n in $\frac{t^n(2-t)}{2^n}(1+t+t^2\ \text{ec.})$ non essendovi esponenti negativi nella serie $1+t+t^2+$ ec. sarà $\frac{2}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}$ come dovea dimostrarsi.

Resta ora a sciogliersi il secondo problema col quale trattasi di determinare z'_x, per cui vuolsi esprimere la somma delle probabilità secondo le quali può rispettivamente la partita terminarsi dal colpo n^{esimo} fino allo x^{esimo} inclusivamente per amendue questi estremi. La funzione generatrice pertanto di z'_x sarà $u(1+t+t^2+t^3....+t^{x-n})$, giacchè essendo u la funzione generatrice di z_x tale dev' essere quella di z'_x, o ciò che è lo stesso di $z_x + z_{x-1} + z_{x-1} \ldots\ldots\ldots + z_n$. E poichè $u(1+t+t^2+t^3\ldots+t^{x-n}) = \frac{u(t^{x-n+1}-1)}{t-1} = \frac{u}{1-t} - \frac{ut^{x-n+1}}{1-t}$, con un raziocinio simile a quello, che fu praticato al numero 25. si proverà, che la funzione generatrice di z'_x si riduce ad $\frac{u}{1-t} = \frac{1}{2^n} t^n \frac{(2-t)}{1-t} . \left(\frac{1}{1-t} - \frac{1}{2^n} . \frac{t^n}{(1-t)^2} + \frac{1}{2^{2n}} . \frac{t^{2n}}{(1-t)^3} - \frac{1}{2^{3n}} . \frac{t^{3n}}{(1-t)^4} + \text{ec.} \right)$ rispetto alla quale prendendo in un modo analogo al già usato precedentemente nel trovare il valore di z_x i coefficienti di t^x in $\frac{t^{rn}}{2^{rn}} . \frac{(2-t)}{(1-t)^{r+1}}$ fatto successivamente $r=2, =3, =4$ ec., ed osservando, che il coefficiente di t^x in $\frac{t^n}{2^n} \frac{(2-t)}{(1-t)^2}$ è $\frac{x-n+2}{2^n}$, si trova

$$z'_x = \frac{x-n+2}{2^n} - \frac{(x-2n+1}{1.2.2^{2n}} . (x-2n+4)$$

$$+ \frac{(x-3n+1)(x-5n+2)}{1.2.3.2^{3n}} . (x-3n+6) - \text{ec.}$$

espressione, la quale, come pure osserva il Sig. Laplace, si verifica anche nel caso di $x=n$, avendosi allora $z'_x = z_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

Le precedenti considerazioni guidano il Sig. Laplace ad altre più difficili e specialmente collegate col maneggio di equazioni a differenze finite parziali. La risoluzione di queste in generale sarà quindi uno degli oggetti di altra memoria, nella quale si mostreranno anche, senza uscire dal calcolo dei finiti, gli usi più elevati, e le ulteriori applicazioni del metodo delle funzioni generatrici.

OSSERVAZIONI

INTORNO ALL' ECCLISSE SOLARE DEL GIORNO 7 SETTEMBRE DELL' ANNO 1820.

DEL PROFESSOR GIOVANNI SANTINI

Ricevute adì 21. *Dicembre* 1821.

L'Ecclisse del Sole del giorno 7. Settembre dell'anno 1820. essendo stata annulare nelle nostre regioni e quasi centrale, deve annoverarsi fra uno dei più singolari, ed importanti fenomeni astronomici sì per la sua rarità, come per le conseguenze che se ne possono dedurre intorno alla misura dei diametri solare, e lunare, ed intorno all' Atmosfera della Luna.

Si attendeva con impazienza quest'Ecclisse per decidere la questione intorno all' Atmosfera lunare, ed intorno alle correzioni che il celebre Sejour vuole introdotte, dipendentemente da una irradiazione, e da una inflessione dei raggi luminosi nel passare vicino al globo lunare, nei semidiametri del Sole, e della Luna. Ma sfortunatamente le osservazioni fatte in questa circostanza non sembrano del tutto d' accordo per togliere ogni dubbio intorno a queste sottili e difficili quistioni. Nessuno, per quanto è a mia notizia, ha ripetuto la bella osservazione, alla quale il celebre Eulero nell' Ecclisse dell' anno 1748, che fu annulare in Berlino, si appoggiò per dimostrare l'esistenza dell'Atmosfera lunare. Il Sig. Prof. Amici in Modena con i suoi eccellenti Telescopii, e con un micrometro a separazione d' immagini di sua costruzione misurò, appena formato l' anello, i diametri del Sole, e della Luna ove era nato l' interno contatto, e li trovò perfettamente eguali a quelli ad essi perpendicolari; la qual cosa non avrebbe dovuto aver luogo qualora esistesse una inflessione dei raggi luminosi dipendente da un' Atmosfera lunare. (vedasi *Zach*

Correspondance Astronomique Genova vol. IV. pag. 281). Io, ed il Sig. Bertirossi-Busata mio Collega osservammo, prima che si formasse l'anello, la Luna circondata da una corona luminosa, la quale rimase anche dopo rotto l' anello per circa 10''. di tempo; durante l'Ecclisse annulare sembrava il globo opaco della Luna, come immerso in leggiero vapore, apparenze tutte, che furono da noi a primo aspetto prese per indizio dell' Atmosfera lunare. Nè solamente a Padova apparve la Luna circondata da questa luminosa corona prima e dopo la formazione dell' anello; ma a Firenze il Professore Inghirami, a Pistoja i Professori Mazzori, e Petrini, a Napoli il Prof. Brioschi, a Zurigo il Sig. Horner hanno osservato un simile fenomeno.

Non apparisce, che altri Astronomi abbiano fatto simili osservazioni che indurre possano il sospetto di un' Atmosfera lunare; e lo stesso Sig. Bouvard, il quale portossi a Fiume per osservare questo Ecclisse memorabile, nel suo ritorno a Parigi passando per Padova, mi comunicò di non avere osservato alcuna apparenza di luce, simile a quella da noi veduta.

Siccome la corona luminosa, di cui abbiamo parlato, potrebbe dipendere eziandio da un leggero difetto dei canocchiali, e sopratutto dell' Elioscopio, o forse anche da locali modificazioni della nostra Atmosfera, quindi è che dubbiosa rimarrebbe l' esistenza dell'Atmosfera lunare, se a quelle apparenze soltanto si volesse appoggiare, e perciò allo stato di una tale questione sembra, che l' Ecclisse attuale non abbia portato alcun reale cambiamento, e non altro prodotto che la rinnovazione delle discussioni in simili circostanze avvenute nel passato secolo, qualora per avventura qualche reale progresso non venisse a manifestarsi nell' esame delle osservazioni delle misure direttamente eseguite nei diametri solari, e lunari, le quali, per la somma precisione delle macchine astronomiche ai nostri giorni, saranno ben concludenti, e perciò tanto più è desiderabile, che vengano con gli originali dati publicate.

Intraprendendo il calcolo dell' osservazione da me fatta all' Osservatorio di Padova, ho voluto allo stesso modo discutere eziandio quelle fatte in molti altri luoghi per vedere, se dal loro complesso risultasse una qualche correzione ai diametri tavolari del Sole, e della Luna. Risulta dalle seguenti ricerche, che il diametro della Luna preso dalle tavole del Sig. Burkardt non abbisogna di sensibile correzione, mentre quello del Sole calcolato colle tavole del Sig. Carlini richiede una diminuzione di $3'',8$. Se pertanto si riflette alla precisione con cui quest' ultimo elemento sembra determinato in esse tavole, si può credere a buon diritto fondata la opinione del Sig. Sejour, il quale reputa il semidiametro del Sole dedotto dalle osservazioni maggiore del vero di circa $3''\frac{1}{2}$ per l' effetto di una irradiazione, come che sembra doversi rigettare l' altra diminuzione di $3''\frac{1}{2}$ da esso proposta per il semidiametro lunare dipendente da una inflessione da esso attribuita all' Atmosfera della Luna.

Prima di passare ad esporre le osservazioni, ed i loro risultati credo cosa opportuna (a maggiore chiarezza) di esporre le formule delle quali mi sono servito, rimandando per la loro dimostrazione al I. Volume dei miei elementi di Astronomia (*Padova* 1819. *dalla Tipogr. del Seminario*).

Sia per un qualunque contatto osservato la Longitudine vera della Luna calcolata colle tavole del Sig. Burkardt $= \lambda$
La sua latitudine vera, supposta boreale . . . . . $= \beta$
La differenza fra la paralasse orizzontale della Luna, e del Sole . . . . $= \varpi$
Il semidiametro orizzontale della Luna . . . . . . $= \delta$
La longitudine del Sole calcolata colle tavole del Sig. Carlini . . . . $= l$
Il suo semidiametro . . . . $= d$
L' AR del mezzo del Cielo . . . . $= \theta$
La latitudine diminuita dell' angolo della verticale . . $=$ L

L' obliquità dell' ecclittica l . . . . $= \varepsilon$
La longitudine corrisp. all'AR$=\theta$, ed alla decl. L . . $= g$
La corrispondente latitudine . . . . $= h$

Sarà primieramente θ dato dal tempo siderale ridotto in gradi; quindi g, h si calcoleranno mediante le seguenti equazioni

$$(1)\ \text{tang.}\, z = \text{sen.}\theta\ \text{cot.L}; \quad (2)\ \text{tang.}\, g. = \frac{\text{tang.}\theta\,\text{sen}\,(z+\varepsilon)}{\text{sen.}z}$$

$$(3)\ \text{tang.}\, h = \text{sen.g cot.}\,(z+\varepsilon)$$

e per riprova del calcolo, si farà uso dell' equazione

$$\cos.\, h\ \cos.\, g. = \cos.\ \text{L.}\ \cos.\theta.$$

Nella discussione delle seguenti osservazioni, ho calcolato le quantità g, ed h colle tavole a 5. cifre, tenendo conto soltanto dei decimi di minuto.

Se ora indichiamo la longitudine apparente della Luna per λ', la sua latitudine apparente (supposta boreale) per β' ed il semidiametro apparente, aumentato cioè a ragione dell' altezza sopra l'orizzonte per δ', avremo per determinare λ', β', δ' le seguenti equazioni

$$(4)\ \lambda' = \lambda + \frac{\varpi\cos h}{\cos\beta}.\ \text{sen}\,(\lambda - g) + \left(\frac{\varpi\cos h}{\cos\beta}\right)^2\ \frac{\text{sen.}2(\lambda - g)}{2}.\ \text{sen.}1''.$$

$$(5)\ s = \varpi.\text{sen}\ 1''\,(\text{sen}h.\ \text{sen}\beta + \cos h.\ \cos\beta\cos(\lambda - \text{g}))$$

$$(6)\ \beta' = \beta + \frac{s.\text{tang}.\beta}{\text{sen.}1''} - \frac{\varpi(1+s).\text{sen}h}{\cos\beta}$$

$$(7)\ \delta' = \delta(1+s)$$

Sia e la distanza apparente del centro della Luna dal centro del Sole calcolata dietro i precedenti elementi nell'istante del primo contatto. Avendo riguardo alla piccolezza dell' arco e, si potrà essa calcolare mediante l' equazione . . . . $e^2 = \beta'^2 + (\,l - \lambda'\,)^2.\ \cos^2\beta'$, la quale ponendo . . . . .

$$(\,8\,)\ .\ \text{tang}\,\phi = \frac{\beta'}{(l-\lambda')\cos\beta'}\text{, diviene}$$

$$(9)\ .\ .\ e = \frac{(l-\lambda')\cos\beta'}{\cos\phi} = \frac{\beta'}{\text{sen}\phi}.$$

Se le tavole fossero esatte, si avrebbe $e = d + \delta'$. Supponendo, che $d\lambda$, $d\beta$, dd, $d\delta$ siano le correzioni degli elementi

λ, β, d, δ e ponendo per brevità $dp = d(d+\delta)$, si formerà agevolmente la seguente equazione di condizione

$$d + \delta' - e = \text{sen}\varphi .\, d\beta - \cos\varphi .\, d\lambda - dp,$$

nella quale si suppone che la longitudine del Sole, e le paralassi siano bene determinate per non abbisognare di alcuna correzione. Che se la longitudine del Sole abbisognasse essa pure di una leggera correzione, dovrebbe riguardarsi $d\lambda$ come la correzione della differenza fra la longitudine della Luna, e quella del Sole. Del pari per l' ultimo contatto, ponendo $\text{tang}\varphi = \frac{\beta'}{\lambda' - l}$ si avrà... $d + \delta' - e = \text{sen}\varphi .\, d\beta + \cos\varphi .\, d\lambda - dp$.

Quei luoghi, nei quali l'Ecclisse fu annulare, se si osservarono i due contatti interni, somministrano due nuove equazioni di condizione, che si deducono dalle precedenti, cambiando semplicemente δ' in $-\delta'$. Ponendo pertanto... $dq = d(d-\delta)$ esse saranno della forma

$$d - \delta' - e = \text{sen}\varphi .\, d\beta \mp \cos\varphi .\, d\lambda - dq$$

valendo il segno $-$ per la formazione dell' anello, o secondo contatto; il segno $+$ per la rottura, o terzo contatto.

Dopo di aver calcolato per ogni buona osservazione i coefficienti delle indeterminate $d\beta$, $d\lambda$, dp, dq, si faranno concorrere tutte le equazioni che ne risultano nella loro determinazione adoperando il metodo dei minimi quadrati, indi dai valori ottenuti per dp, dq si dedurranno le correzioni dei semidiametri d, δ mediante le seguenti equazioni

$$dd = \frac{1}{2}\, dp + \frac{1}{2}\, dq \;:\; d\delta = \frac{1}{2}\, dp - \frac{1}{2}\, dq\,.$$

Nel calcolo delle seguenti osservazioni, ho assunto lo schiacciamento terrestre $= \frac{1}{330}$, il quale sebbene sia un poco minore delle recenti determinazioni $\left(\frac{1}{305}\right)$ del Sig. Laplace, pure mi sembra preferibile per il calcolo degli ecclissi ed occultazioni, in quanto che più si avvicina al rapporto degli assi dedotto dalle misure dei gradi all' Equatore e verso il Polo; del resto la differenza nel calcolo delle paralassi è trascurabile.

La longitudine dell' osservatorio di Padova all'Oriente di quello di Parigi si è posta = 38′ 10″, come risulta dalla discussione di molte occultazioni dai celebri miei predecessori, e da me osservate; nè saprei ben dire quali ragioni abbiano indotto i celebri Astronomi del Bureau delle longitudini di Francia a ridurla a 38′ 5″ negli ultimi volumi delle loro Effemeridi. (Conn. des Temps 1821 - 1822 - 1823).

Per ultimo, ad oggetto di facilitare i calcoli dei luoghi del Sole, e della Luna ho dedotto le seguenti posizioni dalle sopracitate tavole, che ho poi esteso con facili interpolazioni a tutti i contatti osservati.

Tem. med. in Padova	Longit. ver. ☽	Lat. bor. ☽	Longit. ver. di ☼
7. Settembre = 1^h. 50′	164°. 24.′ 38″,7	0°. 46.′ 46″, 0	164°. 45.′ 46″,7
1820. 2. 50	164. 54. 5, 1	44. 4, 5	164. 48. 18, 5
4. 30	165. 43. 11, 5	39 35, 2	164. 52. 15, 5

La paralasse, il semidiametro lunare, ed il semidiametro solare non variano sensibilmente durante l'ecclissi. Ho trovato la paral. Equat. della Luna = 53′ 53″, 0; il suo semidiametro orizzontale = 14′. 41″, 0; il semidiametro orizzontale del Sole = 15′ 54″, 7; la sua paralasse orizzontale = 8″, 6.

Ciò premesso, passo ad esporre il calcolo delle osservazioni.

OSSERVAZIONE DI PADOVA.

Il cielo, che alla mattina era torbido, e piovoso, poco prima di mezzogiorno serenò, e fu purissimo durante quasi tutto il tempo dell'ecclissi. Soltanto verso il fine cominciò di nuovo ad annuvolarsi, ed una densa nube impedì, che con precisione si potesse osservare il quarto contatto. Io osservai con un buon Cannocchiale di Dollond di $4\frac{1}{2}$, ed il Sig. Busata con un Cannocchiale di Fraunhofer di $2\frac{1}{2}$ dotato di molta chiarezza, e di un' ingrandimento di 60. Ambedue vedemmo la poco fa menzionata corona luminosa avanti la formazione dell' anello, e dopo la sua rottura. Gli instanti dei contatti furono i seguenti.

1.° contatto... 1^h. 36′. 20″, 6. T. med.... 12^h. 42′.21″, 6. Tem. sid.
2.° contatto.....3. 0. 57, 2 .... 14. 7. 12, 1.
3.° contatto.....3. 6. 14, 1 .... 14. 12. 29, 9.
4.° contatto.....4. 22. 40, 9±2″ .... 15. 29. 9. 3±2″.
Principio della descritta Aurora = 3^h 0′. 42″
Fine della medesima ..... = 3. 6. 24

Latitudine di Padova = 45.° 24′. 2″; però L = 45.° 13′, 6. Quindi si hanno i seguenti valori.

	1. Contatto	2. Contatto	3. Contatto	4. Contatto
$\theta =$	190°. 35′,4	211°.48′,0	213°. 7′,5	232°.17′,3
$g =$	166. 40, 6	185, 30,7	186. 48,2	207. 56. 0
$h =$	44. 38,8	53. 2.0	53. 33,4	60. 49. 0
$\lambda =$	164. 17. 56″,6	164. 59. 27″,7	165. 2. 3″,3	165. 39. 36″.0
$\beta =$	0. 47. 22, 7	0. 43. 35, 0	0. 43. 20, 7	0. 39. 54, 9
$l =$	164. 45. 13, 5	164 48. 40, 2	164. 48. 52, 2	164. 51. 57, 7
$\lambda' =$	164. 16. 21, 3	164. 48. 3, 0	164. 50. 8, 0	165. 21. 54. 0
$\beta' =$	0. 9. 46, 6	0. 0. 42, 9	0. 0. 10, 7	— 6. 58, 4
$d + \delta' =$	1846″,2	65″,8	66″,0	1840″,8
$e =$	1829, 3	56, 1	76, 7	1844, 5

$$0{,}3207 \cdot d\beta - 0{,}9472 \cdot d\lambda - dp = +16'',9$$
$$0{,}7643 \cdot d\beta - 0{,}6449 \cdot d\lambda - dq = +9{,}6$$
$$0{,}1394 \cdot d\beta + 0{,}9902 \cdot d\lambda - dq = -10{,}7$$
$$-0{,}2268 \cdot d\beta + 0{,}9739 \cdot d\lambda - dp = -3{,}7$$

(osservazione incerta)

OSSERVAZIONE DI MILANO.

In Milano l'ecclisse non fu anulare; il Chiaris. Sig. Ab. Cesaris mi comunicò le sue osservazioni, come segue, alle quali egli soggiunge essere dentro ristrettissimi limiti concordi quelle dei suoi colleghi.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Principio} = 1^h.22'.\ 7'',3 \\ \text{Fine} \quad = 4.\ 10.48,\ 5\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Tempo; quindi} \ldots = 12^h.28,'\ 8.''0 \\ \text{medio} \quad \ldots\ldots\ldots = 15.\ 17.\ 16.\ 7\end{array}\left.\right\}\begin{array}{l}\text{Tempo} \\ \text{sidereo}\end{array}$$

Longitudine dell' Osserv. di Milano = 10' 45'' all' occid. di Padova;

Latitudine = 45.° 28.' 0''; però L=45.° 17', 6. Quindi i seguenti risultati.

	Principio	Fine
$g=$	163°.42',8	204°.13',8
$h=$	43. 20, 0	59, 48, 6
$\lambda=$	164. 16. 14'', 4	165. 39. 2'', 5
$\beta=$	0. 47. 32, 1	0. 39. 57, 9
$l=$	164. 45. 5, 1	164. 51. 55, 0
$\lambda'=$	164. 16. 37, 4	165. 22. 7, 1
$\beta'=$	+ 10. 49, 9	− 6. 27, 2
$d+\delta'=$	1845, 8	1841, 2
$e=$	1827, 2	1852, 9

$$0,3557.\,d\beta - 0,9346.\,d\lambda - dp = +\,18'',6$$

$$-\,0,2090.\,d\beta + 0,9780.\,d\lambda - dp = -\,11,\ 7$$

OSSERVAZIONE DI BOLOGNA.

In Bologna l'ecclisse fu anulare, e venne osservato dai Signori Zach, Catturegli, e Capitano Smith. Le nubi impedirono l' osservazione del primo contatto interno; gli altri instanti furono dal Sig. Barone di Zach osservati come segue. (*Corresp. Astr.* IV. p. 181).

1. contatto..=$12^h.41'.32'',6$	Tempo...=$1^h.35'.31'',32$	Tempo
3. contatto..=14. 11. 16, 3	sidereo..=3. 5. 0, 32	medio
4. contatto..=15. 28. 44, 7	=4. 22. 16, 03	

L'osservatorio di Bologna è 2' 8'' all' occidente di Padova; la sua latitudine è =44°. 29'. 53''; quindi L=44°. 19', 5'

	1.° contatto	3.° contatto	4.° contatto
$g =$	167°.10',7	187°.19',5	208°.14',5
$h =$	48. 50, 4	52. 42, 0	60. 0, 6
$\lambda =$	164. 18. 35'', 3	165. 2. 29'', 8	165. 40. 26, 6
$\beta =$	0. 47. 19, 2	0. 43, 18, 4	0. 39. 50, 3
$l =$	164. 45. 16, 7	164. 48. 54, 2	164. 52. 1, 9
$\lambda' =$	164. 16. 38, 2	164. 50. 3, 5	165. 22. 11, 7
$\beta' =$	+ 10. 16, 4	+ 0. 37, 4	— 6. 40, 7
$d \pm \delta' =$	1845, 7	65, 8	1840, 9
$e =$	1825, 2	78, 8	1853, 8

$$0,3377 .\, d\beta - 0,9412 .\, d\lambda - dp = + 20'',5$$

$$0,4749 .\, d\beta + 0,8800 .\, d\lambda - dq = - 13,0$$

$$-0,2161 .\, d\beta + 0,9764 ,\, d\lambda - dp = - 12,9$$

OSSERVAZIONE DI FIRENZE.

Il Prof. Inghirami all'osservatorio delle Scuole Pie, 2' 28" all' occidente di quello di Padova osservò i seguenti contatti in tempo vero, dai quali poi deduconsi i corrispondenti in tempo medio, ed in tempo sidereo.

	Tempo vero	Tempo medio	Tempo sidereo
1. contatto interno	$3^h. 5'. 35''$	$3^h. 3'. 23'', 7$	$14^h. 9'. 39'',4$
2. contatto interno	3. 7. 18	3. 5. 6, 7	14. 11. 22, 5
2. contatto ester.	4. 26. 6	4. 23. 53, 6	15. 30. 22, 5

Latitudine dell' osservatorio di Firenze = 43°. 46'. 41"; L = 43°. 36', 4.

	2. contatto	3. contatto	4. contatto
$g =$	187°.35',2	188°. 0',7	209°.55',5
$h =$	51. 55, 6	52. 5, 8	59. 30, 0
$\lambda =$	165. 1. 32, 2	165. 2. 42, 2	165. 41. 24, 4
$\beta =$	0. 43. 21, 8	0. 43. 17, 1	0. 39. 45, 0
$l =$	164. 48. 51, 1	164. 48. 55, 3	164. 52. 6, 6
$\lambda' =$	164. 49. 3, 8	164. 49. 44, 2	165. 22. 17, 9
$\beta' =$	+ 1. 7, 7	+ 0. 57, 1	— 6. 31, 4
$d \pm \delta' =$	65, 7	65, 8	1840, 8
$e =$	68, 9	75, 2	1853, 1

$$0,9829 . d\beta + 0,1843 . d\lambda - dq = -3'',2$$
$$0,7595 . d\beta + 0,6504 . d\lambda - dq = -9,4$$
$$-0,2112 . d\beta + 0,9775 . d\lambda - dp = -12,3.$$

OSSERVAZIONI DI BOGENHAUSEN PRESSO MONACO.

Longitudine $= 1' 5''. 5$ all' occid. di Padova; latitudine $= 48.^\circ 8'. 45''$, però $L = 47.^\circ 58', 4$

Il Sig. Soldner per il cattivo tempo, non potè osservare che il primo contatto interno, il quale ebbe luogo a $2^h. 55'.33'',9$ di tempo vero. Quindi ottiensi il tempo medio $= 2^h. 53'.23'', 7$, il tempo sidereo $= 13^h. 59'. 36'', 9$; $g = 181^\circ.1',5$; $h = 54^\circ.31',3$; $\lambda = 164.^\circ 56', 16'', 7$. $\beta = 0.^\circ 43'. 51'', 4$; $l = 164.^\circ 48'. 23, 4$; $\lambda' = 164.^\circ 47'. 34'',4$; $\beta' = +10'', 1$; $d - \delta' = 65''. 9$; $e = 50'', 0$

$$0,2019.d\beta - 0,9794.d\lambda - dq = 15'', 9.$$

OSSERVAZIONE
DI S. FERNANDO NELL' ISOLA LEON.

Ivi l' ecclisse fu parziale, ed all' osservatorio della Marina ne fu osservato il principio, ed il fine dai Sig^i. Ortiz Canelas, e D. Giuseppe Ortiz-Cerquero. La longitudine dell' osservatorio è $= 1^h. 12'. 20''$ all' occid. di Padova; latitudine bor. $= 36^\circ. 27'. 45''$, donde $L = 36.^\circ 17', 8$.

$$\begin{array}{ll} \text{Principio} = 0^h.21'.55'',2 \\ \text{Fine} \quad\;\; = 3.\ 15.\ 19,\ 7 \end{array}\left\}\begin{array}{l} \text{Tempo} \ldots\ 11^h.27'.55'',8 \\ \text{medio} \;\; \ldots\ 14.\ 21,\ 48,\ 8 \end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Tempo}\\ \text{sidereo}\end{array}$$

	Principio	Fine
$g =$	$156^\circ.57',4$	$196^\circ.23'.5$
$h =$	29. 51, 9	46, 48, 9
$\lambda =$	164, 17. 1'',3	165. 42. 2'',6
$\lambda' =$	164°.23. 2, 4	165. 23. 6, 7
$\beta =$	0. 47. 28, 4	0. 39. 41, 5
$\beta' =$	0. 21. 2, 2	0. 0. 32, 3
$l =$	164. 45. 8, 4	164. 52. 9, 8
$d + \delta' =$	1847, 6	1843, 9
$e =$	1830, 7	1857, 9

$$0,6895.\ d\beta - 0,\ 7243.\ d\lambda - dp = 16'',9$$
$$0,0174.\ d\beta + 0,\ 9998.\ d\lambda - dp = -13.\ 3.$$

OSSERVAZIONE FATTA IN NAPOLI

All' osservatorio nuovo del Miradois dal Sig. Brioschi. Longitudine $=9'.34''$ all' oriente di Padova; latitudine $=40^\circ.51'.\ 48''$, quindi $L=40^\circ.\ 41',5$.

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \text{contatto} = 1^h.58'.39'',0 \\ 2.\ \text{contatto} = 3.\ 23.\ 37,\ 0 \\ 3.\ \text{contatto} = 3.\ 27.\ 20,\ 7 \\ 4.\ \text{contatto} = 4.\ 43.\ 25,\ 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Tempo}\ldots = 13^h.\ 4'.41'',8 \\ \text{medio}\qquad\quad 14.\ 29.\ 53,\ 7 \\ \qquad\qquad\quad\;\; 14.\ 33.\ 38,\ 1 \\ \qquad\qquad\quad\;\; 15.\ 49.\ 54,\ 8 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\2\\3\\4\end{array}}\right\} \begin{array}{l}\text{Tempo}\\ \text{sidereo}\end{array}$$

Avanti la formazione dell' Anello apparve un tenuissimo filetto luminoso a $3^h.\ 23'.\ 23''$, ed uno simile ne rimase dopo la rottura, che sparì a $3^h.\ 27'.\ 39''\pm$.

Per gli instanti dei sopradescritti contatti si formeranno i seguenti valori.

	1. contatto	2. contatto	3. contatto	4. contatto
$g=$	174°.49'0	195°.12',2	196°.11'.2	218°.48',3
$h=$	43. 0, 6	52. 25, 2	51. 46, 9	58. 30, 0
$\lambda=$	164. 24. 11'',7	165. 5. 53'', 8	165. 7. 43'',5	165. 45. 4'',9
$\beta=$	0. 46. 41, 5	0. 42. 59, 8	0. 42. 49, 7	0. 39. 24, 8
$l=$	164. 45. 44, 5	164. 49. 10, 9	164. 49. 20, 0	164. 52. 24, 9
$\lambda'=$	164. 17, 1, 2	164. 48. 57, 9	164. 50. 27, 0	165. 22. 34, 9
$\beta'=$	0. 10. 18, 2	0. 1. 2, 6	0. 0. 39, 3	— 6. 22, 4
$d\pm\delta'=$	1845, 7	66, 1	66, 3	1840, 2
$e=$	1830, 8	63, 9	77, 7	1849, 9

$$0{,}3377.\,d\beta - 0{,}\,9413.\,d\lambda - dp = +\ 14'',9$$

$$0{,}9791.\,d\beta - 0{,}\,2033.\,d\lambda - dq = +\ \ 2,\ 2$$

$$0{,}5060.\,d\beta + 0{,}\,8626.\,d\lambda - dq = -\ 11,\ 4$$

$$-\ 0{,}2067.\,d\beta + 0{,}\,9784.\,d\lambda - dp = -\ \ 9,\ 7$$

OSSERVAZIONE

FATTA IN ZURIGO DAI SIGG. FEER, ED HORNER.

Latit. Bor. = 47°. 22'. 27"; quindi L=47°. 11',0. Longit. all' occid. di Padova = 13'. 20".

Quest' osservazione, del pari che le altre, è riferita dal Sig. Barone di Zach nella sua corrispondenza Astronomica (V. IV. pag. 406.). Ho ritenuto il medio degli instanti osservati dai signori Feer, ed Horner, correggendo un leggero errore di 5" incorso nella riduzione del tempo sidereo al tempo medio nella formazione dell' anello osservata da M. Feer, il quale deve essere (secondo i miei risultati) 2^h. 42'. 15", 35. in luogo di 2^h. 42', 10", 35.

	Tempo medio	Tempo sidereo
1. contatto	= 1^h.14'.58",8	= 12^h.50'.58",4
2. contatto	= 2. 42. 9, 7	= 13. 48. 23, 7
3. contatto	= 2. 43. 45, 9	= 13. 50. 0, 1
4. contatto	= 4. 3. 42, 5	= 15. 10, 10, 0

	1. contatto	2. contatto	3. contatto	4. contatto
$g =$	160°.50',6	179°.13',9	179°.36',1	200°. 5',8
$h =$	44. 14, 1	52. 45, 9	52. 55, 5	60. 45, 3
$\lambda =$	164. 14. 0",2	164. 56. 46",9	164. 57. 34",2	165. 36. 49",7
$\beta =$	0. 47. 44, 4	0. 43. 49, 8	0. 43. 45, 4	0. 40. 10, 1
$l =$	164. 45. 46, 7	164. 48. 25, 8	164. 48. 29, 8	164. 51. 44, 0
$\lambda' =$	164. 16. 18, 0	164. 48. 42, 0	164. 49. 19, 2	165. 21. 53, 8
$\beta' =$	0. 10. 25, 9	0. 1. 7, 8	0. 0. 57, 7	— 0. 6 41, 5
$d+\delta' =$	1845, 7	65, 5	65, 5	1842, 4
$\epsilon =$	1826, 4	69, 7	76, 0	1853, 9

$$\begin{aligned}
0,3427.\,d\beta - 0,9394.\,d\lambda - dp &= 19'',3\\
0,9726.\,d\beta + 0,2324.\,d\lambda - dq &= -\ 4,2\\
0,7596.\,d\beta + 0,6503.\,d\lambda - dq &= -\ 10,5\\
-\ 0,2166.\,d\beta + 0,9763.\,d\lambda - dp &= -\ 11,5.
\end{aligned}$$

OSSERVAZIONE FATTA IN GOTTINGA

dai Signori Gauss. Harding, Struwa, Walbeck.

Longitudine di quell' osservatorio = $7'.44''$ all' Occidente di Padova. Sua latitudine boreale = $51.^{\circ}\ 31'.\ 56''$; però $L = 51.^{\circ}\ 21',8$.

Le osservazioni originali trovansi nella citata corrispondenza del Sig. Zach (pag. 406); di esse prendendo il medio ne' rispettivi contatti si ha

	Tempo Sidereo	Tempo medio
2.° contatto	$= 13^h.44'.23'',0$	$= 2^h.38',10'',5$
3. contatto	$= 13.\ 49.\ 30,0$	$2.\ 43.\ 16,7$
4. contatto	$= 15.\ 7.\ 10,5$	$4.\ 0.\ 44,5$

Quindi si ottengono i seguenti risultati.

	2.° contatto	3.° contatto	4.° contatto
$g =$	$173^{\circ}.59',0$	$175^{\circ}.\ 5',8$	$193^{\circ}.59',0$
$h =$	55. 40, 5	56. 11, 1	63. 51, 7
$\lambda =$	164. 52. 4", 6	164. 54. 34", 9	165. 32. 37", 4
$\beta =$	0. 44. 15, 5	0, 44. 1, 8	0. 40. 32, 1
$l =$	164. 48. 2, 6	164. 48. 14, 9	164. 51. 23, 2
$\lambda' =$	164. 47. 14, 6	164. 49. 15, 4	165. 21. 18, 1
$\beta' =$	— 0. 2, 5	— 0. 32, 5	— 7. 29, 7
$d \pm \delta' =$	65, 9	66, 1	1841, 2
$e =$	48, 1	68, 7	1850, 5.

$$-0,0521.\,d\beta - 0,9986.\,d\lambda - dq = +17'',8$$
$$-0,4732.\,d\beta + 0,8809.\,d\lambda - dq = -\ 2,6$$
$$-0,2430.\,d\beta + 0,9700.\,d\lambda - dp = -\ 9,3.$$

OSSERVAZIONE FATTA IN BREMA

dai Sigg. Olbers, e Gildemeister (Corr. Astr. IV. p. 407.)

Longitudine all' occidente di Padova = 12′ 18″. Lat. bor. = 53°. 4′. 38″. L = 52°. 54′, 6.

Preso il medio delle osservazioni dei chiarissimi nominati Astronomi, che nel loro stato originali trovansi nella citata corrispondenza, si ottiene

$$\left.\begin{array}{l} 2.^{\circ}\text{contatto} = 2^h.29'.25'',0 \\ 3.\ \text{contatto} = 2.\ 34.\ 41,\ 0 \\ 4.\ \text{contatto} = 3.\ 52.\ 13,\ 5 \end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{Tempo} \\ \text{Medio} \\ \ \end{array}\begin{array}{l} ..= 13^h.35'.36'',2 \\ \ \ = 13.\ 40.\ 53,\ 1 \\ \ \ = 14.\ 58.\ 38,\ 2 \end{array}\left.\right\}\begin{array}{l}\text{Tempo} \\ \text{Sidereo}\end{array}$$

	2.° contatto	3.° contatto	4.° contatto
Quindi $g =$	170°.22′,5	171°.28′.0	189°.25′4
$h =$	55. 59, 9	56. 31. 0	64. 13, 6
$\lambda =$	164. 50. 1″, 2	164. 52. 36″, 3	165. 30. 41″, 0
$\beta =$	0. 44. 26, 8	0. 44. 12, 6	0. 40. 43, 7
$l =$	164. 47. 52. 4	164. 48. 5, 2	164. 51. 13, 7
$\lambda' =$	164. 47. 6, 2	164. 49. 10, 8	165. 21. 10, 2
$\beta' =$	— 0. 1, 9	— 0. 32. 0	— 7. 37. 5
$d \pm \delta' =$	65, 7	66, 0	1841, 3
$e =$	46, 2	73, 0	1853, 8

$$-0,0411.\,d\beta - 0,9991.\,d\lambda - dq = +19'',5$$
$$-0,4384.\,d\beta + 0,8990.\,d\lambda - dq = -\ 7,0$$
$$-0,2468.\,d\beta + 0,9691.\,d\lambda - dp = -\ 12,5.$$

OSSERVAZIONE DI MANNHEIM

(*Corr. Astr. IV. pag.* 407.)

All' Osservatorio situato sotto la latitudine di 49°. 29′. 14″. ed in una longitudine = 13′ 38″ all' occid. di Padova, il Sig. Nicolai osservò il secondo, terzo, e quarto contatto; il primo essendo stato tolto dalle nubi. Inoltre il Sig. Heligenstein osservò le stesse fasi sotto la latitudine di 49°. 29′. 21″. e la longitudine di 13′ 36″. Per il calcolo di queste osservazioni nel loro originale esistenti alla citata pagina ho preso il medio sì delle posizioni geografiche dei due luoghi, invero molto fra loro vicini, come anche dei tempi osservati. Ponendo pertanto L=49°. 19′,0 ottengo i seguenti risultati.

	2.° contatto	3.° contatto	4.° contatto
Tempo medio =	2^h. 35′. 26″,5	2^h 40′ 21″,6	3.^{h}38′. 37″, 2
Tempo Sider. =	13. 41. 39, 4	13. 46 35, 3	15. 5. 3, 8
$g =$	175°.35′,9	176°.40′,9	226°.16′,0
$h =$	53. 48, 4	54. 17, 8	62. 1, 6
$\lambda =$	164. 53. 37″,4	164. 56. 2″,2	165. 34. 28″,1
$\beta =$	0 44. 7, 0	0. 43. 53, 8	0. 40. 23, 0
$l =$	164. 48, 10, 2	164. 48. 22, 2	164. 51. 32, 3
$\lambda' =$	164. 47. 41, 1	164. 49. 36, 6	165. 21. 36, 2
$\beta' =$	+ 0. 49. 6	− 0. 40, 0	− 7. 2, 6
$d \pm \delta' =$	65, 6	65, 7	1841, 4
$e =$	57, 5	75, 6	1852, 8

$$0{,}8625.\,d\beta - 0{,}5060.\,d\lambda - dq = + \;8'',1$$

$$-\,0{,}5288.\,d\beta + 0{,}8487.\,d\lambda - dq = - \;9,\,9$$

$$-\,0{,}2281,\,d\beta + 0{,}9737.\,d\lambda - dp = - \;11,\,4.$$

Oltre le osservazioni fin'ora descritte ne ho richiamato a calcolo alcune altre fatte in luoghi ben conosciuti quanto alla loro posizione geografica, ed in seguito ho creduto bene di abbandonarle, come poco d'accordo fra loro e con le altre. Così quella fatta all'osservatorio di Parigi, nella quale havvi una manifesta contradizione fra i tempi espressi in tempo siderale, ed in tempo medio, e quella di Madrid in cui il tempo del principio è già notato, come incerto, ed il fine, quantunque sia indicato come buona osservazione, sembra includere l'errore di 1'; e già lo stesso Sig. Capitano Bauzà nel V. vol. della Corrispondenza Astronomica avvisa di questo errore, e sebbene a pag. 250. il Sig. Barone di Zach produca una nuova riduzione delle osservazioni, non sono questi nuovi dati più soddisfacenti dei primi, dai quali differiscono di pochi secondi. In simil guisa non ho tenuto conto delle osservazioni fatte a Bergen in Norvegia dal Sig. Prof. Bohr, ed a Fiume nell' Illirio dal Sig. Bouvard per non introdurre nella determinazione di dp, e di dq che quelle che appartengono a luoghi ben conosciuti, e non presentano Anomalie. Quanto a quella di Bergen, mi sembrò un poco anomala, come si vedrà quì sotto, e quanto a quella di Fiume, sebbene questa Città sembri bene determinata dietro le osservazioni del Sig. Bogdanich Professore di Astronomia a Buda, non ostante ho creduto bene differire fino a che il Sig. Bouvard abbia publicate le proprie ricerche sulla longitudine, e latitudine del luogo, ove ha instituito le osservazioni di questo ecclisse.

Riunendo pertanto tutte le precedenti equazioni di condizione, e trascurando quella di Padova relativa al quarto contatto, che dipende da un'osservazione dubbia, se si trattino col metodo dei minimi quadrati si formano le seguenti

$$\begin{array}{rrrrl}
8{,}0412.d\beta - & 3{,}9138.d\alpha - & 0{,}6239.dp - & 5{,}8691.dq & = + 54'',02 \\
-3{,}9138.d\beta + & 22{,}9384.d\alpha - & 3{,}3712.dp - & 2{,}7475.dq & = - 327,\ 33 \\
0{,}6239.d\beta + & 3{,}3712.d\alpha - & 15.dp & & = + 2,\ 60 \\
5{,}8691.d\beta + & 2{,}7475.d\alpha - & 16\ dq & & = - 8,\ 70
\end{array}$$

dalla risoluzione delle quali trovo

$$d\beta=-4'',08;\quad da=-16'',00;\quad dp=-3'',94;\quad dq=-3'',71.$$

Per ultimo i valori di dp, dq danno $d\delta=-0'',125$; $dd=-3'',825$. Sostituendo ora nelle equazioni di condizioni le trovate correzioni e fingendo trasportato nel primo membro il termine tutto assoluto, affinchè rimanga lo zero nel secondo, il primo membro porge per ogni osservazione i seguenti errori.

Padova . . .	+ 0″,88
	+ 1,31
	− 2,00
Milano . .	− 1″,15
	+ 0,84
Bologna . .	− 2,85
	+ 0,69
	+ 2,10
Firenze . .	− 0,04
	− 0,39
	+ 1,46
Monaco . .	+ 2,70
S. Fernando	− 4,20
	+ 1,17
Napoli . . .	+ 2″,72
	+ 0,77
	− 0,74
	− 1,17
Zurigo . . .	− 1,74
	− 0,47
	+ 0,71
	+ 0,70
Gottinga . .	+ 2,00
	− 5,86
	− 1,29
Brema . . .	+ 0,35
	− 1,78
	+ 1,94
Mannheim	+ 0,29
	+ 2,22
	+ 0,69

Se ai luoghi della Luna calcolati colle tavole si applicano i trovati errori $d\lambda$, e $d\beta$, e si confrontano quindi con quelli del Sole, con facile proporzione si ottiene l' istante del novilunio il quale secondo i miei risultati ha avuto luogo a

$2^h.\ 37'.\ 32'',9$ di tempo medio in Padova, essendo le longitudini vere della Luna, e del Sole $= 164^\circ.\ 47'.\ 42'',4$; e la latitudine vera della Luna $= 44'.\ 33'',9$ bor.

I precedenti risultati sono un poco diversi, da quelli che comunicai già al Chiarissimo Sig. Barone di Zach, i quali fondavansi sulle osservazioni di Padova, Milano, Bologna, Firenze, e S. Fernando, e di più includevano l'osservazione del quarto contatto in Padova, che ora ho creduto bene di abbandonare. Trovai in allora $d\beta = -0'',05$; $d\lambda = -13'',15$; $d\delta = +1'',39$ $dd = -0'',18$; il novilunio a $2^h.37'.25'',9$; la longitudine vera della Luna, e del Sole $= 167^\circ.\ 47'.\ 41'',9$, la sua latitudine $= 0^\circ.44'37'',8$. Il Sig. Walbeck Direttore dell'Osservatorio Imperiale novellamente eretto in Abo in Finlandia trova $-2'',38$ per la correzione del semidiametro Solare dato dalle tavole del Sig. Carlini, $+1'',74$ per quello della Luna dietro le tavole del Sig. Burkardt, appoggiandosi alle osservazioni di Gottinga, di Brema, di Cuxhaven, di Coppenaghen, di Nienstadt, di Amburgo, e di Mannheim. (*vedasi la Corrisp. del Sig. Zach. vol. IV. pag.* 499.)

Si può concludere da tutto ciò, che molto probabilmente deve diminuirsi il semidiametro solare di circa $3''\frac{1}{2}$, e che siccome abbiamo fino dal principio avvertito, questa quantità sia dovuta ad un' ottica irradiazione in virtù della quale misurandolo con i consueti micrometri, siamo portati a giudicarlo più grande del vero.

Termineremo col riferire le osservazioni di Bergen, e di Fiume e nelle loro equazioni di condizione introdurremo una nuova indeterminata per rappresentare la correzione della longitudine geografica ad essi corrispondente. Rappresentando per τ la correzione espressa in minuti di tempo della longitudine, e valutandola positiva quando il luogo viene trasportato più all'occidente, negativa nel senso contrario: le equazioni di condizione (ritenendo le superiori denominazioni) diverranno di questa forma

$$d\pm\delta' - e = \text{sen.}\phi\, d\beta \mp \cos.\phi\, d\lambda + (n\,\text{sen.}\phi \mp m.\cos.\phi).\tau$$

ove nel primo membro il segno superiore vale per il primo, e quarto contatto, nel secondo membro il segno superiore si adopera se $\lambda' < l$; l' inferiore quando $\lambda' > l$.

OSSERVAZIONE DI BERGEN

In Norvegia alla Latitudine 60°. 23'. 40", ed alla longitudine 26'. 8" all' occidente di Padova. Sarà perciò L=60°. 14', 7.

	1.° contatto	2.° contatto	3.° contatto	4.° contatto
Tempo vero =	0^h. 39'. 52",2	2^h. 1', 3",9	2^h. 5', 4",8	3^h. 22', 37",9
Temp. Med. =	0. 37. 42, 7	1, 58. 53, 2	2. 2. 54, 0	3. 20, 26, 1
Tem. Sider. =	11. 43. 36, 7	13. 5. 0, 5	13. 9. 2, 0	14. 26. 46, 8
g =	142°.37',1	155°.23',2	156°.2',2	169°.30',8
h =	51. 28, 0	58. 23, 6	58. 45,5	66. 7, 7
λ =	164. 1. 59",9	164. 41. 49",7	164. 43. 47",8	165. 21. 51",7
β =	0. 48. 50, 2	0. 45, 11, 7	0. 45. 0, 9	0. 41. 32, 4
l =	164. 43. 54. 5	164. 47. 11, 8	164. 47. 21, 5	164. 50. 30, 1
λ' =	164. 14. 18, 2	164. 46. 24, 6	164. 48. 1, 9	165. 20. 22, 6
β' =	+ 6. 57, 9	− 0. 27, 7	− 0. 49, 5	− 7. 31, 7
$d\pm\delta'$ =	1843, 8	66, 4	66, 5	1840, 9
e =	1824, 8	54, 7	63, 9	1848, 6

$$\begin{aligned}
0{,}2290.d\beta - 0{,}9734.d\lambda - dp - 26'',91.\tau &= +19'',0\\
-0{,}5061.d\beta - 0{,}8622.d\lambda - dq - 21{,}\ 93.\tau &= +11{,}\ 7\\
-0{,}7747.d\beta + 0{,}6323.d\lambda - dq + 19{,}\ 08.\tau &= +\ 2{,}\ 6\\
-0{,}2444.d\beta + 0{,}9696.d\lambda - dp + 26{,}\ 87.\tau &= -\ 7{,}\ 7.
\end{aligned}$$

Sostituendo per $d\beta$, $d\lambda$, dp, dq i loro valori, si ottengono per τ i seguenti risultati

$$\tau = -0'',9 \ldots + 21'',5 \ldots + 16'',5 \ldots + 6'',4.$$

Trascurando il primo valore, il medio degli ultimi tre è $= +14'',8$; però la differenza delle longitudini fra Padova, e

Bergen sarà = 26′. 23″ all' occidente, e la sua longitudine rapporto a Parigi = 11′. 47″. Del rimanente non si vuole trascurare di osservare che le longitudini ricavate dagli ecclissi di Sole rimangono sempre un poco indecise, per la difficoltà di bene osservare questi fenomeni.

OSSERVAZIONE DI FIUME.

Longitudine = 10′. 10″, all'Oriente di Padova; latitudine 45°. 20′. 10″, e quindi L=45°. 9′,7.

	2.° contatto	3.° contatto	4.° contatto
Tempo medio =	$3^h.13'.31'',2$	$3^h.18'.45'',2$	$4.^h\ 34'.\ 8'',0$
Tempo sider. =	14. 19. 46, 6	14. 25. 1, 9	15. 40. 36, 8
$g =$	188°.40′,2	188°.59′,5	211°.39′,8
$h =$	54. 13, 2	54. 41, 1	61. 44, 8
$\lambda =$	165. 0. 38″,5	165. 3. 13″,6	165. 40. 23″,8
$\beta =$	0. 43. 28, 0	0. 43. 14, 4	0. 39. 51, 5
$l =$	164. 48. 45, 0	164. 48. 57, 7	164, 52. 0. 9
$\lambda' =$	164. 47. 56, 8	164. 50. 3, 5	165. 22. 2. 0
$\beta' =$	— 0. 3, 6	— 0. 34, 8	— 7. 27, 1
$d \pm \delta' =$	66, 2	66, 4	1840, 4
$e =$	48, 4	75, 0	1855, 8

$$-0{,}0807.d\beta - 0{,}9967.d\lambda - dq - 26'',72.\tau = +17'',8$$
$$-0{,}4653.d\beta + 0{,}8857.d\lambda - dq + 25,\ 18.\tau = -\ 8,\ 6$$
$$-0{,}2409.d\beta + 0{,}9705.d\lambda - dp + 26,\ 87.\tau = -15,\ 4.$$

Se si sostituiscono in queste equazioni i valori di $d\beta$, $d\lambda$, dp, dq, e si ricavano i valori di τ, si otterranno li seguenti risultati.

$$\tau = -5'',0\ \ldots + 0'',0\ \ldots - 10'',7$$

il medio dei quali è = — 5″,2. Quindi (dietro questa osservazione) sarebbe Fiume 10′ 15″, 2 all' oriente di Padova, ovvero 48′. 25″, 2 all' oriente di Parigi.

Ponendo $\tau=0$, gli errori di queste equazioni mediante i valori superiori di $d\beta$, $d\lambda$, dp, dq sarebbero dello stesso ordine di quelli sopra riferiti, cioè $+2'',19$; $-0'',17$; $+4'',78$ donde apparisce, che questa osservazione avrebbe potuto ritenersi utilmente fra le altre per la ricerca delle indicate quantità.

NUOVO METODO

PER MISURARE LA VELOCITÀ DELLE ACQUE CHE SCORRONO PE' FIUMI

OSSIA

DELLA SQUADRA REOMETRICA

MEMORIA

DEL SIG. GEMINIANO POLETTI.

Ricevuta adì 19. *Giugno* 1820.

PRESENTATA

DAL SOCIO SIG. CONTE GIOVANNI PARADISI

APPROVATA

DAL SOCIO SIG. PROFESSOR BORDONI

Per servire all' ordine e alla chiarezza dividerò questa Memoria in quattro capitoli.

Nel primo si sottoporranno ad esame le dottrine degli strumenti idrometrici inventati negli ultimi tempi, e per ciò con ogni probabilità i meno difettosi: come altresì si mostrerà il principio che io estimo dover eleggere a base di una nuova macchina, colla quale poter parimenti misurare le acque correnti pe' fiumi.

Nel secondo si descriverà essa macchina, e se ne dichiarerà la teorica. Con che si avrà il metodo per determinare la velocità in qualsiasi punto di una corrente; e di quì la portata di un fiume o canale.

Nel terzo si esporranno alcune altre ricerche sulla vera legge o scala delle velocità, e si accennerà un metodó agevole e spedito col quale si potrebbe rilevare la velocità media nella verticale di una corrente, tutta volta che si procedesse più oltre in quella parte della Idraulica, che riguarda la resistenza de' fluidi.

E nell' ultimo capitolo si dirà di alcune avvertenze circa sì al maneggio come alla costruzione della nuova macchina.

CAPITOLO I.

Esame dei principali Strumenti idrometrici.

§ 1.

La misura della velocità delle acque correnti è una ricerca importantissima nell' Architettura idraulica, e nel medesimo tempo intricata e difficile. Ricavarla da una teorica sopra il movimento delle acque pe' fiumi, se non è impresa impossibile, almeno è oltremodo ardua: sì perchè troppo varii sono gli elementi di essa teorica: sì perchè ve ne sono alcuni che nello stato presente dell' Idraulica non si possono avere per saldi e inconcussi, ed alcuni altri che non si saprebbero sottoporre a calcolo, senza ricorrere ad ipotesi da non ammettersi, per la mancanza dei fatti naturali che ad esse dieno alcun grado di probabilità. Per le quali ragioni i Geometri già si avvisarono di abbandonare quel metodo di rintracciare la misura della velocità delle acque correnti, e si rivolsero ad ideare strumenti col mezzo dei quali si potesse all' uopo determinarla, che nominarono idrometrici.

§ 2.

La dottrina degl' istrumenti idrometrici è riposta sopra quella della resistenza de' fluidi. Il perchè, se la prima traesi dove l' ultima non è confermata dalla sperienza, e per ciò tuttavia incerta, non vi potremo prestare assai fiducia. Onde stimasi dovere primamente dire: quali siano le parti della resistenza de' fluidi, che si possono tenere per incontrastabili, e quali sieno quelle, che non si deggiono seguire per non accordarsi in tutto coll' esperienza. Conciossiachè in siffatta guisa procedendo, ci sarà dato di scuoprire le eccezioni che soffrono i principali strumenti idrometrici, non che il principio sovra cui formare una nuova macchinetta, colla quale pure misurare la velocità delle acque correnti pe' fiumi.

§ 3.

Nella resistenza de' fluidi si distinguono i due seguenti casi.

1.° Che un solido immobile sia urtato da una corrente:

2.° Che il solido si muova dentro un fluido in moto; perchè quando il fluido fosse in quiete provasi che la resistenza pareggia quella del primo caso.

L' urto poi contra il solido in ciascuno dei due distinti casi può essere sì diretto come obbliquo.

§ 4.

Molti sperimenti abbiamo sulla resistenza de' fluidi fatti in diversi tempi e modi dai celebri geometri D' Alembert, Condorcet, Bossut (1), Ximenes (2), i quali ci rendono fuori di dubbio i seguenti risultati.

Opposto ad una corrente un solido immobile, la forza dell' urto diretto, e per conseguente la resistenza è proporzionale al quadrato della velocità del fluido, e la forza dell' urto obbliquo segue bensì la ragione dupplicata della velocità della corrente, ma non componesi con quella della dupplicata o della semplice dei seni d' incidenza.

---

(1) *Nouv. Experiences sur la resistance des fluides.* Paris, 1777.

Bossut, V. *Mémoires de l'Accad. des Scien.* an. 1778.

(2) *Nuove Sperienze Idrauliche.* Siena, 1780.

Quindi la sperienza conferma la legge di quella parte della nota teoria Newtoniana che riguarda l' urto diretto: e non si accorda con l'altra concernente l'urto obbliquo, almeno per gli angoli d' incidenza minori di 60 gradi; stantechè per gli altri angoli maggiori l'abberrazione è assai picciola.

§ 5.

Quanto alla vera legge dell' urto de' fluidi contra mobili ostacoli sono tuttavia discordi gl' Idraulici. Imperciocchè se una corrente percuote perpendicolarmente un solido moventesi nella stessa direzione, e con velocità minore di quella del fluido urtante, molti apprezzano la forza dell' urto, o resistenza, proporzionale al quadrato della differenza delle velocità che appartengono al fluido e al solido. Che se il fluido e il solido si muovano l' uno contra l' altro, stimasi la resistenza proporzionale al quadrato della somma di esse velocità. Cosicchè chiamata v la velocità del fluido, u quella del solido, nel primo caso la resistenza si ritiene proporzionale a $(v-u)^2$, e nel secondo a $(v+u)^2$.

Ma certuni si attengono al principio del professore Avanzini. Egli sostiene (1) con varii argomenti e con l'esperienza: che la forza dell' urto diretto di un fluido contro ad un solido mobile, nel primo dei due distinti casi, debba essere proporzionale alla differenza de' quadrati delle velocità, che spettano al fluido e al solido; vale a dire a v^2-u^2: e che la resistenza nel secondo caso sia proporzionale alla somma de' quadrati di esse velocità; cioè a v^2+u^2.

---

(1) *Appendice alle nuove ricerche dirette a rettificare la teorìa della resistenza de' fluidi e le sue applicazioni.* Padova, 1811.

Memoria della vera legge dell' urto de' fluidi contra ostacoli mobili. Padova, 1811.

Supplemento all' or ora citata Memoria. Padova, 1813.

§ 6.

Ciò rammentato, passiamo ad esaminare quegli strumenti idrometrici che sono giudicati li più acconci a trovare la velocità delle acque correnti, giacchè intorno ai molti altri ideati il sul. Ximenes (1), il benemerito Bonati (2), e l' illustre Venturoli (3) mostrarono la poca o niuna confidenza che vi si può prestare; talchè omai sono disusati.

§ 7.

Cominciamo dunque a considerare l'*Asta ritrometrica* (4). Questo strumento consiste in una canna cilindrica AB (*Fig.* 1.) che si lascia in balìa della corrente in un tratto regolare di fiume, e se ne osserva l' angolo di declinazione dalla verticale, e la sua velocità.

Chiamata poi $2a$ la lunghezza di quella porzione CB dell' asta che rimane immersa nell' acqua, b la lunghezza CG di quel tratto che si estende dal pelo d' acqua sino al centro di gravità G, ω la declinazione dall' asta dal perpendicolo, v la velocità della corrente in un punto M rispondente all' altezza verticale $\frac{x}{\cos\omega}$, essendo $CM = x$, c la velocità dell' asta: ed inoltre detto P il suo peso, e λ un coefficiente costante dato dalle sperienze sulla resistenza de' fluidi; trova il Bonati nella citata Memoria, che il moto uniforme, e il parallelismo del suo strumento danno,

$$(\Delta)\quad \left\{\begin{aligned} &\int(v-c)^2dx = \int(c-v)^2dx,\\ &\mathrm{P}b\sin. + \lambda\int(v-c)^2xdx = \mathrm{P}a\sin.\omega + \lambda\int(c-v)^2xdx. \end{aligned}\right.$$

---

(1) *Dissertazione Meccanica sopra gl' istrumenti per determinare la velocità delle acque e dei venti.* Firenze, 1752.

(2) V. *Mem. della Società Italiana*, Tom. II. Part. II. pag. 676.

(3) *Elementi di Meccanica e d'Idraulica* Tom. II. Milano, 1818.

(4) Invenzione di Bonati, V. *Mem. della Soc. Ital.* Tom. cit.

Queste equazioni si ritraggono dall' equilibrio delle forze che agiscono sull' asta, e dall' equilibrio de' loro momenti. Tali forze sono: il peso del cilindro: la spinta verticale dell'acqua: e la forza dell'urto, o resistenza. Sul valore delle due prime non ho che apporre. Ma quanto alla valutazione della terza vuolsi osservare che appartiene al secondo caso del § 3, e all'urto obbliquo. Per la qual cosa non si può affermare che la forza dell' urto sia proporzionale per un tratto dell'asta alla quantità $(v-c)^2\cos.\omega^2$, e pel rimanente alla $(c-v)^2\cos.\omega^2$: anzichè proporzionale alle espressioni $(v^2-c^2)\cos.\omega^2$, $(c^2-v^2)\cos.\omega^2$ (§ 5.); nella quale supposizione, seguendo il ragionamento che si fa per determinare le equazioni (Δ), si trova

$$(\Delta')\left\{\begin{aligned}&\int(v^2-c^2)\,dx=\int(c^2-v^2)\,dx\,,\\&\mathrm{P}b\sin.\omega+\lambda\int(v^2-c^2)x\,dx=\mathrm{P}a\sin.\omega+\lambda\int(c^2-v^2)x\,dx.\end{aligned}\right.$$

E poichè queste equazioni differiscono dalle (Δ); per conseguente i risultati che daranno le une, non si accorderanno, salvo forse alcuni casi particolari, con quelli ottenuti dalle altre (*). Questa sola considerazione ci mostra l' im-

---

(*) A mostrare la diversità tra i risultati che danno le equazioni (Δ) e le altre (Δ'), valga il seguente esempio. Supponghasi rappresentata la scala delle velocità da una linea retta, che abbia per equazione $u=\mathrm{V}-fx$, V essendo la velocità superficiale dell' acqua, f un coefficiente costante. In questa ipotesi la prima delle equazioni (Δ) ci manifesta, che la velocità dell'acqua, ch' è comune all' asta, risponde al punto di mezzo dell' altezza verticale, cioè ad $x=a\cos.\omega$ (Bonati. *V. Mem. della Società Italiana* Tom. II. part. II. pag. 703.) Ma differente risultamento si ottiene dalla prima delle equazioni (Δ'). Difatti dicasi q l' ascissa rispondente a quel punto della corrente che ha velocità pari a quella dell' asta, si avrà

$$v^2-c^2=2\mathrm{V}f(q-x)-f^2(q^2-x^2)\,,$$
$$c^2-v^2=-2\mathrm{V}f(q-x)+f^2(q^2-x^2).$$

Questi valori sostituiti negl' integrali $\int(v^2-c^2)dx$, $\int(c^2-v^2)dx$, ed esteso il primo da $x=0$ sino ad $x=q$, ed il secondo da $x=q$ sino ad $x=2a\cos.\omega$; la prima delle (Δ') darà

$$\mathrm{V}q^2-\frac{2}{3}fq^3=\left(\mathrm{V}-\frac{2}{3}f(q+2\cos.\omega)\right)\left(q-2\,a\cos.\omega\right)^2.$$

Ora se si consideri questa equazione per rispetto alla q, agevolmente scorgesi non verificarsi pel valore di $q=2\cos.\omega$, che si ritrae, come è detto, dalla prima delle equazioni (Δ); vale a dire la velocità dell'acqua pari a quella dell' asta non rispondere al suddetto punto di mezzo.

perfezione della teorìa dell'asta ritrometrica. Al che se si aggiunga la sconosciuta legge degli urti obbliqui (§ 4.), e perciò la forza dell'urto non rigorosamente proporzionale a $\cos.\omega^2$; crederemmo di poter conchiudere non essere certa la misura della velocità di una corrente, o per meglio dire della verticale che corrisponde al filone, se si rilevi coll' asta ritrometrica.

§ 8.

Il *Galleggiante composto* del Brunacci è formato da due palle A , B (*Fig.* 2.) congiunte mediante un filo; la prima specificamente più leggera dell' acqua , la seconda più pesante . Lasciato questo strumento in balìa della corrente , se ne osserva la sua velocità, e presso a poco la declinazione dalla verticale. Indi con un galleggiante semplice se n'esplora la velocità superficiale. Con questi dati si trova la celerità dell' acqua dello strato che investe la palla inferiore. Cangiando la lunghezza del filo si rilevano le velocità dell'acqua alle diverse profondità. (*)

Disegnati con r', r'' i raggi delle palle A, B, e denominata c la velocità permanente del galleggiante, V la velocità in superficie, e v quella che investe la palla B, si trova (1)

$$v = \frac{(r'+r'')c - r''V}{r'}.$$

(*) Per verità il primo che ideò il descritto galleggiante fu Mariotte: ma nè egli nè alcun altro innanzi al Brunacci ne diedero la teoria (V. *Istituto Italiano*. Bologna, 1806.). Dappoi S. E. il Cavaliere Fossombroni Ministro di S. A. I. e R. il GRAN DUCA di Toscana perfezionò sì fatto strumento (V. *Atti dell' Accademia de' Fisiocritici*. Siena 1808.) col porre alla vece delle palle due cilindri vôti da riempiersi all' opportunità, e connessi fra loro in guisa da rimanere durante la corsa per entro il fiume coi loro assi perpendicolari al filone della corrente. Il qual nuovo galleggiante tiene il vantaggio su quello a due sfere, di restar esposto all' azione di tutte le celerità, che ne' respettivi strati corrispondono alla lunghezza dei cilindri , qualunque sia la direzione della corrente che li trasporta.

(1) Brunacci, V. *Istituto Nazionale Italiano*, Tom. I. Part. II. pag. 288.

Il qual risultamento ricavasi ritenendo la forza che accelera la palla A proporzionale a $r'^2(V-c)^2$, e la forza che ritarda la palla B proporzionale ad $r''^2(c-v)^2$. Ma se qualcuno rifiutasse la legge del quadrato della differenza delle velocità (§ 5.), e alla vece ponesse la prima di esse forze proporzionale a $r'^2(V^2-c^2)$, e la seconda a $r''^2(c^2-v^2)$, ricaverebbe la formola già trovata dal Sig. Avanzini (1)

$$v = \frac{1}{r''}\sqrt{\left((r'^2 + r''^2)\, c^2 - r'^2 V^2 \right)},$$

la quale è diversa dalla precedente. Laonde crederei di non errare affermando che la teorìa del galleggiante composto è incerta. A ciò si aggiunga la difficoltà di determinare a qual profondità cammini la palla B; e quindi lo strato a cui compete la velocità v: il che fu osservato dal professore Venturoli (2). E difatti vi è assai ragionevolmente da temere che il filo s'incurvi: e se questo avvenga, non si potrà misurare la profondità della palla B moltiplicando la lunghezza del filo pel coseno della sua declinazione dalla verticale, come richiede l' inventore. Perciocchè non è malagevole comprendere, che ogni picciola curvatura del filo può produrre nella misura di essa profondità molto svario. Da un altro lato egli è manifesto, che questo strumento al pari dell' asta ritrometrica serve soltanto ad esplorare il corso dell' acqua nella verticale che risponde al filone.

§ 9.

D' assai migliore dei due esaminati strumenti è il *Pendolo composto idrometrico* (3). Questa macchinetta consiste in un cilindro AC (*Fig.* 3.), il quale s'immerge a poco a poco sotto la superficie della corrente. Tenendo addietro al progresso delle declinazioni dal perpendicolo AB ne' successivi abbassamenti della canna si giugne a determinare le velocità degli strati Hh', $h'h''$, $h''h'''$, ec.

---

(1) *Della vera legge de' fluidi contra ostacoli mobili.* Padova 1811, pag. 18.

(2) *Elementi cit.* Tom. II. pag. 218.

(3) Invenzione del Sig. Venturoli. V. *Mem. della Società Ital.* Tom. XIV. Part. I. pag. 158.

Queste velocità si ottengono poi dall'equazione ch' esprime l' equilibrio dell' asta cilindrica, onde dipendono dalle seguenti forze. Peso dell'asta: spinta verticale dell'acqua contro la parte sommersa: ed urto della corrente. Ma perchè l'urto è obbliquo, e la legge di questo urto è ignota (§ 4.), conseguentemente la dottrina del menzionato pendolo non è affatto esente da difetto. Difetto che, non si dee dissimulare, ha pochissimo valore, purchè si costruisca lo strumento siccome c' insegna il suo inventore, cioè in guisa che gli angoli di declinazione dal perpendicolo non oltrepassino 30 gradi (§ 4). Io però temerei che ne' fiumi assai profondi fosse per riuscire disagevole sì il maneggio dell'asta a cagione della sua lunghezza, come il trasportare tutta la macchina nelle diverse perpendicolari della corrente.

§ 10.

Il *Reometro*, è pur soggetto ad eccezioni. Ma prima di dichiararle ci gioverà dare qualche idea di questo ingegnoso strumento (1).

AB (*Fig.* 4) è un albero guernito di una vite perpetua Q, che può aggirarsi attorno a due perni, e al quale sta infisso il volante CD avente due palette C, D obblique all'asse di esso albero. Al rivolgersi di AB la vite perpetua fa girare una ruota H, che ha dei denti segnati 0, 1, 2, 3, 4, ec. sino 100; dimodochè per ogni giro del volante la vite spinge avanti un dente della ruota H. Ma potendo succedere che in un certo tempo il volante faccia più di cento giri, per ciò la ruota H mediante un rocchetto fa girare un' altra ruota K dentata in maniera, che mentre la prima H compie una intera rivoluzione, la seconda K percorre una parte aliquota della sua periferia, a cagion d' esempio la decima parte. Queste ruote sono portate dall' asse EF, il quale è unito in E al telajo della macchina, e l' altro estremo F è sostenuto da una funicella di tale lunghezza, che quando la macchina è sommersa nella corrente emerga fuori d' acqua. LO è una molla colla quale si ferma il moto delle ruote.

---

(1) Invenzione del sig. Woltman V. *Bibliot. Univ.* Tom. VI. pag. 258.

Ecco poi come si adopera siffatta macchina. Piantata nel fondo del fiume l' antenna MN, vi si attacca il reometro, che si profonda fin a quello strato dove vuolsi rilevare la velocità, facendo sì che l' albero AB diventi parallelo alla direzione della corrente. Egli è chiaro che subito l' acqua percuotendo le palette incomincia a far girare il volante CD. Ad un fissato momento si tira il capo G della funicella talchè il dente marcato *o* della ruota H va a contatto della vite perpetua Q, e il diametro verticale della ruota K corrisponde al segno *o* delle sue divisioni. Scorso un determinato tempo, si fa cessare il moto di rivoluzione delle ruote H, K rallentando la funicella FG; il perchè si abbassa l' asse EF mediante la pressione della molla LO, e scostasi la ruota H dalla vite perpetua, la quale tosto si ferma contro il punteruolo P. Allora tirata fuori d' acqua la macchina si legge sul roteggio il numero de' giri compiuti dal volante nel tempo osservato.

Siansi adunque contati n giri, e sia t il tempo che si è impiegato a compierli. Chiamata a la distanza del centro della paletta dall' asse dell' albero, π la circonferenza del diametro 1, u la velocità equabile del centro della paletta, si ha $u = \frac{2an\pi}{t}$.

Ciò determinato, la velocità v della corrente in quello strato ove si colloca il reometro, secondo il Venturoli (1) è data dalla seguente equazione

---

(1) *Elem. di Mec. e d'Idraul.* Tom. II. pag. 235. Ediz. cit.

$$v = \frac{u}{tang.\phi} + \frac{1}{sen.\phi}\sqrt{\frac{Rbg}{aScos.\phi}},$$

dove g è la gravità, ϕ l'angolo che fanno i piani delle palette con la direzione dell'albero, a la nominata quantità, S la superficie di una paletta, Rb la somma de' momenti delle resistenze della macchina, ch'è mestiere per ogni reometro determinare con una preliminare sperienza da farsi in acqua stagnante.

Ora si osservi che la forza dell'urto calcolata nel determinare la riferita equazione è quella con cui è percossa una paletta. Adunque questa forza o resistenza appartiene al secondo caso dichiarato nel § 3. Per la qual cosa se alla vece di porre essa resistenza proporzionale al quadrato della differenza tra la velocità dell' acqua che investe normalmente una paletta, e la velocità pure perpendicolare, che ha il suo centro, cioè proporzionale a $(v\,\text{sin}.\phi - u\cos.\phi)^2$, si facesse proporzionale a $v^2\text{sin}.\phi^2 - u^2\cos.\phi^2$ (§ 5.), in questa seconda ipotesi la velocità si troverebbe espressa dall' equazione

$$v = \sqrt{\left(\frac{u^2}{\text{tang}.\phi^2} + \frac{1}{\text{sin}.\phi^2}\cdot\frac{Rbg}{aS\cos.\phi}\right)}.$$

Risultato differente dal sopra riportato. Il che, e la non rigorosa valutazione della forza dell'urto obliquo (§ 4.) ci mostrano essere dubbia la teorìa del reometro.

Evvi di più. Non debb' essere sì agevole, seppure mal non m' appongo, mantenere ferma la macchina contra le correnti rapidissime, ed il movimento della medesima dee rimanere alterato dalle acque torbide. Nè certo è troppo comodo il dover determinare per ogni reometro il valore di Rb con un preliminare sperimento, come si è accennato di sopra. (*)

§ 11.

Dal sin quì detto raccogliesi: che la teoria dell' asta ritrometrica, quella del galleggiante composto, e l'altra del reometro non si possono aver per certe ed esatte; e che la teorìa del pendolo composto idrometrico non si può tenere per rigorosissima. Laonde credo che a dar fondamento di maggior sicurezza alla misura della velocità delle acque correnti, sia d' uopo investigare uno strumento la cui dottrina nè sia controversa, nè sia inesatta. Riflettendo per tanto a ciò che abbiamo detto ne' §§ 3, 4, e 5, chiaro apparisce, che la sola legge dell' urto diretto di un fluido contra solidi immobili è quella che si può tenere per incontrastabile. Egli è adunque sulla medesima che ho ideato una nuova macchinetta con cui misurare la velocità delle acque correnti, e della quale passo subito a dare la descrizione e la teorica.

CAPITOLO II.

Descrizione e teoria della Squadra reometrica.

§ 12.

Lo strumento che io propongo per misurare le acque corren-

(*) Non ho fatto menzione del *Regolatore* di Prony, perchè fu già esaminato dal Venturoli (*Elem. di Idraulica* Tom. II. pag. 242, 243, 244.) Questi trova maggiori pregj nel regolatore di Guglielmini, qualora si costruisca colle avvertenze da lui suggerite. Da un altro lato, sarà sempre una impresa oltremodo ardua quella di misurare col regolatore le acque che scorrono pe' grandi fiumi. Medesimamente riuscirebbe malagevolissimo rilevare una tale misura col *Pendolo idrometrico semplice*, tuttochè corretto (Elem. cit. Tom. II. pag. 228.), il perchè abbiamo lasciato in disparte anche questo strumento.

ti, e che, se mal non mi avviso, si può chiamare *Squadra reometrica* (*) è rappresentato dalla *Figura* 5.

All' asta cilindrica AC e perpendicolarmente al suo asse è sovrapposto un regolo EF, come mostra la figura. Un pertugio cilindrico G attraversa la grossezza del regolo, ed ha il suo asse normale a quello dell' asta. L' estremità F del regolo è formata od armata di metallo in modo, che il peso del braccio EG equiponderi quello del corto braccio GF, ed il centro di gravità di tutto il regolo cada nel punto dove l'asse dell' asta intersega quello del pertugio.

Sospeso questo strumento ad asse o perno orizzontale che passa pel foro G, ed applicata normalmente od obbliquamente all' asta, o ad un braccio del regolo una forza, scorgesi apertamente che questa farallo rotare attorno all' asse di sospensione. Ma se niuna forza agisca sul regolo o sull' asta, per l' ugnaglianza de' momenti di rotazione dei due bracci EG, FG riferiti all' asse del foro G, si terrà l'uno in positura orizzontale, mentre a perpendicolo sarà l' asse dell' altra.

§ 13.

Ora sia la squadra ECF (*Fig.* 6.) appesa ad asse orizzontale nel modo sopra detto, e sia immersa in acqua corren-

---

(*) Ho adottato il greco aggiunto *reometrica*, anzichè il più usitato *idrometrica*, o l' altro *ritrometrica* dato dal Bonati alla sua Asta, perchè mi è paruto più adatto ad esprimere con proprietà una Squadra *misuratrice di acqua corrente*. E difatti *idrometrica* è addiettivo che suona in generale misuratrice di liquido da *μέτρον*, *metron* (*mensura*), e da *υδωρ*, *ydor* (*acqua*), e traslatamente qualsiasi liquido; onde vedesi non esservi espresso se si misuri fluido in corso oppure stagnante. L'altro epiteto *ritrometrica* vorrebbe piuttosto, se non vo errato, significare misuratrice di un *tratto*, ossia di un certo spazio qualunque; da *ῥύτρον*, *rytron*, (*tractus*); sicchè non havvi idea completa, non potendosi sottintendere in *tratto* l'altra significanza di acqua corrente. Ma l' aggettivo *reometrica* parmi appunto rispondente al senso di una Squadra, la quale misuri acqua corrente: stantechè il greco verbo *ῥέω*, *rheo*, (*fluo*) di cui componesi, constantemente somministra sì ne' vocaboli derivati, come ne' composti l' idea di corrente, e precisamente dello scorrere dell'acqua.

te pel tratto HC. Tosto vedesi che l' acqua urtando contro HC farà girare la squadra intorno all' asse di sospensione discostando l' asta AC dall' appiombo, ed inclinando all'orizzonte il regolo EF. Ma se si aggravi l'estremità E di un peso P, subito questo agirà con momento contrario a quello ch' esercita la corrente. Cosicchè, se il peso P sia da prima minore della forza dell'urto, di mano in mano crescendolo si potrà rendere tanto, quanto appunto occorre per mettere in positura verticale l' asta AC, e quindi bilanciare l' urto diretto della corrente contro l' asta.

Egli è mediante siffatto equilibrio, che io cercherò di scuoprire la scala delle velocità in una qualunque verticale di acqua corrente, nel modo che passo a dichiarare.

§ 14.

Data la scala delle velocità nella verticate HC (*Fig.* 6), determinare il peso P da sospendersi all' estremità E del regolo EF, ch' equilibri l' urto diretto della corrente contro la porzione sommersa HC dell' asta.

Sia $EG=a$, $GH=b$, $HC=h$; e preso un punto qualunque M sulla porzione HC immersa nella corrente, pongasi $HM=x$, $Mm=dx$. Dicasi poi v la velocità dell' acqua in M, e Π il peso che collocato in E bilancia l' urto diretto della corrente contra HM.

Poichè la forza con cui l' acqua percuote normalmente qualunque elemento Mm dell' asta è proporzionale ad $Mm.v^2$ (§ 4.), per conseguente si potrà uguagliare a $\lambda v^2 dx$, designando con λ un coefficiente costante, che si determina mediante la resistenza de' fluidi, come si dirà in appresso. Ma questa forza, vedesi apertamente, tende a produrre moto rotatorio attorno all' asse di sospensione G col momento $\lambda v^2 dx.GM=\lambda v^2(x+b)dx$; e perciò la somma di tutti i momenti degli elementi della HM pareggia $\lambda\int v^2(x+b)dx$. La quale espressione integrale rappresenta eziandio il momento della risultante delle forze che urtano la porzione HM dell'asta come è noto dalla Meccanica. Altronde il momento del peso Π rispetto allo stesso asse G è $= a\Pi$.

Or, acciò che la corrente urti normalmente l' asta, conviene ch' essa sia verticale. Questa condizione manifestamente richiede, che il momento della risultante delle forze urtanti, che tendono a volgere la squadra intorno all'asse G, sia uguale al momento della forza che tende a farla rotare in senso opposto. Onde sorge tosto l' equazione

$$\text{(I)} \qquad \lambda\int v^2(x+b)\,dx = a\Pi.$$

Supposto adesso che la scala delle velocità sia data dall' equazione $v = \varphi x$, la (I) diventerà

$$\lambda\int(\varphi.x)^2(x+b)\,dx = a\Pi.$$

Quindi fatta l' integrazione, si ricaverà da $\int(\varphi.x)^2(x+b)dx$ una funzione di x, che designeremo per $\Phi.x$, e si avrà

$$\lambda\,\Phi.x + C = a\Pi,$$

C essendo la costante arbitraria. Esteso poi l' integrale da $x=0$ sino ad $x=h$, e denominato A il valore che acquista la costante C, e P ciocchè diventa Π quando x è $=h$, si otterrà

$$\lambda\Phi.h + A = aP;$$

e da quì immediatamente P. Il che ec.

§ 15.

Per determinare il coefficiente λ, dicasi r il raggio della sezione traversale dell' asta, 1 il peso specifico dell' acqua, e g la gravità. L'esperienza prova (1) che la resistenza dell'elemento Mm del cilindro percosso perpendicolarmente al suo asse pareggia $\frac{11}{20}$ del peso di una colonna d'acqua, che abbia per base la sezione longitudinale dello stesso elemento, e per altezza $\frac{v^2}{2g}$, ch' è l' altezza dovuta alla velocità v. Cosicchè la resistenza o forza di urto si esprime da $\frac{11}{20} \cdot \frac{2rv^2dx}{2g}$; e perciò si ha $\lambda v^2dx = \frac{11}{20} \cdot \frac{rv^2dx}{g}$. E da quì tosto traesi $\lambda = \frac{11r}{20g}$.

---

(1) *Nouv. Experiences sur la resistance des fluides.* Exp. 185. 194. Paris, 2777.

§ 16.

Ora si osservi che cognita la relazione tra v ed x, potendosi sempre determinare il valore dell'integrale $\int v^2(x+b)dx$, almeno per approssimazione; ne segue che saranno altresì determinati i differenti pesi Π, ch' equilibrano l' urto della corrente nelle successive immersioni dell' asta (§ 14.), e che d' ora innanzi chiamerò *pesi misuratori degli urti*. Ma il precipuo scopo delle nostre disquisizioni è appunto la relazione fra v ed x; onde fa d' uopo indagare questa, adesso che si è dimostrato esservi un rapporto tra i pesi misuratori degli urti e le immersioni verticali dell'asta del mio strumento. Innanzi tratto però ci giovi fare alcune generali considerazioni sopra quella funzione di x, che debb' esprimere la velocità v della corrente.

§ 17.

Già Bonati (1) dimostrò che le curve paraboliche colle quali prima il Guglielmini, poscia il Grandi intendevano di rappresentare la scala delle velocità di una corrente in qualsiasi verticale, non erano acconcie a tal uopo; il perchè possiamo lasciare in disparte sì l' una come l'altra. Nemmeno m' atterrò alla curva parabolica da lui proposta (2), ma sibbene tenterò di trovare alcun' altra linea algebraica assai più generale, la quale esprima la mentovata scala delle velocità.

---

(1) V. *Mem. della Società Italiana* Tom. II. pag. 677, 678, 679.

(2). Veggansi le cit. Mem. e Tom. cit. pag. 691, 692 . . . 695.

Ritenute adunque le denominazioni di x e di v, e posto $v = \varphi.x$, disegnando $\varphi.x$ una funzione della x, si osservi, che $\varphi.x$ non può contenere alcuna potenza negativa di x. Infatti, se ciò fosse possibile, posto x uguale ad una quantità infinitesima diventerebbe v infinita; il che è assurdo, perchè ad x infinitesima risponde la velocità v del pelo d'acqua, la quale nelle ordinarie correnti è finita. Neppure $\varphi.x$ può contenere potenze fratte di x. Imperciocchè per tale irrazionalità avrebbe la v più valori, come è noto dalla Teorìa delle Equazioni; donde si conchiuderebbe che più velocità potessero corrispondere al medesimo punto di una corrente, il che apertamente non istà.

Queste considerazioni ci scuoprono adunque, che la funzione $\varphi.x$ dovrà contenere solamente potenze intere e positive di x. Per la qual cosa, chiamata V la velocità dell' acqua in superficie, andremo pochissimo, anzi con svario trascurabile, lungi dal vero, come proveremo ancora con altre ragioni in appresso, ponendo

$$v = \mathrm{V} + ax + bx^2 + cx^3 + \text{ec.} + kx^{n-1} + lx^n.$$

La quale supposizione ci appalesa, che si può eziandio rappresentare il quadrato di v dalla seguente equazione

$$v^2 = \mathrm{V}^2 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \text{ec.} + \rho x^{2n}.$$

Imperocchè si prova nell'Algebra elementare, che la potenza di un qualunque polinomio in x si può sviluppare in serie secondo le potenze della x; e che se l'esponente della potenza è un intero positivo, la serie è composta di un numero finito di termini. I coefficienti poi α, β, γ, ec..ρ, e l'esponente $2n$ sono quantità, che vanno determinate col mezzo della sperienza. Ciò fermato, noi passeremo a risolvere il problema col quale si ottiene la cercata velocità.

§ 18.

Data la velocità superficiale, ed i pesi misuratori degli urti dell' acqua contro l' asta della squadra nelle successive immersioni della medesima, determinare la velocità in un punto qualunque della corrente.

Ritengasi che V sia la velocità dell' acqua in superficie, v quella della corrente nel punto rispondente alla verticale x, che comincia dal pelo d' acqua: e pongasi (§ prec.)

$$\text{(II)} \qquad v^2 = \mathrm{V}^2 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \text{ec.} + \rho x^{2n}.$$

Egli è manifesto che si avrà risoluto il problema, purchè si giunga a determinare i coefficienti α, β, γ, ec., ρ, e l'esponente $2n$. Il che faremo nel seguente modo.

Sostituiscasi il valore v^2 nell' equazione (I), si otterrà

$$\lambda\int v^2(x+b)dx = \lambda\Big(\mathrm{V}^2\int(x+b)dx + \alpha\int x(x+b)dx$$
$$+\beta\int x^2(x+b)dx + \gamma\int x^3(x+b)dx + \text{ec.}$$
$$+\rho\int x^{2n}(x+b)dx.\Big) = a\Pi.$$

E fatte le integrazioni risulterà

$$\lambda\Big(\mathrm{V}^2\Big(\frac{x^2}{2}+bx\Big)+\alpha\Big(\frac{x^3}{3}+\frac{bx^2}{2}\Big)+\beta\Big(\frac{x^4}{4}+\frac{bx^3}{3}\Big)+\text{ec.}$$
$$+\rho\Big(\frac{x^{2n+2}}{2n+2}+\frac{bx^{2n+1}}{2n+1}\Big)\Big)+\mathrm{C} = a\Pi,$$

disegnando con C la costante arbitraria. Ma quando x è $=0$, per la costruzione della squadra (§ 12.), e perchè cessa ogni urto, si ha $\Pi=0$; per ciò la costante C è $=0$. Onde si trae

$$\text{(III)} \begin{cases} \lambda\Big(\mathrm{V}^2\Big(\frac{x^2}{2}+bx\Big)+\alpha\Big(\frac{x^3}{3}+\frac{bx^2}{2}\Big)+\beta\Big(\frac{x^4}{4}+\frac{bx^3}{3}\Big)+\text{ec.} \\ \quad +\rho\Big(\frac{x^{2n+2}}{2n+2}+\frac{bx^{2n+1}}{2n+1}\Big)\Big) = a\Pi. \end{cases}$$

Ora sieno state fatte con la squadra $2n$ immersioni, e dicansi P_1, P_2, P_3, ec., P_{2n} i successivi pesi misuratori degli urti della corrente contro l' asta nelle corrispondenti profondità $x=h_1$, h_2, h_3, ec., h_{2n}. Fatte le sostituzioni di questi valori nell' equazione precedente, si otterrà

$$
\text{(IV)}\left\{\begin{array}{l}
\lambda\left(V^2\left(\frac{h_1^2}{2}+bh_1\right)+\alpha\left(\frac{h_1^3}{3}+\frac{bh_1^2}{2}\right)+\beta\left(\frac{h_1^4}{4}+\frac{bh_1^3}{3}\right)+\text{ec.}\right.\\
\qquad\left.+\,\rho\left(\frac{h_1{}^{2n+2}}{2n+2}+\frac{bh_1{}^{2n+1}}{2n+1}\right)\right)=aP_1\,,\\[2ex]
\lambda\left(V^2\left(\frac{h_2^2}{2}+bh_2\right)+\alpha\left(\frac{h_2^3}{3}+\frac{bh_2^2}{2}\right)+\beta\left(\frac{h_2^4}{4}+\frac{bh_2^3}{3}\right)+\text{ec.}\right.\\
\qquad\left.+\,\rho\left(\frac{h_2{}^{2n+2}}{2n+2}+\frac{bh_2{}^{2n+1}}{2n+1}\right)\right)=aP_2\,,\\[2ex]
\lambda\left(V^2\left(\frac{h_3^2}{2}+bh_3\right)+\alpha\left(\frac{h_3^3}{3}+\frac{bh_3^2}{2}\right)+\beta\left(\frac{h_3^4}{4}+\frac{bh_3^3}{3}\right)+\text{ec.}\right.\\
\qquad\left.+\left(\frac{h_3{}^{2n+2}}{2n+2}+\frac{bh_3{}^{2n+1}}{2n+1}\right)\right)=aP_3\,,\\[2ex]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots\\[2ex]
\lambda\left(V^2\left(\frac{h^2{}_{2n}}{2}+bh_{2n}\right)+\alpha\left(\frac{h^3{}_{2n}}{3}+\frac{bh^2{}_{2n}}{2}\right)+\beta\left(\frac{h^4{}_{2n}}{4}+\frac{bh^3{}_{2n}}{3}\right)+\text{ec.}\right.\\
\qquad\left.+\,\rho\left(\frac{h_{2n}{}^{2n+2}}{2n+2}+\frac{bh_{2n}{}^{2n+1}}{2n+1}\right)\right)=a\,P_{2n}:
\end{array}\right.
$$

le quali equazioni saranno $2n$ di numero, essendo altrettante le immersioni fatte. Ora tosto scorgesi, che col mezzo delle precedenti equazioni si potranno determinare i coefficienti α, β, γ, ec., ρ. Conciossiachè date $2n$ equazioni ciascuna delle quali contenga altrettante incognite, con uno de' noti metodi d'eliminazione si ottiene sempre il valore di ciascheduna incognita. Trovati poi li valori di α, β, γ, ec., ρ, sostituiscansi nell'equazione (II), dove pure alla vece di $2n$ si ponga il numero denotante le immersioni fatte; in cotale guisa verrà determinato il valore di v^2; e quindi quello di v. Il che ec.

§ 19.

La risoluzione del precedente problema richiede che sieno date le quantità λ e V.

La prima λ già determinata nel § 15, uguaglia $\frac{11r}{20g}$.

Quanto alla velocità V superficiale si potrà determinarla nel modo che segue. S'immerga l'asta della squadra reometrica un pochetto sotto il pelo d'acqua, cioè per una picciola lunghezza i, e dicasi p il peso che collocato all'estremità del braccio del regolo equipondera la forza dell' urto normale di questa immersione.

Ciò fatto, si ritengano le denominazioni dei paragrafi 15. e precedente. Poichè la resistenza dell'urto diretto contro ad un cilindro eguaglia $\frac{11}{20}$ del peso di un prisma d'acqua, che abbia per base la sezione longitudinale del cilindro percosso, e per altezza quella ch' è dovuta alla velocità, come si è detto nel citato § 15; per conseguente la resistenza dell'asta della squadra immersa per la lunghezza i sarà uguale a $\frac{11}{20} \cdot \frac{2riV^2}{2g} = \lambda iV^2$. Altronde essendo i una picciola lunghezza, il centro della resistenza λiV^2 è distante $\frac{i}{2}$ dal pelo d' acqua; cosicchè il suo momento sarà espresso da $\lambda i\left(b + \frac{i}{2}\right)V^2$. Ma il momento del peso p misuratore dell' urto è $= ap$. Dunque si avrà

$$\lambda i\left(b + \frac{i}{2}\right)V^2 = ap;$$

la quale equazione ci dà tosto

$$V = \sqrt{\frac{2ap}{\lambda i(2b + i)}}.$$

Nel filone potremo eziandio esplorare la velocità V col mezzo de' galleggianti semplici.

Quì pure vuolsi avvertire, che se si assumerà il metro per unità delle misure lineari, ed il chilogrammo per unità dei pesi, siccome un metro cubico d'acqua piovana o distillata pesa 1000 chilogrammi, così la gravità specifica dell'acqua non sarà espressa da 1, come si è supposto (§ 15.), ma bensì da 1000. E poichè la gravità g in misura metrica pareggia met. 9,8088 (*) per ciò si avrà

$$\lambda = 1000 \frac{11r}{20 \times 9{,}8088} = 56{,}0721r\,.$$

Se poi si dubitasse che la gravità specifica dell'acqua di fiume non fosse prossimamente uguale a quella dell' acqua piovana, allora converrebbe trovarla coi noti mezzi.

§ 20.

Il metodo, che or ora abbiamo esposto per determinare la velocità delle acque correnti pe' fiumi, ha base nella presupposizione che la velocità v sia uguale alla radice quadra del polinomio $V^2 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \text{ec.} + \rho x^{2n}$ composto di $2n+1$ termini. Ma quì può apporre taluno essere questo tuttavia un supposto; e perciò non sapersi se la curva rappresentata dall' equazione (II) sia acconcia a dare la scala delle velocità di una verticale. Intorno a che non ci sarà disagevole dimostrare: che tra le applicate v della curva data dall' antidetta equazione (II) havvene almeno $2n+1$, le quali pareggiano esattamente le velocità dei differenti punti della corrente; il perchè si potrà sempre far sì, che le rimanenti ordinate rappresentino quasi rigorosamente i valori delle velocità degli altri punti. La quale asserzione acciocchè si possa tenere da chiunque per inconcussa, premetteremo il seguente lemma.

§ 21.

Se gl' integrali completi delle due funzioni differenziali

(*) Se si adoperassero le misure parigine sarebbe la gravità specifica dell' acqua piovana rappresentata da 70. perchè un piede cubico d' acqua piovana pesa appunto 70 libbre francesi : e la gravità g sarebbe uguale a piedi 30, 196.

$B(f.x)^m \psi.x\,dx$, $B(\varphi.x)^m \psi.x\,dx$, dove B è una quantità costante, saranno uguali; dico che si avrà $f.x = \varphi.x$.

Siano disegnati gl'integrali dei due differenziali $(f.x)^m \psi.x dx$, $(\varphi.x)^m \psi.x\,dx$ dalle funzioni $F.x$, $\Phi.x$, e siano c, C respettivamente le costanti arbitrarie, si avrà

$$B\int (f.x)^m \psi.x\,dx = B F.x + c$$

$$B\int (\varphi.x)^m \psi.\,x\,dx = B\,\Phi.x + C\,.$$

Ora differenziando, e dividendo per B, si otterrà

$$(f.x)^m \psi.x\,dx = \left(\frac{dF.x}{dx}\right) dx$$

$$(\varphi.x)^m \psi.\,x\,dx = \left(\frac{d\Phi.x}{dx}\right) dx\,.$$

Ma per supposizione si ha $BF.x + c = B\Phi.x + C$; per conseguente sarà eziandio

$$\left(\frac{dF.x}{dx}\right) dx = \left(\frac{d\Phi\,x}{dx}\right) dx\,.$$

Adunque dovrà essere

$$(f\,x)^m \psi.x\,dx = (\varphi.x)^m \psi.x\,dx\,;$$

e da quì tosto traesi $f.x = \varphi.x$. Il che ec.

§ 22.

La proposizione dimostrata nel § precedente si avvera generalmente. Laonde posto $x=h$, se risulta $BF.h+c=B\Phi.h+C$, si potrà conchiudere $f.h = \varphi.h$. Il che ci scuopre, che avendosi due curve rappresentate dalle equazioni $y=f.x$, $Y=\varphi\,x$, se avvenga che certi determinati valori dell' assissa x rendano uguali gl' integrali completi $B\int(f.x)^m \psi.\,xdx$, $B\int(\varphi\,x)^m \psi.\,xdx$, a quegli stessi valori risponderanno le ordinate y, Y uguali tra loro.

§ 23.

In adesso non è più malagevole comprendere il perchè la curva rappresentata dall' equazione (II) debba avere almeno $2n+1$ punti, le cui applicate sieno eguali alle velocità della corrente, come enunciammo nel § 20. Infatti posto per abbreviazione

$$\sqrt{\left(\mathrm{V}^2+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\text{ec.}+\rho x^{2n}\right)}=f.x$$

$$\mathrm{V}^2\left(\frac{x^2}{2}+bx\right)+\alpha\left(\frac{x^3}{3}+\frac{bx^2}{2}\right)+\beta\left(\frac{x^4}{4}+\frac{bx^3}{3}\right)+\text{ec.}$$

$$+\ \rho\left(\frac{x^{2n+2}}{2n+2}+\frac{bx^{2n+1}}{2n+1}\right)=\mathrm{F}.x,$$

e considerato che il primo membro dell'equazione (III) è l'integrale completo di $\lambda\int v^2(x+b)dx$, tosto vedesi che le equazioni (II) e (III) addivengono

$$(1)\quad v=f.x,$$

$$(2)\quad \lambda\int(f.x)^2(x+b)dx=\lambda\mathrm{F}.x=a\Pi.$$

Da un altro canto se sia $\varphi.x$ la funzione di x, ch' esprime la esatta velocità, si ha (§ 14.)

$$(3)\quad \lambda\int(\varphi.x)^2(x+b)dx=\lambda\Phi.x+\mathrm{C}=a\Pi\,.$$

Quindi scorgesi che i differenziali $\lambda(f.x)^2(x+b)dx$, $\lambda(\varphi.x)^2(x+b)dx$ hanno per integrali completi $\lambda\mathrm{F}.x$, $\lambda\Phi.x+\mathrm{C}$. Ora egli è chiaro, che tutti que' valori di x, che renderanno uguali tra loro $\lambda\mathrm{F}.x$, $\lambda\Phi.x+\mathrm{C}$, daranno per le funzioni $f.x$, $\varphi.x$ delle quantità eguali (§ prec.). Onde le velocità che si ricaveranno dall' equazione (1) con siffatti valori, rappresenteranno esattamente le velocità della corrente. Ma per li $2n$ valori di $x=h_1, h_2, h_3,\text{ec.}, h_{2n}$ i momenti degli urti sono espressi da $a\mathrm{P}_1$, $a\mathrm{P}_2$, $a\mathrm{P}_3$, ec., $a\mathrm{P}_{2n}$

(§ 18.); quindi sono uguali fra loro di mano in mano gli ultimi membri delle equazioni (2) e (3). Adunque avremo

$$\lambda F.h_1 = \lambda\Phi.h_1 + A,\ \lambda F.h_2 = \lambda\Phi.h_2 + A,$$

$$\lambda F.h_3 = \lambda\Phi.h_3 + A,\ \text{ec.},\ \lambda F.h_{2n} = \lambda\Phi.\,h_{2n} + A,$$

designando con A la costante C determinata; e di quì ne viene (§ prec.)

$$f.h_1 = \varphi.h_1,\ f.h_2 = \varphi.h_2,\ f.h_3 = \varphi.h_3,\ \text{ec.},\ f.h_{2n} = \varphi.h_{2n}.$$

I quali risultati ci appalesano che la curva rappresentata dall' equazione (II) ha le ordinate rispondenti alle immersioni h_1, h_2, h_3, ec., h_{2n}, che sono manifestamente $2n$ di numero, uguali alle velocità della corrente. Alle quali applicate aggiunta quella ch' esprime la velocità in superficie, con sicuro animo potremo conchiudere, che la curva data dall'equazione (II) ha almeno $2n+1$ punti, ai quali spettano ordinate uguali alle velocità della corrente.

§ 24.

Ora sieno AX, AY (*Fig.* 7) due assi ortogonali. Si prendano sovra AX le porzioni $AM' = h_1$, $AM'' = h_2$, $AM''' = h_3$, ec., e si tirino pei punti M', M'', M''', ec. le rette M'N', M''N'', M'''N''', ec. parallele all' asse AY. Poscia si faccia

$$AN = V$$

$$M'N' = \sqrt{\left(V^2 + \alpha h_1 + \beta h^2_1 + \gamma h^3_1 + \text{ec.} + \rho h_1^{2n}\right)}$$

$$M''N'' = \sqrt{\left(V^2 + \alpha h_2 + \beta h^2_2 + \gamma h^3_2 + \text{ec.} + \rho h_2^{2n}\right)}$$

$$M'''N''' = \sqrt{\left(V^2 + \alpha h_3 + \beta h^2_3 + \gamma h^3_3 + \text{ec.} + \rho h_3^{2n}\right)}$$

ec. ec.

ove le quantità α, β, γ, ec., ρ, l'esponente $2n$, e V avranno i valori trovati co' metodi sopra dichiarati (§ 18 e 19). Per quanto poi si è dimostrato nel §° antecedente chiaro apparisce, che i punti N, N', N'', N''', ec. spettano alla curva che rappresenta la vera scala delle velocità in una verticale. Laonde descritta la linea $NN'N''N'''$.... questa esprimerà prossimamente dessa scala, e tanto maggiore ne sarà l'approssimazione, quanto minori saranno le differenze tra due consecutive ascisse, cioè quanto minori saranno le differenze $AM''-AM'$, $AM'''-AM''$, ec.. Da quì scorgesi apertamente, come riesca agevole ottenere con assai precisione, e vuolsi pur dire, con svario trascurabile, la scala delle velocità che hanno i punti nella verticale di una corrente. Conciossiachè il tutto istà nell' eseguire con l'asta della squadra siffatte immersioni, che prese a due a due consecutivamente non abbiano tra loro assai differenza.

Adunque colla equazione $v^2=V^2+\alpha x+\beta x^2+$ ec. $+\rho x^{2n}$ possiamo ottenere quanti si vogliano punti della curva che rappresenta esattamente la vera scala delle velocità. Il che, se mal non mi avviso, è quanto si può richiedere. Perocchè la determinazione dell'esatto valore della velocità $v=\varphi.x$ dipende dall' integrazione di equazioni a differenziali parziali del second' ordine ch' esprimono il moto de' fluidi incompressibili (1), le quali finora non si sanno integrare. Ma quand'anche di tali equazioni si giungesse a trovare gl'integrali in termini finiti, di modo che si ottenesse il valore di $\varphi.x$; non ostante converrebbe poi modificarlo e per le irregolarità dell'alveo dentro cui scorrono le acque, e per le materie che strascinano o trasportano con sè, e per varie altre locali resistenze. Onde converrebbe sempre mai ristringerci a determinare della curva $v=\varphi.x$ tanti punti, quanti se ne vuole: al che appunto soddisfa la curva da me proposta.

---

(1) Lagrange, *Mécanique Analytique* Tom. II. Part. II. Sect. XI. Paris, 1815.

§ 25.

Conosciute poi le velocità espresse dalle ordinate AN, $M'N'$, $M''N''$, $M'''N'''$, ec., $M^{(2n)}N^{(2n)}$, per ottenere la portata, ossia la quantità d' acqua fluente in un minuto secondo dalla proposta verticale HC (*Fig.* 6.), procederemo come segue.

Dicasi Q la chiesta portata; e ritenuto $AN = V$, facciasi

$$M'N' = v_1,\ M''N'' = v_2,\ M'''N''' = v_3,\ \text{ec.},\ M^{(2n)}N^{(2n)} = v_{2n}.$$

Tosto vedesi che non andremo lungi dal vero se riterremo le portate delle AM', $M'M''$, $M''M'''$, ec., $M^{(2n-1)}M^{(2n)}$ uguali corrispondentemente alle quantità

$$\frac{V+v_1}{2}AM',\ \frac{v_1+v_2}{2}M'M'',\ \frac{v_2+v_3}{2}M''M''',\text{ec}\ ,\frac{v_{2n-1}+v_{2n}}{2}M^{(2n-1)}M^{(2n)}.$$

Onde l' intera portata sarà

$$Q = \frac{V+v_1}{2}AM' + \frac{v_1+v_2}{2}M'M'' + \frac{v_2+v_3}{2}M''M''' + \text{ec.}$$
$$+ \frac{v_{2n-1}+v_{2n}}{2}M^{(2n-1)}M^{(2n)}.$$

Ma per abbreviare i calcoli gioverà eseguire le sperienze in guisa, che abbiasi $AM' = M'M'' = M''M''' = \text{ec.} = M^{(2n-1)}\ M^{(2n)} = h_1$; e si otterrà

$$\text{(V)}\quad Q = h_1\left(\frac{V}{2} + v_1 + v_2 + v_3 + \text{ec.} + \frac{V_{2n}}{2}\right);$$

che è la portata ricercata.

§ 26.

Porremo termine a questo Capitolo dicendo alcuna cosa intorno alla legge colla quale decrescono le velocità in superficie dal filone verso le ripe. Il quale scemamento, comechè sia per sè stesso manifesto, contuttociò volle il P. Ximenes darcene alcuna idea mostrandolo con alcune sperienze (1), perchè si vedesse che lo sminuire di quelle velocità non è tutto effetto delle resistenze, che oppongono le ripe al corso dell'acqua.

Abbiamo dimostrato (§ 19.) che la velocità superficiale V in un punto qualsivoglia è $=\sqrt{\frac{2ap}{\lambda i(2b+i)}}$; talchè si ha

$$(\text{VI})\quad V^2=\frac{2a}{\lambda i(2b+i)}p.$$

Ora supponiamo di avere rilevate le velocità superficiali dal filone alle ripe in una sezione di fiume, adoperando la medesima squadra reometrica, e sommergendo in ogni sperimento l'asta dentro l'acqua per la costante lunghezza i. Egli è chiaro, che tutte le trovate velocità, e li rispondenti pesi misuratori degli urti avranno sempre tra loro la relazione espressa dall'equazione (VI). Il perchè riuscendo p, V variabili, ed essendo costanti le quantità λ, a, b, i, subito scorgesi che la curva rappresentata dall' equazione (VI) sarà una parabola Appolloniana avente il parametro $\frac{2a}{\lambda i(2b+i)}$. Quindi conchiuderemo che la legge delle velocità in superficie è quella stessa che serbano le ordinate paraboliche.

§ 27.

Oltre a ciò vuolsi osservare, che in una stessa sezione di fiume riuscendo variabili le velocità superficiali dal filone verso ciascuna sponda, il che pe' citati or ora esperimenti di Ximenes non può esservi dubbio, la curva di esse velocità non sarà formata da un sol arco parabolico, ma sibbene da due archi pertinenti a parabole uguali.

Poichè siansi determinate le velocità in superficie di una normale alle sponde eseguendo colla squadra reometrica due serie di esperienze; cioè l'una progredendo di mano in mano dal filone verso la ripa destra, l' altra sperimentando medesimamente dallo spirito d'acqua verso la ripa sinistra. Nomininsi le velocità della prima serie V, V_1, V_2, ec., V_n, alle quali corrispondano i pesi misuratori degli urti p, p_1, p_2, ec., p_n: e le velocità della seconda serie si disegnino con V, V', V'', ec., $V^{(n)}$ a cui parimente rispondano i pesi p, p', p'', ec., $p^{(n)}$.

---

(1) *Nuove Sperienze Idrauliche* lib. III. Art. V. Siena. 1780.

Avremo (§ prec.)

$$\text{(VII)} \left\{ \begin{array}{l} V^2 = \frac{2a}{\lambda i(2b+i)} p,\ V^2_1 = \frac{2a}{\lambda i(2b+i)} p_1,\ V^2_2 = \frac{2a}{\lambda i(2b+i)} p_2, \text{ec.}, \\ \text{ec.}, V^2_n = \frac{2a}{\lambda i(2b+i)} p_n . \end{array} \right.$$

$$\text{(VIII)} \left\{ \begin{array}{l} V^2 = \frac{2a}{\lambda i(2b+i)} p,\ V'^2 = \frac{2a}{\lambda i(2b+i)} p',\ V''^2 = \frac{2a}{\lambda i(2b-i)} p'', \text{ec.}, \\ \text{ec.}, V^{(n)2} = \frac{2a}{\lambda i(2b+i)} p^{(n)} . \end{array} \right.$$

Ora descritto l' arco parabolico AD (*Fig.* 8) avente l'asse AX, ed il parametro $\frac{2a}{\lambda i(2b+i)}$; siansi prese sopra AX le ascisse $AC = p$, $AF = p_1$ $AG = p_2$, ec., $AK = p_n$, e siansi condotte le ordinate CD, EF, GH, ec., KL. Non è malagevole il comprendere che alle CD, EF, GH, ec., KL appartengono i valori delle velocità V, V_1, V_2, ec., V_n espressi dalle equazioni (VII); e per conseguente sarà $CD = V$, $EF = V_1$, $GH = V_2$ ec., $KL = V_n$. Perlocchè se V_n è tra la prima serie delle velocità la più prossima alla ripa destra, tutte le velocità di questa serie saranno rappresentate dalle applicate dell' arco DK.

Ad esprimere poi la seconda serie delle velocità V, V', V'', ec., $V^{(n)}$ facciasi $CA' = CA = p$, e descrivasi l' arco parabolico A'D avente il vertice in A', l' asse AX, e lo stesso parametro $\frac{2a}{\lambda i(2b+i)}$. Dappoi pongasi $A'E' = p'$, $A'G' = p''$, ec., $A'K' = p^{(n)}$, e si tirino le ordinate E'F', G'H', ec., K'L'. Quì pur essendo i valori delle velocità V', V'', ec., $V^{(n)}$ date dalle equazioni (VIII) eguali a quelli delle ordinate E'F', G'H', ec., K'L', si avrà $E'F' = V'$, $G'H' = V''$, ec., $K'L' = V^{(n)}$. Onde vedesi che la seconda serie delle velocità è rappresentata dalle ordinate dell' arco DK'.

Adunque la curva KDK' delle velocità superficiali componesi dei due, archi KD, DK', che si congiungono in D, e che spettano a due parabole uguali. Il che ec.

§ 28.

Essendo il filone ugualmente distante dalle ripe, e le velocità ad esso laterali e corrispondenti eguali, gli archi parabolici DK, DK' saranno eguali in tutto. Ma se più ad una sponda che all' altra si accosterà la testa della corrente, i rami DK, DK' saranno disuguali. Potremo però sempre agevolmente determinare la curva KDK' delle velocità superficiali: stantechè basterà trovare i pesi p, p_n, $p^{(n)}$ misuratori degli urti contro l' asta della squadra sommersa per la lunghezza verticale i nel filone, e nelle parti più prossime alle sponde.

CAPITOLO III.

Altre ricerche sulla vera legge delle velocità con cui muovonsi gli strati di una corrente da cima a fondo.

§ 29.

Il metodo spiegato nell' antecedente Capitolo, col quale si rilevano le velocità degli strati acquei di un fiume dalla superficie sino al fondo, può guidarci ad investigare la legge o scala di esse velocità. Imperciocchè dimostrammo che con sì fatto metodo si possono ottenere i veri valori delle celerità di quanti si vogliano punti pertinenti alla verticale di una corrente (§ 23,24.); e quindi col loro paragone potremo poi arguire la legge con cui le velocità vanno progredendo. Ma tuttochè questo sia, nulladimeno ravvisiamo non essere questo cammino molto agevole per giugnere alla meta, stante la moltitudine degli sperimenti che a tal effetto si richieggono. Per la qual cosa estimo non opera infruttuosa, soggiugnere il come mediante la squadra reometrica si possa indagare se certe note linee siano adatte a rappresentare la cercata legge. Che se mai la buona ventura mi conducesse a trovare quella linea, che l' esperienza poscia confermasse esprimere la scala delle velocità, allora direi di avere almeno additata la completa ed esatta risoluzione dell' importantissimo problema concernente la misura delle acque correnti. Al qual fine adunque verrò risolvendo le questioni che quì seguono.

§ 30.

Ritenuto che v esprima la velocità dell' acqua corrente in un punto sotto il pelo d' acqua per la verticale x, e V la velocità in superficie, investigare se la scala delle velocità possa essere rappresentata da una retta che abbia l'equazione

$$\text{(IX)} \quad v = V - fx\,,$$

ove f è una quantità costante da determinarsi.

Sostituiscasi $V - fx$ alla vece di v nell' equazione (I). Poscia si facciano le integrazioni; sorgerà

$$\text{(X)}\ \lambda \left\{ V^2\left(\frac{x^2}{2} + bx\right) - 2Vf\left(\frac{x^3}{3} + \frac{bx^2}{2}\right) + f^2\left(\frac{x^4}{4} + \frac{bx^3}{3}\right) \right\} = a\Pi.$$

Ora siasi sommersa l' asta della squadra reometrica nella corrente sino quasi al fondo, e per questa immersione sia $x = k$, e P il peso misuratore dell' urto, si avrà

$$\lambda\left\{V^2\left(\frac{k^2}{2}+bk\right)-2Vf\left(\frac{k^3}{3}+\frac{bk^2}{2}\right)+f^2\left(\frac{k^4}{4}+\frac{bk^3}{3}\right)\right\}=aP.$$

E posto per abbreviazione

$$\frac{V\left(\frac{k^3}{3}+\frac{bk^2}{2}\right)}{\frac{k^4}{4}+\frac{bk^3}{3}}=A,\qquad \frac{aP-\lambda V^2\left(\frac{k^2}{2}+bk\right)}{\lambda\left(\frac{k^4}{4}+\frac{bk^3}{3}\right)}=B,$$

si otterrà

$$f^2-2Af=B;$$

dalla quale equazione tracsi tantosto il valore di f, e così rimane determinata l'equazione (IX).

Ma per iscoprire se appunto una linea retta possa rappresentare la scala delle velocità: si ponga nell'equazione (X) il ricavato valore di f, indi si mettano in vece di x successivamente de' valori minori di k, che diremo k_1, k_2, k_3, ec.. Fatte queste sostituzioni chiaro apparisce, che saranno determinati tanti pesi Π, quante sono le quantità k_1, k_2, k_3, ec.. Ora eseguite con la squadra le immersioni $x=k_1$, k_2, k_3, ec., ec., e trovati i corrispondenti pesi misuratori degli urti: se avverrà che questi eguaglino quelli che si sono dedotti dall'equazione (X), o da essi poco differiscano, potremo concludere che la proposta equazione (IX) esprime la scala delle velocità. Ma se tutt'altro accada, dovremo rifiutare l'assunta ipotesi.

§ 31.

Che se la scala delle velocità, anzichè supporla una retta, si voglia espressa dall'equazione

$$\text{(XI)}\quad v^2=V^2-lx^n,$$

dove V ha la solita denominazione, si potranno determinare con la squadra reometrica le quantità costanti l, n, come passiamo subito a dichiarare.

Si ponga il valore supposto v^2 nell'equazione (I), e si faccia l' integrazione; ne verrà

$$\text{(XII)}\ \lambda\left[V^2\left(\frac{x^2}{2}+bx\right)-l\left(\frac{x^{n+2}}{n+2}+\frac{bx^{n+1}}{n+1}\right)\right]=a\Pi.$$

Ora sieno state fatte con la squadra le tre immersioni $x=k'$, $x=k''$, $x=k'''$, e siansi trovati rispondentemente i pesi misuratori degli urti P', P'', P''', si avranno le seguenti equazioni

$$\lambda\left[V^2\left(\frac{k'^2}{2}+bk'\right)-l\left(\frac{k'^{n+2}}{n+2}+\frac{bk'^{n+1}}{n+1}\right)\right]=aP',$$

$$\lambda\left[V^2\left(\frac{k''^2}{2}+bk''\right)-l\left(\frac{k''^{n+2}}{n+2}+\frac{bk''^{n+1}}{n+1}\right)\right]=aP'',$$

$$\lambda\left[V^2\left(\frac{k'''^2}{2}+bk'''\right)-l\left(\frac{k'''^{n+2}}{n+2}+\frac{bk'''^{n+1}}{n+1}\right)\right]=aP'''.$$

La prima ci dà

$$\text{(XIII)}\quad l=\frac{\lambda V^2\left(\frac{k'^2}{2}+bk'\right)-aP'}{\lambda\left(\frac{k'^{n+2}}{n+2}+\frac{bk'^{n+1}}{n+1}\right)};$$

e dalle altre due ricavasi

$$\frac{\lambda V^2\left(\frac{k''^2}{2}+bk''\right)-aP''}{\lambda\left(\frac{k''^{n+2}}{n+2}+\frac{bk''^{n+1}}{n+1}\right)}=\frac{\lambda V^2\left(\frac{k'''^2}{2}+bk'''\right)-aP'''}{\lambda\left(\frac{k'''^{n+2}}{n+2}+\frac{bk'''^{n+1}}{n+1}\right)}.$$

E posto per brevità

$$V^2\left(\frac{k''^2}{2}+bk''\right)-\frac{aP''}{\lambda}=H,$$

$$V^2\left(\frac{k'''^2}{2}+bk'''\right)-\frac{aP'''}{\lambda}=K,$$

l' ultima equazione addiverrà

$$H\left(\frac{k'''^{n+2}}{n+2}+\frac{bk'''^{n+1}}{n+1}\right)=K\left(\frac{k''^{n+2}}{n+2}+\frac{bk''^{n+1}}{n+1}\right).$$

Ma se si facciano le immersioni in guisachè sia $k'''=2k''$, al che nulla s' oppone, la precedente equazione si ridurrà alla più semplice

$$\text{(XIV)} \qquad 2^{n+1} = \frac{K[b(n+1)+k''(n+1)]}{H[b(n+2)+2k''(n+1)]},$$

ove H, K sono due quantità indipendenti da n. In adesso egli è palese che sciogliendosi l'equazione (XIV) si ricaverà il valore di n; e poscia sostituito questo nell' equazione (XIII) si otterrà tosto quello di l. Onde l'equazione (XI) resta completamente determinata.

Poste queste cose, per indagare se la cercata scala delle velocità sia la curva di genere parabolico espressa dalla proposta equazione, converrà fare parecchie altre immersioni colla squadra, oltre le sopraddette con cui si trovano i valori di n, e di l. In fatti eseguite coteste immersioni, e rilevati i pesi Π misuratori degli urti dell'acqua contro la parte sommersa dell'asta, di mano in mano si sostituiscano questi, assieme co' valori corrispondenti di x, nell' equazione (XII), dove altresì primamente siansi collocati i determinati valori di n, e di l. Queste sostituzioni o renderanno identici i due membri dell' equazione (XII), o l' uno di essi poco differirà dall'altro, o vi sarà tra loro notabile svario. Se avvenga il primo caso, l'equazione (XI) esprimerà esattisimamente la scala delle velocità: se il secondo, la rappresenterà prossimamente, e quel tanto che basta per la pratica: e se il terzo, si conchiuderà che la supposta relazione tra v ed x non può sussistere.

§ 32.

Ma perchè si possa apertamente scorgere lo sviluppo del precedente problema vuolsi eziandio trovare effettualmente l' esponente n.

Si faccia un' altra immersione colla squadra rispondente ad $x=k'^{v}$, e denominisi P'^{v} il peso misuratore dell' urto, l' equazione (XII) ci dà

$$\lambda \left[V^2\left(\frac{k'^{v2}}{2}+bk'^{v}\right)-l\left(\frac{k'^{vn+2}}{n+2}+\frac{bk'^{vn+1}}{n+1}\right)\right]=aP'^{v}.$$

ed avendosi (§ prec.)

$$\lambda\left[\mathrm{V}^2\left(\frac{k''^2}{2}+bk''\right)-l\left(\frac{k''^{n+2}}{n+2}+\frac{bk''^{n+1}}{n+1}\right)\right]=a\mathrm{P}'',$$

da queste due equazioni si ricaverà

$$\frac{\lambda\mathrm{V}^2\left(\frac{k''^2}{2}+bk''\right)-a\mathrm{P}''}{\lambda\left(\frac{k''^{n+2}}{n+2}+\frac{bk''^{n+1}}{n+1}\right)}=\frac{\lambda\mathrm{V}^2\left(\frac{k'^{v2}}{2}+bk'^{v}\right)-a\mathrm{P}'^{v}}{\lambda\left(\frac{k'^{vn+2}}{n+2}+\frac{bk'^{vn+1}}{n+1}\right)}$$

Ora ritenuta la denominazione di H, e posto

$$\mathrm{V}^2\left(\frac{k'^{v2}}{2}+bk'^{v}\right)-\frac{a\mathrm{P}'^{v}}{\lambda}=\mathrm{L},$$

si otterrà

$$\mathrm{H}\left(\frac{k'^{vn+2}}{n+2}+\frac{bk'^{vn+1}}{n+1}\right)=\mathrm{L}\left(\frac{k''^{n+2}}{n+2}+\frac{bk''^{n+1}}{n+1}\right).$$

Ma facendo $k'^{v}=2k'''=2^2k''$, dalla precedente equazione dedurremo

$$2^{2(n+1)}=\frac{\mathrm{L}\,[b(n+2)+\ \ k''(n+1)]}{\mathrm{H}\,[b(n+2)+2^2k''(n+1)]}.$$

Altronde l' equazione (XIV) tosto ci dà

$$2^{2(n+1)}=\frac{\mathrm{K}^2[b(n+2)+\ k''(n+1)]^2}{\mathrm{H}^2[b(n+2)+2k''(n+1)]^2}.$$

Adunque avremo

$$\frac{\mathrm{K}^2[b(n+2)+\ k''(n+2)]^2}{\mathrm{H}^2[b(n+2)+2k''(n+1)]^2}=\frac{\mathrm{L}\,[b(n+2)+\ \ k''(n+1)]}{\mathrm{H}\,[b(n+2)+2^2k''(n+1)]};$$

e di quì si ritrae

$$2^2k''^2(\mathrm{K}^2-\mathrm{HL})(n+1)^2+bk''(5\mathrm{K}^2-4\mathrm{HL})(n+1)(n+2)$$
$$+b^2(\mathrm{K}^2-\mathrm{HL})(n+2)^2=0.$$

Onde poi fatto per compendio

$$\frac{(5\mathrm{K}^2-4\mathrm{HL})b}{2^2k''(\mathrm{K}^2-\mathrm{HL})}=\mathrm{M}\,,\ \left(\frac{b}{2k''}\right)^2=\mathrm{N};$$

otteremo

$$(n+1)^2+\mathrm{M}(n+1)(n+2)+\mathrm{N}(n+2)^2=0.$$

La qual equazione, posto $\frac{n+1}{n+2}=z$, diventa

$$z^2+Mz+N=0\,,$$

e risoluta si ha

$$z=\frac{1}{2}\left[-M\pm\sqrt{(M^2-4N)}\right].$$

Ma essendo $z=\frac{n+1}{n+2}$, risulta $n=\frac{1-2z}{z-1}$; per conseguente si avrà

$$n=\frac{2[M+1\pm\sqrt{(M^2-4N)}]}{-M+2\pm\sqrt{(M^2-4N)}}:$$

e tolto il radicale dal denominatore, si otterrà

$$n=\frac{-(3M+2N+2)\pm\sqrt{(M^2-4N)}}{M+2N+2}.$$

Ora si osservi che debb'essere n positivo (§ 17.). Pertanto se risulterà $M+2N+2>0$, avendosi $-(3M+2N+2)<0$, si dovrà prendere il radicale col segno superiore, come altresì sarà d'uopo che si abbia $\sqrt{(M^2-4N)}>3M+2N+2$: e se avverrà che sia $M+2N+2<0$, essendo N essenzialmente positivo, la quantità $-(3M+2N+2)$ sarà >0; ed in questo caso converrà pigliare il radicale col segno inferiore. Da un altro lato perchè n sia quantità reale sarà mestiere soddisfare alla seguente condizione M^2 non $<4N$, ossia $\frac{5K^2-4HL}{4(K^2-4L)}$ non $<\frac{1}{k''}$. E così resta n completamente determinato.

§ 33.

Sin quì abbiamo mostrato come si debba procedere per iscoprire se la scala delle velocità sia espressa da una retta, o da una curva di genere parabolico. Adesso cercheremo d'investigare se la mentovata scala possa essere rappresentata da una curva trascendente. Il che, seppure non vo errato, non è stato finora da niun altro tentato.

§ 34.

Supposta la scala delle velocità espressa dall' equazione trascendente

$$(\mathrm{XV}) \quad v = \frac{\mathrm{V}}{\mu^x},$$

ove V ed x ritengono le solite denominazioni, determinare la quantità costante μ.

Messo nell'equazione (I) $\frac{\mathrm{V}^2}{\mu^{2x}}$ in luogo di v^2, si otterrà

$$\lambda\,\mathrm{V}^2 \int \frac{x+b}{\mu^{2x}}\,dx = a\Pi,$$

ed integrata con la considerazione che $x = 0$ rende $\Pi = 0$, avremo

$$(\mathrm{XVI}) \qquad \frac{\lambda \mathrm{V}^2}{2\log.\mu.\mu^{2x}}\left(\frac{x\log.\mu+1}{\log.\mu} + b\right) = b - a\Pi + \frac{1}{\log.\mu}.$$

La qual equazione ci dà

$$\frac{1}{\mu^{2x}} = \frac{2(b-a\Pi)(\log.\mu)^2+2\log.\mu}{\lambda \mathrm{V}^2[(x+b)\log\mu+1]}.$$

Ora fatte le due immersioni $x=\eta'$, $x=2\eta'$, e trovati i pesi misuratori degli urti Π', Π''; se si sostituiscano questi valori nell'equazione precedente, avremo

$$\frac{1}{\mu^{2\eta'}} = \frac{2(b-a\Pi')(\log.\mu)^2+2\log.\mu}{\lambda \mathrm{V}^2[(\eta'+b)\log.\mu+1]}$$

$$\frac{1}{\mu^{4\eta'}} = \frac{2(b-a\Pi'')(\log.\mu)^2+2\log.\mu}{\lambda \mathrm{V}^2[(2\eta'+b)\log\mu+1]}:$$

e posto per abbreviazione $b-a\Pi'=a'$, $\eta'+b=b'$, $b'-a\Pi''=a''$, $2\eta'+b'=b''$, si otterrà

$$\frac{1}{\mu^{2\eta'}} = \frac{2[a'(\log.\mu)^2+\log.\mu]}{\lambda \mathrm{V}^2(b'\log.\mu+1)}$$

$$\frac{1}{\mu^{4\eta'}} = \frac{2[a''(\log\mu)^2+\log\mu]}{\lambda \mathrm{V}^2(b''\log.\mu+1)}.$$

Donde deducesi

$$\frac{2[a'(\log\mu)^2+\log.\mu^2]}{\lambda \mathrm{V}^2(b'\log.\mu+1)^2} = \frac{a''(\log.\mu)^2+\log.\mu}{b''\log.\mu+1}.$$

E di quì ne viene

$$(\log.\mu)^4+A(\log.\mu)^3+B(\log.\mu)^2+C\log.\mu-D=0,$$

essendo

$$A=\frac{4a'b''+2a'^2-\lambda V^2a''b'^2}{2a'^2b''},$$

$$B=\frac{2b''+4a'-2\lambda V^2a''b'-\lambda V^2b'^2}{2a'^2b''},$$

$$C=\frac{2-\lambda V^2a''-2\lambda V^2b'}{2a'^2b''},$$

$$D=\frac{\lambda V^2}{2a'^2b''}.$$

Ponghiamo adesso $\log.\mu=v$, si avrà

$$\text{(XVII)} \qquad v^4+Av^3+Bv^2+Cv-D=0.$$

Ma chiamato e quel numero che ha per logaritmo iperbolico l'unità, l'equazione $\log.\ \mu=v$, ci dà $\mu=e^v$; cosichè si ottiene

$$\text{(XVIII)} \qquad v=\frac{V}{e^{vx}}.$$

Adunque essendo v dato dall' equazione (XVII), nulla rimane più da determinarsi nella proposta equazione.

A verificare poi se dessa rappresenti la scala delle velocità basterà sostituire nell' equazione (XVI) alla vece di $\log.\mu$ e di μ, i valori v ed e^v, e poscia attribuire alla x differenti valori, che però non oltrepassino la distanza tra il pelo d' acqua e il fondo del fiume. Operando così scorgesi apertamente che per ciascuno degli assegnati valori alla x, col mezzo della mentovata equazione (XVI) si otterrà corrispondentemente un determinato peso Π. Laonde se succederà che questi pesi eguaglino quelli che bilanciano gli urti contro l'asta della squadra, e che si determineranno colla sperienza facendo immersioni uguali ai valori attribuiti alla x; potremo affermare che l' equazione (XVIII) esprime la scala delle velocità. Che se tutt' altro avverrà, rigetteremo altresì questa ipotesi.

§ 35.

Poichè l' equazione (XVII) oltr' essere di grado pari, ha l' ultimo termine negativo; per conseguente, come è noto dalla Teoria delle Equazioni, avrà almeno due radici reali; positiva l' una, negativa l' altra. Onde quantunque accadesse che le altre due radici fossero immaginarie, in onta a ciò vi sarebbono sempre due soluzioni del problema. Dimodochè chiamata la radice positiva v', e la negativa $-v''$; avremo

$$\text{(XIX)} \qquad v = \frac{V}{e^{v'x}},\ v = Ve^{v''x}.$$

Ma queste equazioni tantosto ci manifestano che al valore v' spettano le velocità v di mano in mano decrescenti dalla superficie al fondo della corrente, e che inversamente al valore $-v''$ appartengono velocità v crescenti.

Osserveremo però che più facilmente può succedere che la scala delle velocità sia espressa dalla prima delle equazioni (XIX), anzichè dalla seconda. Imperocchè le sperienze fatte da Pitot (1) col suo Tubo nella Senna, da Ximenes (2) colla Ventola nel canale di Castiglione e nel fiume Arno, ed alcune altre di Bonati (3) ci manifestano, che le velocità in una medesima verticale di acqua corrente decrescono dalla superficie al fondo.

Da un' altra parte rappresentando l' equazione $v = \frac{V}{e^{v'x}}$ quella porzione della curva logaritmica che si avvicina all' asse delle ascisse, agevolmente potremo descriverla coi noti metodi. E se per buona ventura la scala delle velocità fosse data, o si accostasse d' assai ad essa curva, avremo la seguente legge: che le velocità dei punti pertinenti ad una stessa verticale di acqua corrente sono in progressione geometrica, e le altezze verticali sovrastanti ad essi punti sono in progressione aritmetica.

---

(1) V. *Memoires de l'Academ. Royale des scien. an* 1772.

(2) *Nuove sperienze Idrauliche*. Siena, 1780.

(3) V. *Mem. della Società Ital.* Tom. II. Part. II.

§ 36.

Pochi sperimenti fatti colla squadra reometrica possono adunque guidarci ad iscoprire se qualcuna delle linee date dalle equazioni (IX), (XI), (XV) rappresentino la scala delle velocità di una corrente. Che se l'esperienza ci mostri doversi tutte rifiutare, potremo fare dei tentativi sopra altre curve, pel quale effetto non avremo che ad eseguire operazioni analoghe a quelle, che abbiamo dichiarate ne' precedenti problemi. A ben riuscirvi però sarà vantaggioso: 1.° che la scelta della funzione di x ch' esprimer dee la velocità v sia tale, da rendere integrabile $\int v^2(x+b)dx$: 2.° che le costanti contenute nella supposta funzione, le quali si dovranno determinare sperimentando colla squadra, non dipendano dallo scioglimento di equazioni di grado assai elevato.

Non potendo rinvenire linea che rappresenti esattamente la scala delle velocità, ci atterremo all' equazione (II), dalla quale, come si è provato (§ 23.), si ritraggono le precise ed esatte velocità della corrente almeno per $2n+1$ valori di x; e quindi per quanti punti si vogliano di una stessa verticale, attesochè n è numero arbitrario. Nè il calcolo per trovare i coefficienti α, β, γ, ec., ρ della suddetta equazione è sì malagevole, che nol possa effettuare altresì qualunque mezzano calcolatore, giacchè tutto alla fine si riduce a risolvere equazioni di primo grado (§ 18.)

§ 37.

Per ultimo vuolsi dire in breve del modo spedito e facile con cui si potrebbe adoperare la squadra reometrica, affine di determinare la *velocità media* nella verticale di una corrente tutta volta che le investigazioni sulla resistenza de' fluidi progredissero più oltre. E rammentisi che per *velocità media* s' intende quella, che se fosse comune a tutti i punti della verticale darebbe la stessa portata, che danno i medesimi punti dotati come sono di velocità diverse.

§ 38.

Dobbiamo al professore Avanzini una copiosa serie di esperimenti da lui fatti con molta accuratezza all' oggetto di determinare il centro di resistenza sì diretta come obbliqua di solidi sommersi interamente od in parte dentro un fluido indefinito (1). Mediante la scorta di siffatte sperienze egli ha dedotti utilissimi corollarj intorno alla posizione di esso centro, tra' quali evvi pure il seguente (2).

Il centro di resistenza diretta in un solido non del tutto immerso in un fluido indefinito cade al disopra del centro di grandezza della porzione sommersa; e soggiace a mutazione, allorchè si cangia o la parte immersa, o la larghezza, o la velocità del solido.

Il che non risponde al risultato che si trae colle note teorìe della resistenza de' fluidi. Ma quand'anche la sperienza, o la teorìa determinasse il centro di resistenza di un solido non interamente immerso in un fluido indefinito, ciò non basterebbe per trovare la velocità media delle acque correnti colla squadra reometrica. Imperciocchè dovendosi sommergere l' asta di questo strumento sino quasi a toccare il fondo del fiume, chiaro apparisce non essere in questo caso il fluido indefinito, e molto meno esserlo ogni qual volta si adoperasse la squadra o laddove evvi spiaggia, od in prossimità di una sponda.

---

(1) V. *Istituto Nazionale Italiano* Tom. I. Part. I. Tom. II. Part. I.

(2) V. Il cit. Tom. II. Part. I. pag. 189, 109, 191, ... 206.

§ 39.

Ma subitochè tant'oltre si sarà progredito nella resistenza de' fluidi da scoprire la precisa posizione del centro di resistenza diretta di un cilindro non affatto immerso in un fluido di ampiezza finita, allora con assai agevolezza potrassi mediante la squadra reometrica determinare la velocità media in qualsivoglia verticale di una corrente.

In fatti sia la squadra EFC (*Fig.* 9.) sospesa ad asse orizzontale G, e sia la sua asta GC immersa nell' acqua di un canale o fiume sino quasi a toccarne il fondo MN. Si finga in O il centro di resistenza della porzione sommersa HC; e pongasi $EG=a$, $GH=b$, $HO=c$, $HC=l$. In oltre si ritenga espresso da r il raggio della sezione traversale dell' asta, da g la gravità, da 1 il peso specifico dell' acqua, e si disegni con w la velocità media dell' acqua nella verticale HC, e con P il peso che collocato all' estremità E bilancia la forza d' urto contro la parte immersa HC.

Si è già altre volte detto, che la resistenza di un cilindro retto percosso dall' acqua perpendicolarmente al suo asse vale $\frac{11}{20}$ del peso di un prisma d'acqua avente per base la sezione longitudinale del cilindro, e l' altezza eguale a quella dovuta alla velocità del fluido; cosicchè la forza dell'urto contro HC sarà espressa da $\frac{11rl}{20g}\mathrm{w}^2$. E poichè questa forza si può supporre tutta raccolta nel centro O di resistenza; quindi il suo momento pareggierà $\frac{11rl}{20g}(b+c)\mathrm{w}^2$. Ma dee questo momento equiponderare l' altro del peso P; adunque si avrà

$$\frac{11rl}{20g}(b+c)\,\mathrm{w}^2=aP.$$

Donde tracsi

$$w=\sqrt{\frac{20agP}{11lr(b+c)}}.$$

Di quì vedesi con quanta facilità si troverebbe la velocità media delle acque correnti, se fosse determinata dall' esperienza, o da esatta teorìa la vera posizione del centro O di resistenza.

§ 40.

Il ragionato fin quì concerne la dottrina della squadra reometrica, ora verremo a dire alcuna cosa intorno al modo di servirsene.

CAPITOLO IV.

Avvertenze circa l' uso della Squadra reometrica

§ 41.

Ad esplorare la velocità dell' acqua corrente in canale anzi che no ristretto, crederei che si potesse seguire il modo che passo ad esporre.

Sopra un ponte AB (*Fig.* 10. e 11.), che non ritarda il corso dell' acqua, ergasi verticalmente una colonnetta CD divisa da linee orizzontali $e'e'$, $e''e''$, $e'''e'''$, ec. equidistanti tra loro, e l' una dall' altra distante di quella misura che si estima più convenevole. Un braccio EF sia formato in guisa, che all' uopo si possa far scorrere su e giù per la colonnetta, e fermarsi a vite sovra ciascuna delle divisioni $e'e'$, $e''e''$ $e'''e'''$, ec.. Pure in questo braccio sia infisso un asse o perno di metallo G, da cui penda la squadra HIK: e siavi segnata la rr' orizzontale, all' effetto di conoscere quando l' asta GK abbia acquistata positura verticale.

Alzato il braccio EF fin dove abbisogni, perchè l' estremità K della squadra resti alcun poco sotto il pelo d' acqua, e quivi fermato, si troverà il peso ch' equipondera la forza dell' urto diretto contro la parte sommersa dell'asta collocando appoco appoco dei pesetti in P, e proseguendo sin a tanto che il regolo HI sia divenuto orizzontale, cioè il piano superiore del medesimo siasi messo a livello della *rr'*. Dappoi abbassato esso braccio EF, e tenuto fermo successivamente sopra ciascuna delle altre divisioni, chiaramente vedesi, come si debba operare per conoscere i pesi, ch' equilibrano gli urti diretti contro le porzioni dell' asta, che via via si vanno tuffando nell' acqua.

Coll' osservare pure le divisioni della colonnetta si ricaveranno le altezze verticali delle immersioni dell'asta: poichè queste pareggiano le distanze tra la prima divisione dove si ferma il braccio EF, e le altre sovra cui progressivamente viene a posarsi. Che se a taluno piacesse desumere tali altezze segnando linee orizzontali sull' asta della squadra, io certo non glielo negherò di fare.

Operando così rileviamo adunque: 1.° il peso misuratore dell' urto contro l' asta, mentre è sommersa per poca lunghezza: 2.° i pesi misuratori nelle altre successive immersioni: e 3.° le varie lunghezze delle parti dell' asta di mano in mano tuffate in acqua. I quali dati sono appunto quelli che si ricercano per determinare la velocità nella verticale, ove si sono fatti gli sperimenti (§ 18, 19.).

Facendo più stazioni non ci sarà poi malagevole desumere la portata del canale o fiumicello.

§ 42.

Ma dato che si debba adoperare la squadra reometrica in fiumi assai larghi e profondi, a vero dire poco o nulla sarà adatta l' armatura descritta nel § precedente. Imperciocchè la notabile altezza della colonnetta renderebbe disagevole ed operoso il maneggio dello strumento. Il perchè in questi casi io amarei che si formasse il cilindro della squadra, come tosto passo a dire.

§ 43.

Al regolo AB (*Fig.* 12.) si connetta normalmente un pezzo di canna cilindrica CD di tanta lunghezza quanta potrà essere la distanza dell'asse, a cui si appenderà la squadra, dal pelo d'acqua; e l'estremità D si formi a vite femmina. Inoltre si costruisca un certo numero di tronchi cilindrici T', T'', T''', ec., i quali abbiano diametro uguale a quello della canna CD. Ciascuno di questi tronchi abbia poi un estremo formato a vite maschio, e l'altro a vite femmina; in maniera che il risalto della vite maschio di un pezzo si possa introdurre ed avvolgere dentro l'incavo spirale della vite femmina di qualsivoglia altro pezzo, non salvo quello della D. Pure si faccia un tronco $T^{(n)}$ avente soltanto da una parte la vite maschio. A maggiore semplicità sarà eziandio buono costruire tutti li tronchi di egual'altezza, ed il numero di essi dovrà essere tale che $m'u' + m''u'' + m'''u''' + \text{ec.} + m^{(n)}u^{(n)}$ non risulti minore della profondità massima del fiume.

§ 44.

Con sì fatti pezzi non è disagevole il vedere come si possa allungare od accorciare secondo richiede il bisogno l'asta della squadra; e quindi come si facciano le diverse immersioni. Poichè per la prima immersione basterà unire al cilindro CD il tronco $T^{(n)}$: per la seconda vi si congiungerà T', ed a questo $T^{(n)}$: per la terza si riunirà all'asta di già allungata del tronco T' l'altro T'', ed indi a questo $T^{(n)}$: e così progressivamente. Talchè, esempigrazia, volendosi fare una immersione corrispondente all'altezaa $m'u^{(n)} = m'u' + m''u'' + m^{(n)}u^{(n)}$, si comporrà la squadra rappresentata dalla figura 13.

§ 45.

Finalmente per conoscere quando il cilindro della squadra abbia acquistato la positura verticale, ho immaginato di collocare un piombino *p* il cui filo sia sospeso al punto *q* dell' arco metallico *rqs*. L' asta sarà verticale allorchè il filo del piombino batterà un punto, il quale diligentemente si avrà marcato nella traversetta *rs* appendendo la squadra ad asse orizzontale, e mettendo il suo cilindro appiombo.

§ 46.

Quanto si è detto ne' §§. 43, 44 e precedente si riferisce alla modificazione, che io ho giudicato di dover fare alla squadra reometrica, acciò di esplorare più facilmente la velocità dell' acque che scorrono pe' grandi fiumi. Or soggiugneremo alcune avvertenze intorno al modo di sostenere, e maneggiare siffatto strumento.

§ 47.

Rappresenti ABC... (*Fig.* 14.) la sezione di un fiume, dove siasi divisato di fare sperimenti colla squadra reometrica.

Innanzi tratto si conficcarono colla berta i pali X' Y', X"Y", ec. distanti l' uno dall' altro, e ciascheduno dagli estremi della vicina ripa, quanto fa d' uopo perchè si possano collocare i lunghi tavoloni MN, M'N', ec.. Ad ognuno di essi pali superiormente al pelo d' acqua, verso la parte da cui viene la corrente, e in direzione parallela al filone si figgerà orizzontalmente una spranga di metallo avente in su l' estremità un picciolo incavo, ed oltre a ciò si avrà l'avvertenza di situare tutte queste spranghe in un medesimo piano di livello. Pure importando che sì fatte spranghe abbiano assai aggetto sarà buono sostenerne ciascuna con un puntelletto, come si vede nella figura 15, dove la spranga EG è sostenuta da FG, ed il telajetto GEF può girare attorno ai due cardini g', g'' infissi nel palo.

Queste cose preparate, ed eziandio preparato lo strumento costruito alla foggia sopraddetta; ecco come si eseguiranno le sperienze.

Si appenderà la squadra, alla cui asta non si avrà per anco unito alcuno de' tronchi cilindrici, ad asse di metallo attorno al quale possa liberamente girare: e si poserà questo asse insu due prossime spranghe, e precisamente dentro ai loro incavi, siccome mostra OR (*Fig.* 14.). Lo sperimentatore, facendo poi stazione per modo d'esempio in S, con acconci congegni obbligherà la squadra a non scorrere nè verso O, nè verso R. Appresso eseguirà le diverse immersioni allungando di mano in mano l' asta colli tronchi cilindrici. Nè per certo gli sarà malagevole rilevare i differenti pesi misuratori degli urti, poichè basterà ch' ei cessi di aggiugnere pesetti all'estremità del braccio lungo del regolo, subito che vede il filo del piombino battere sul punto segnato nella traversetta congiunta all'arco metallico. E rispetto alle profondità delle diverse immersioni, egli verrà desumendole dai tronchi cilindrici, che impiegherà ne' successivi allungamenti dell'asta, e che rimangono tuffati in acqua.

Terminate che avrà le osservazioni nella stazione S, volendo trasferirsi ad altra potrà tirare l' asta lunghesso l' asse di sospensione, oppure traportare questo sopra altre spranghe.

§ 48.

Ben m' avveggo che circa le avvertenze e diligenze da usarsi nell' intraprendere sperienze di tal fatta , appena forse avrò mostrate le principali; contuttociò non dubito che quanto alle altre ommesse possa all' uopo supplirvi l' avvedutezza, e la sagacità dello sperimentatore. Sicchè oserei ripromettermi, che non avesse ad incontrare gravi difficoltà ed inciampi, chi amasse mettere alla prova colla esperienza questo mio metodo di misurare le acque correnti de' fiumi. Il che io pure ho in animo di fare, tosto che mel concederanno e mezzi, e tempo.

BREVISSIMO CENNO

GEOMETRICO

DI PIETRO FERRONI

SOPRA ALCUNE LINEE CVRVE DIPENDENTI

DALLE SEZIONI CONICHE

CONSIDERATE IN UN OPUSCOLO STAMPATO

A BOLOGNA

L' ANNO MDCCCXVIII.

ALL' EGREGIO CONSOCIO

SIGNOR ANTONIO LOMBARDI

Ricevuto adì 3. *Giugno* 1823.

Quasi contemporanee nel principio del Secolo corrente XIX.° son venute dalla parte inferiore d' Italia due pretese Trisezioni d' ogni Angolo per mezzo di *Luoghi Piani*, dalla superiore una falsa Quadratura del Circolo, dal centro il Moto Perpetuo, e si spera di presto riaprire mediante gli Empirici la Miniera aperta una volta del *Lapis Philosophorum*. Ora in un' Adunanza trall' ultime dell' Accademia de' Lincei dentro Roma si è *recitata* (manca il *nominativo*, che regga il *participio* nel Titolo della stampa) una Dissertazione, Memoria, Prosa, o come meglio debba chiamarsi, tendente a trovare il *Luogo Geometrico* dei Centri di tutti i Circoli innumerevoli inscritti ne' Triangoli, che abbian per base comune la distanza dei due Fochi, e per vertici rispettivi i punti ove si congiungono i due Raggi *vettori* sul Perimetro di ciascuna delle tre Sezioni del Cono.

Proposto il Quesito dall' Ingegnere Ispettor Du Boi, e tenutone occulto il modo di scioglierlo, tre Professori Italiani dell' Archiginnasio della Sapienza Romana in più modi lo sciolsero con grande apparato d' Analisi algebrica (*), e tutti tre furono interamente d' accordo sì per l' Iperbola come per l' Ellisse e Parabola.

Se a tempo del gran Lincèo Fiorentino fosse avvenuta questa Domanda, colla Dottrina *elementare* delle Coniche d' Apollonio l' avrebbe subito posta *per questo caso particolar semplicissimo* nel suo vero lume sintetico. Ecco come, mi pare, ei l' avrebbe tosto condotta al suo fine adoprando la facil Teorica delle *tangenti.* Le Proposizioni si citano, e le Figure si copiano dalla scolastica *Sectionum Conicarum Synopsis* del Grandi, edizion Fiorentina in 8.° del MDCCL. S. C. dai torchj del Giovannelli.

IPERBOLA

(Prop. XX. p.^{a} 91. Tav. VII. F.^{a} 74.)

I centri dei Circoli inscritti sono nel punto d' incontro delle rette (e bastano due), che dividono per metà gli angoli d' ogni Triangolo. Ora in riguardo al Triangolo FMV ed

---

NOTA TRASCRITTA DA UN RICORDO DEL 1764.

(*) Con minor fasto d' Analisi letterale Ottaviano Abate Cametti scioglieva il Problema ,, Da un punto dato nella Circonferenza di un Circolo condurre una secante, che tagli in tal modo un diametro dato di posizione, che la retta frapposta tra questo diametro e l' altro punto d' incontro della secante colla stessa Periferia agguaglisi al di lei raggio ,,. Le tre *Medie* tra i due segmenti del diametro, aritmetica, geometrica, armonica, in proporzione continua, conducevano subito a scioglierlo combinando adequatamente l'Iperbola equilatera colla Parabola.

alla Tangente laterale MG, che incontra la verticale in O, è provato l'angolo VMG = FMG, IVH = FVH; onde VH, MG s'incontrano in O sulla Tangente verticale. Dunque, essendo F, V i Fochi, FMV il Triangolo, cade in O il centro del Circolo inscritto, ed il *Luogo Geometrico* di tutti i centri è la Tangente condotta dal vertice principale sino all'Asintoto ch'è l'ultima delle Tangenti, il qual limite è dato dal Semiasse conjugato o secondario di questa Iperbola.

ELLISSE

(Prop. e pag.ª stessa e Fig. 73. Tav. VII.)

Ancor quì angolo VMH = FMH in virtù della Normale MH alla Tangente MG, ed IVH = FVH, laonde il centro del Circolo inscritto nel Triangolo FMV è sempre il punto H d'intersezione delle diagonali del Quadrilatero respettivo VEOF. Di più HS:SV : : ON:NV, e HS : SF : : EQ : QF; perciò HS^2:SV.SF::ON.EQ:NV.QF, vale a dire HS^2:SV.SF::DC^2:NV^2; d'onde il *Luogo Geometrico* ricercato ricavasi essere un'altra Ellisse, il cui Asse maggiore è VF distanza de' Fochi della data, ed il Quadrato dell' Asse minore a quel del maggiore sta come DC^2 a NV^2.

PARABOLA

Indipendentemente dall'agevolissima Sintesi traveduta nella *Fig.*ª 7.ª dell' Opuscolo bastava correggere l'errore vistoso, in principio della pag.ª 8ª, dove scrivesi che $\frac{4ap - p^2}{16a - 2p} = \frac{1}{4}p$, quando avrebbe dovuto riflettersi che nella Parabola, considerata per ultimo termine dell' Ellisse, a rispetto al parametro p è ∞, cosicchè quel rotto addiviene $\frac{4ap}{16a} = \frac{1}{4}p$. Nella immediata e più semplice Sintesi si rileva che DC^2:NV^2 nell'

Ellisse — Parabola diventa $\frac{\infty^2}{(2.\infty)^2} = \frac{1}{4}$, cioè il *parametro* della Parabola, *Luogo* dei centri, $\frac{1}{4}$ di quello della Parabola data.

Mentre si fosse trattato del Problema generale per qualunque Curva, allora era il caso di trovar la Formula generalissima ricavando da $y = \varphi x$, la $y' = \Psi x$, o piacesse assegnare il *Luogo* dei centri de' Circoli inscritti, o dei centri di gravità, o del concorso delle tre rette perpendicolari ai lati, condottevi dai tre vertici degli angoli opposti in ogni Triangolo inscritto, o che passasse pe' i punti, dai quali si partono le tre rette ai vertici dei tre angoli, la cui Somma sia un *minimum*.

P. S.

Non dipartendomi dall' istesso argomento, più splendida ancora e più elegante apparisce nella sua *Sintesi* la Geometria applicandola ai *Massimi* e *Minimi*. Di facil portata ella è l' inscrizione del *massimo* Parallelogrammo dentro d' un dato qualunque Triangolo, ma costò non poco alla sagacità dell' ingegno del Torricelli, e dipoi del Viviani, la risoluzione dell' altro Problema d' assegnare il punto nell' interno d' un Triangolo rettilineo, dal qual punto condotte le tre rette ai vertici di ciascun angolo la somma loro sia un *minimo*. Ben maneggiato il Principio classico d' Hudde, che in sostanza è l' istesso antichissimo del disturbo o trabocco *virtuale* dell' equilibrio e del moto, scorgesi tosto, che il punto I ricercato (*Fig.* 1.) debb' esser quello del concorso di tre angoli ottusi eguali, vale a dire ciascuno di 120°; conciossiachè in quel punto solo si verifica *per ogni verso*, che nello stato prossimo *infinitesimo* protratta o scorciata DI (e l' istesso dell' altre due QI, MI), e traslatato I in O, ciascun angolo AIO, CIO, è di 60°, e perciò nei due Triangoletti ortogonj gli angoli IOA, IOC di 30°, onde IO doppio di IA e di IC, l' *incremento* eguale alla somma dei *decrementi*, cioè *nulla* nel suo totale la *variazione*. Presso a poco, ma più prolisso è il discorso per isciogliere il primo (*Fig.* 2.), che s' ottiene bisecando un lato AB in I portato questo punto vicinissimo in C (sotto o sopra), proviene COQD = IOSP (così dall' altra parte), perchè RQ:QD::AQ:QD::QO:OI, laonde IPOS = COQD, ec. come sopra. Pe'l confronto si legga nel *Racconto* del Torricelli il Num.° XXV. ed il lavoro del Viviani in calce del suo *Seniore Aristèo.* Torricelli però confessa egli stesso, che sino al MDCXL. provando e riprovando non aveva potuto mai *dimostrare* il secondo quesito proposto da Fermato.

Del rimanente fa di mestieri sapere a fondo questa Dialettica universale, che dal *semplice* insegna con un ragionamento filato di salire al *composto*, dall' elementale al sublime, e possedere appieno la Geometria onde scriverne degnamente. Quando il leggitore Geometra s' imbatte tra le Fabroniane nella *Vita* del Torricelli, e legge alla pag. 354. del I.° Volume, dove parlasi della *Coclea . . . demonstravitque huic figurae* (Chocleae) *aequale esse Solidum quoddam neque rectum neque rotundum, sed in modum spirae contortum, quale nullum adhuc inter notas exploratasque figuras habebat Geometria,* e vuol dire, mostrò che la *Coclea* era *uguale* alla ,, *Coclea* ovvero a se stessa, tra la lode elargita dai Latinanti non può a meno di non sogghignare. E tanto più maggiormente quantochè poco dopo (pag.ª 382. N.° XVII.) sta scritto in Volgare ,, La Vite (*Choclea* o Chiocciola) triangolare della prima rivoluzione è *uguale* ad un Conoide Iperbolico (Corpo *rotondo* ed assai vetusto), del quale si ha l' altezza, il lato retto, ed il lato verso ,,. Oltre a ciò lo Scrittore medesimo ha copiato (pag.ª 368.) letteralmente l' istesso sproposito, in cui cadde per ignoranza di Geometria Tommaso Bonaventura nella pag.ª XLV. della Prefazione anonima alle XII. ,, Lezioni Accademiche ,, del Torricelli, assegnando per piede o gambo ai Bicchieri o Calici imaginati dal Matematico prelodato *Solidum illud Parabolicum infinitum a se excogitatum*, mentre all' incontro l' *excogitatum* non era il Paraboloide d' infinita lunghezza ,, notissimo sin dall' età d' Archimede, due

secoli e mezzo o in quel torno avanti dell' Era Cristiana, ma l' affusato Corpo rotondo „ Iperbolico acuto „ senza limite a par dell' *asintoto*. Pose la Parabola per Iperbola altresì il Magalotti nella Lettera IV.^{a} delle „ Famigliari contro l' Ateismo „ ove scrive (p.^{a} 103. Edizion Bolognese del MDCCCXXI.) — „ Appollonio mi dimostra, che l' asintote e la curva della parabola prolungate in infinito, quantunque sempre più si accostino fra di loro, pervenendo a distanza minore di qualunque distanza data, non concorrono mai insieme „. Ma l' errore sulla foggia del Piè della Coppa dei Solidi vasiformi, d' antico garbo disegno o maniera, è patente, appellando ad un Solido nuovo *moderno*, mentre l'ultimo per lo contrario richiamando le Coniche vecchie è uno sbaglio, che porta seco l' immediata sua correzione. Così procede secondo il Testo di Clerc ed i Canoni della Critica letteraria la differenza insigne nel giudicar dell' errore tra un caso e l'altro, scorgendosi patentemente nell' ultimo suddivisato un equivoco *nominale*, come nel Viviani (per antonomasia chiamato dal Magalotti „ il Geometra Fiorentino „) rispetto all' Opuscolo, il quale conseguita il suo „ Diporto Geometrico „ havvi a pag.^{a} 271. una sintassi, che fa nascer dubbio se il *Mezzo Elisse* divida per tutto il tratto, o soltanto in totalità. e non parte a parte la Superficie semicilindrica diseguata nella prima Figura. Nelle Discipline severe, ciascuna delle quali può dire ad ogni buon dritto „ Non vide mè di me chi vide il vero „ (Dante nel XII.° della Cantica del Purgatorio) non si ammette, anche pel dubbio più lieve, condescendenza: tutto debb'esservi nitido e indubitato; diversamente all'Archeologia, il cui Cultore, se saggio, protestasi sempre „ Che 'l si e 'l nò nel capo gli tenzona „ se invasato, loda a vicenda il suo simile per esser lodato, ed associati si vedono a Settano „
Officioque pari sese ultro citroque fricare.

AGGIUNTA

IN

POSCRITTO

Col buon fine di agevolare e rendere nel tempo stesso men difettose le Operazioni riguardanti a quella parte speciale dell' Agrimensura pertinente alla ricerca della Misura dei Campi, desumendola dalle lor Piante od Icnografie, che i Geometri pratici volgarmente appellano *riquadrare*, è uscito a stampa in Napoli non ha guari un Opuscolo intitolato NUOVI METODI PEDOMETRICI corredato di molte Figure e d' una lunga Tavola numerica, a risparmio del calcolo effettivo, che nei casi diversi approntar dovrebbero gli Agrimensori. Tutto l' Opuscolo suddivisato si sostiene sulla dimensione facile dell' area o superficie d' un qualsisia Quadrilatero, come dipendente da quella facilissima del Parallelogrammo nel medesimo iscritto col dividere i quattro lati nella medesima ragione geometrica, e congiungerne i punti omologhi della proporzionale divisione. Se nulla havvi di nuovo, pare a me che lo sia solamente l' epiteto *Pedometrici* derivato dal Greco neutro *Pedon* (ΠΕ'ΔΟΝ) *Campus*, in significanza però di *Planities* riportandolo alla Latina Sinonimia. Imperciocchè rispetto alla parte dottrinale o teorica è antichissima la proprietà dimostrata, che divisi per metà i quattro lati del Quadrilatero, l' area di questo sia sempre doppia di quella dell' iscrittogli Parallelogrammo, in tal caso particolare di tutti gli innumerevoli iscrittibili il *maximum*. Senza citare il MARIE dell' ultima Edizion Fiorentina (MDCCCXIII.) (Prob. X. N.° 581. *Fig.* 29. Tav. II.) tutti gli Scrittori antichissimi di GEODESIA lo rammentano, e tra gli altri l' Astronomo e Geometra Persiano Nassir Eddin, fiorente nel MCCLVIII., come apparisce dai suoi *Commentarj agli Elementi d' Euclide*, magnificamente stampati l' anno MDXCIV. dalla Medicea Tipografia di Lingue Orientali, non meno che l' Autore Caldèo del Libro Arabo *De Superficierum divisionibus Machometo Bagdadino adscriptus*, pubblicato in Pesaro (MDLXX.) dal Commandino e Latino e Italiano. Del rimanente, segnata la Figura, eccone in due soli versi la Teorica semplice, dalla quale resulta tutta intera la Tavola, quando piaccia di computarla in tutti i casi speciali di *taglio proporzionale*.

$$ABCD:EFGH::BD.\frac{AC}{2}:FG.EF::AB.\frac{AC}{2}:AF.EF::AB.\frac{AB}{2}:AF.FB::\frac{AB^2}{2}:AF.FB;$$

Formula ridotta così alla *ragione numerica* del taglio dei *Lati*, e rappresentabile in linee rette (descritto sopra AB il Semicircolo) dalla ragione tra il Quadrato sempre fermo della Corda del quadrante BI e quello dell' ordinata FK; d' onde il *massimo* in M, ed a coppie eguali in FK, F'K' equidistanti all' inverso dai termini A, B del Lato scelto per *modulo*. Verità tutte dalla Sintesi geometrica con sì grande facilità suggerite che Dante avrebbe cantato di ciascheduna di loro (al termine dell' *Inferno*),, Et transparean come festuca in vetro ,,.

IV. Mem. di matem. Soc. Ital. T. XIX. Fascic. II. pag. 576.

Fig. 4.

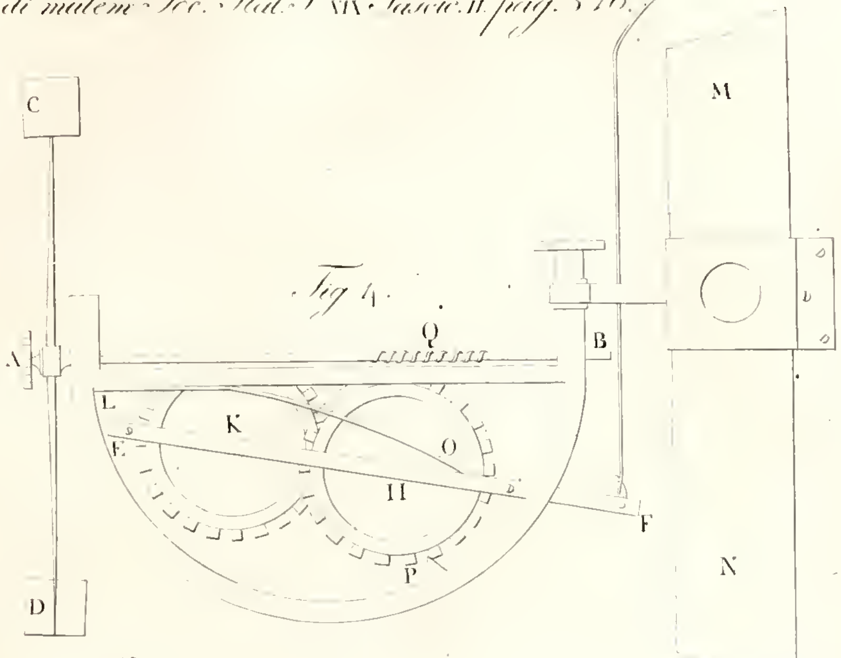

C
M
Q
A
B
L
K
O
E
H
F
N
P
D

Fig. 7.

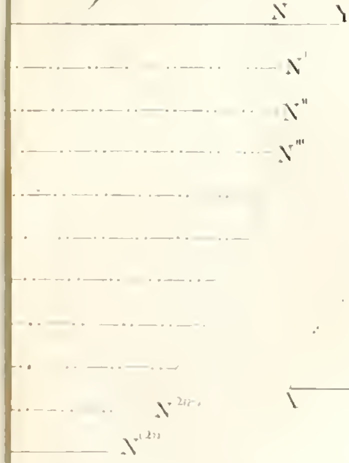

X
Y
X'
X''
X'''
X^{2n-1}
X^{(2n)}

Fig. 3.

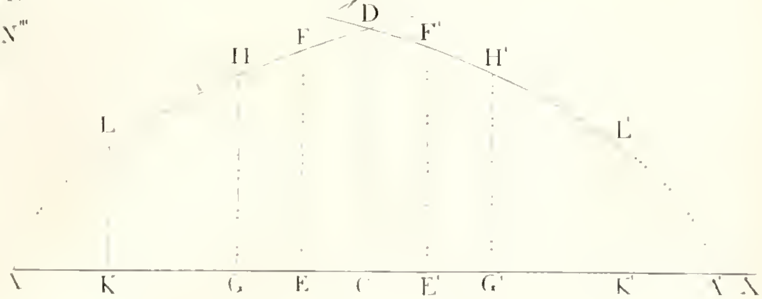

D
F
F'
H
H'
L
L'
X
K
G
E
C
E'
G'
K'
X
X

Fig. 1.

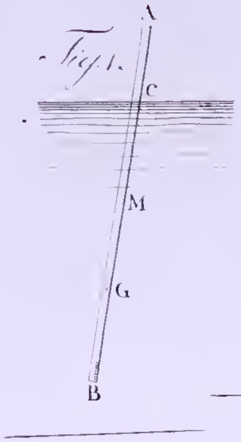


Fig. 2.

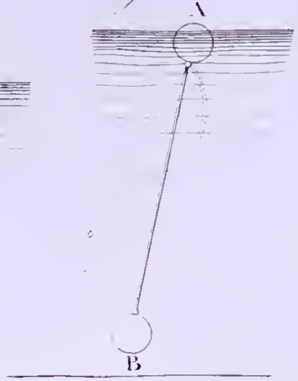


Fig. 3.

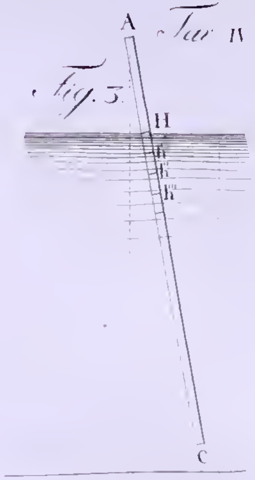


Fig. 4.

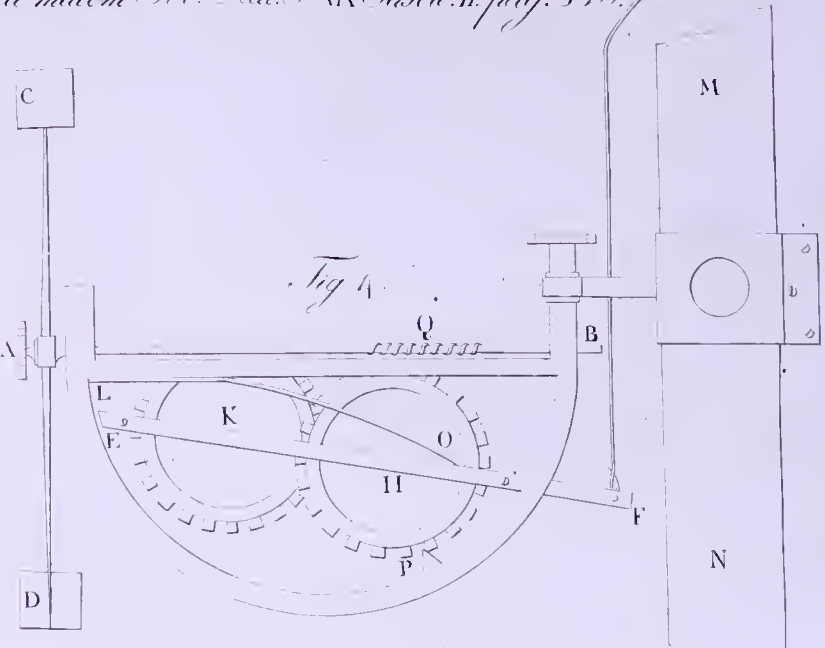

C
A
D
Q
B
L
E
K
O
H
F
P
M
N

Fig. 5.

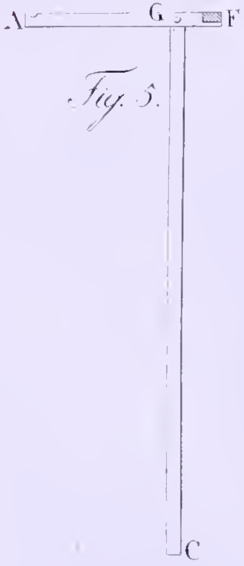


Fig. 6.

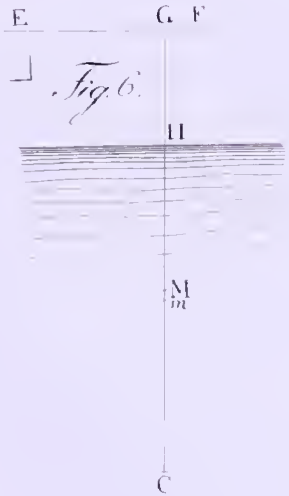


Fig. 7.

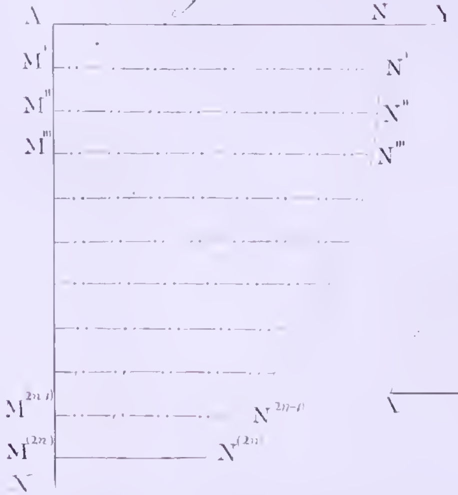
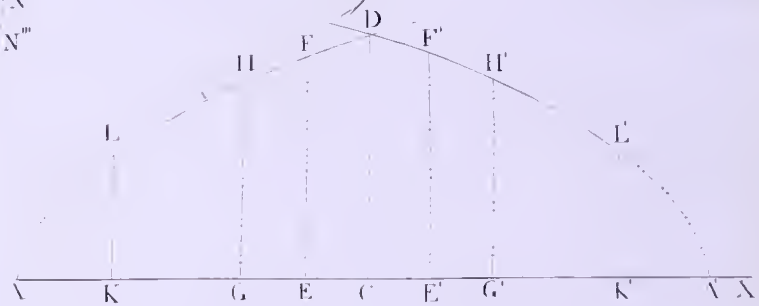
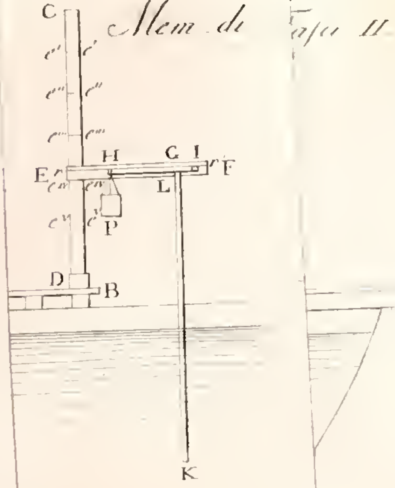

A
N
Y
M'
N'
M''
N''
M'''
N'''
M^(2n-1)
N^(2n-1)
M^(2n)
N^(2n)
X

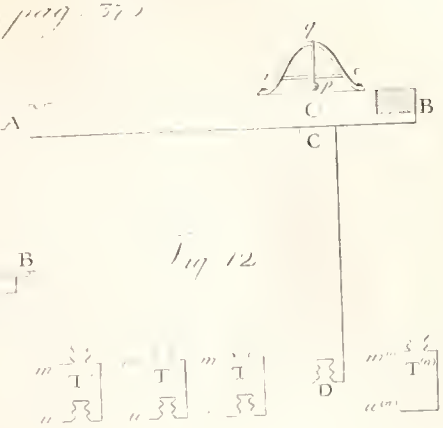
Fig. 8.


D
F
F'
H
H'
L
L'
A
K
G
E
C
E'
G'
K'
A'
X

Mem. di Tav. II. pag. 37



C
c'
c''
c'''
E
H
G
I
F
L
P
D
B
K



q
s
p
C
B
A
C
D
T
m
n
T'''

Fig. 12

Fig. 14

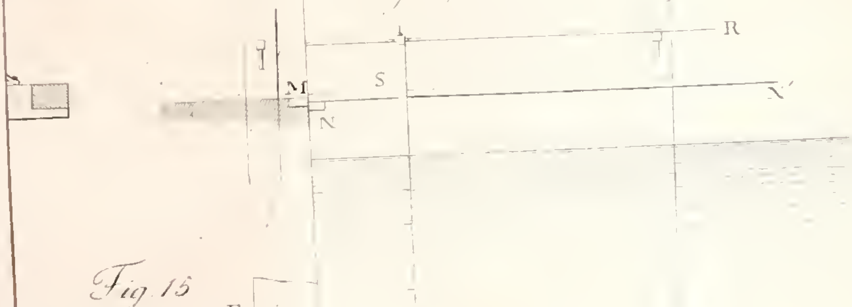


Fig. 15

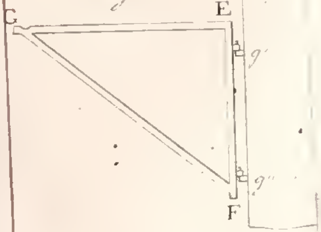


Fig. 9.

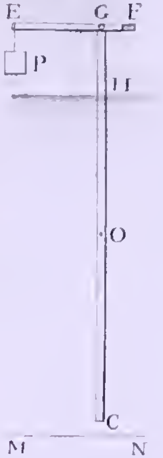


Fig. 10.

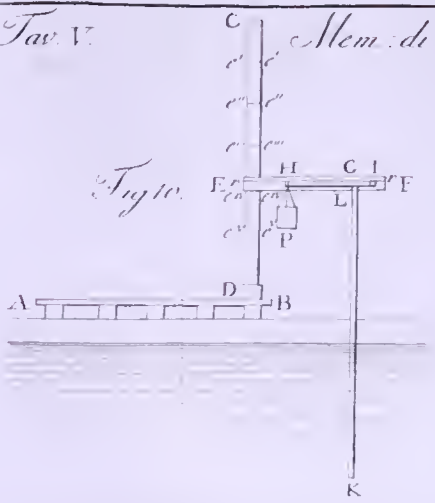

C
c'
c''
c'''
E
H
G
I
F
L
P
D
A
B
K

Fig. 11

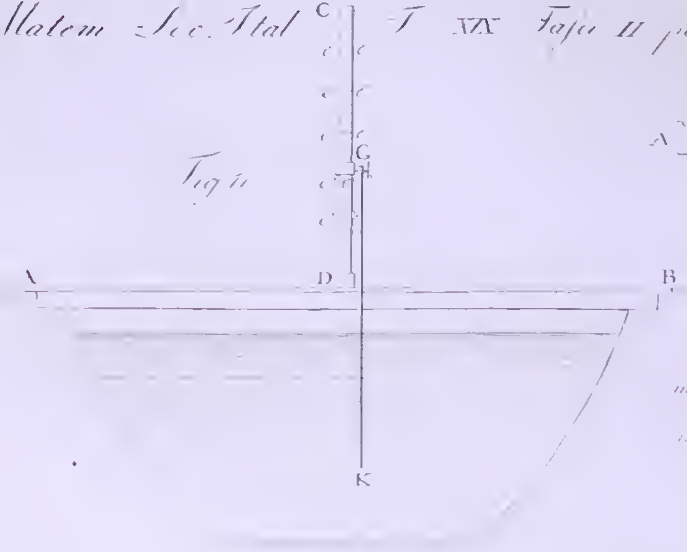


Fig. 12.

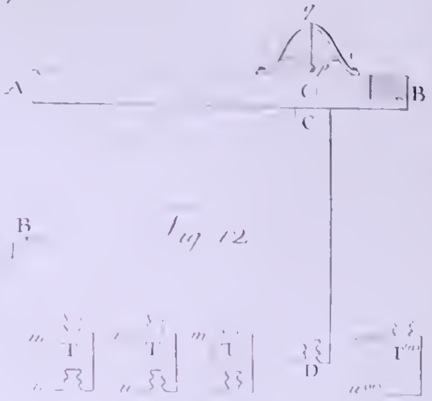


Fig. 13

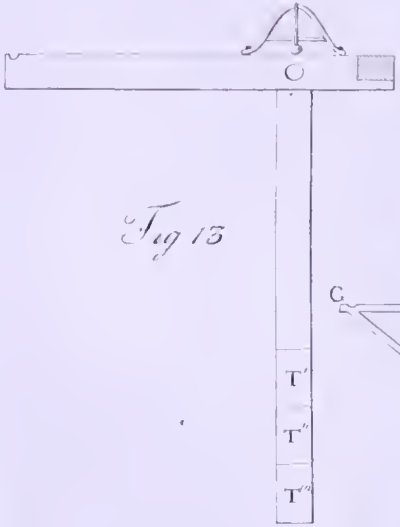


Fig. 14

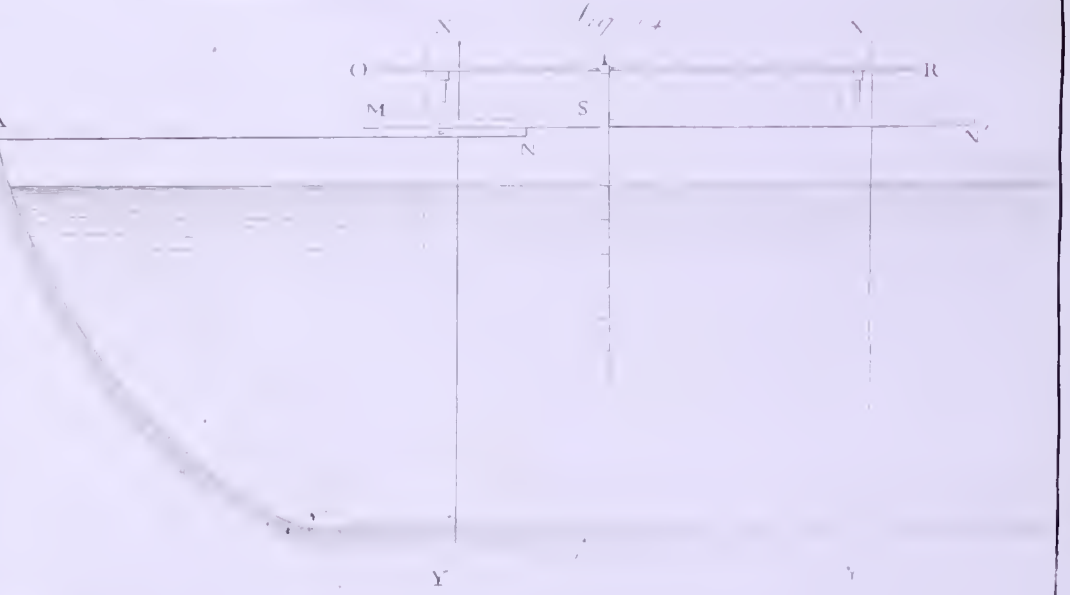
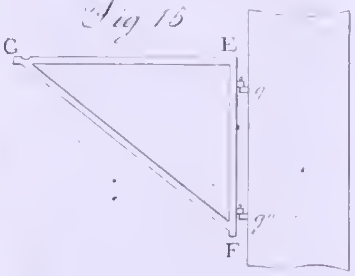
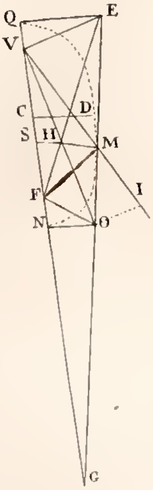
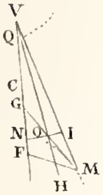


Fig. 15




Q
E
V
C
D
S
H
M
F
I
N
O
G


V
Q
C
G
N
O
I
F
M
H

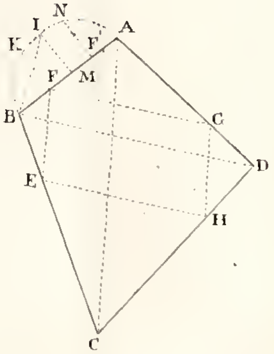
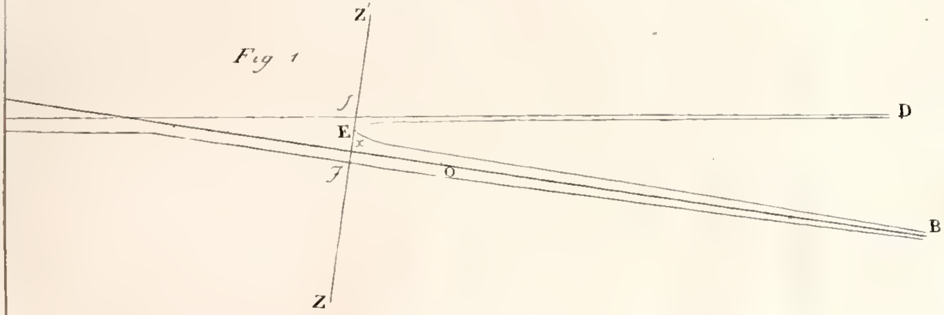

N'
I
A
K
F
F
M
B
G
D
E
H
C

Fig 1



2.

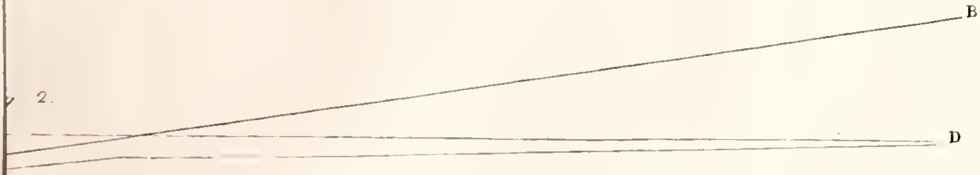


Fig. 1

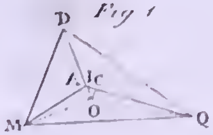
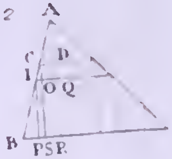
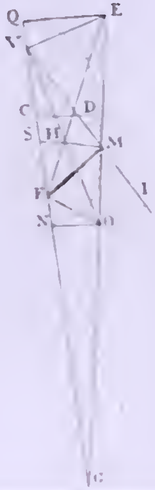
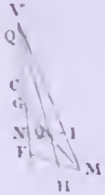
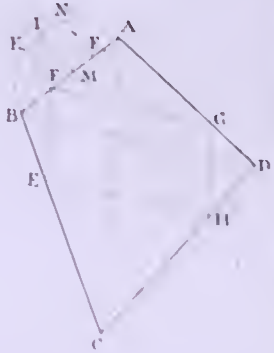


Fig. 2


A
C
D
I
O Q
B
P S R

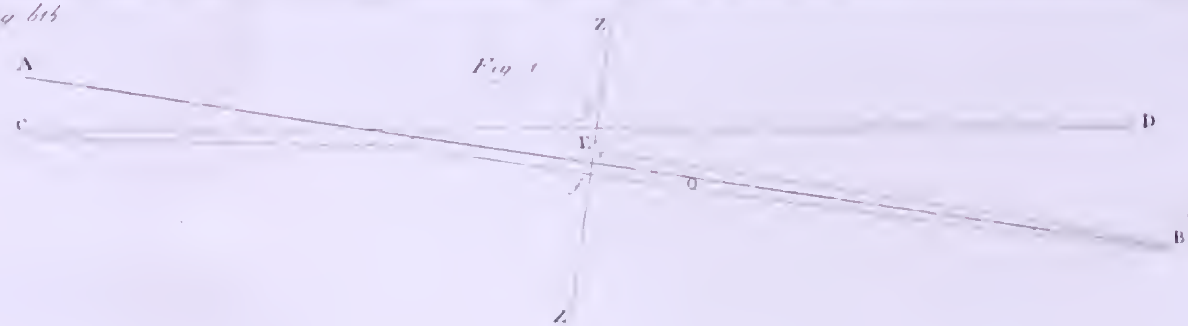

Q
E
V
C
D
S
H
M
F
I
N
O
G

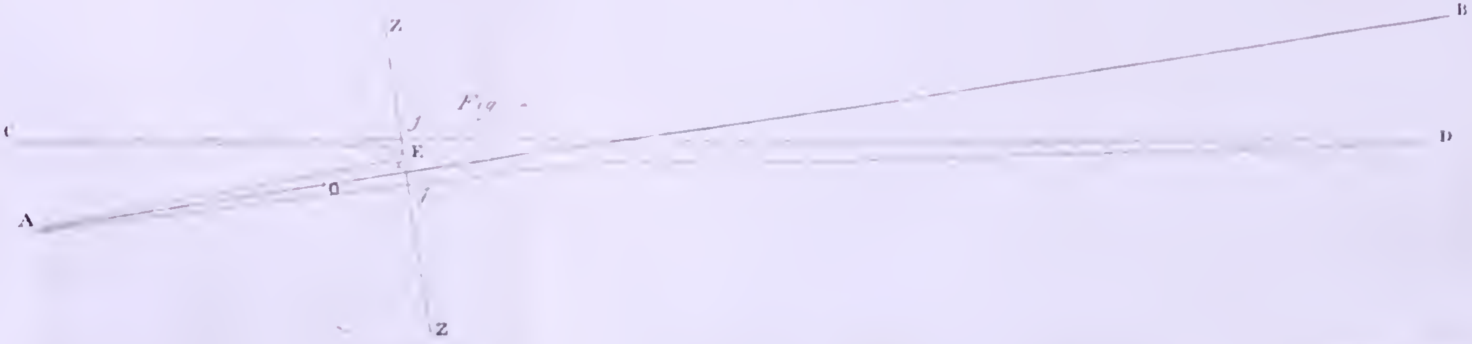

V
Q
C
G
N
O
I
F
M
H


N
I
K
F
A
F
M
B
G
D
E
H
C

Memoria Mossotti pag 615

Fig. 1




Z
B
Fig. 2
C
D
f
E
O
A
f
Z

SOPRA UN PROBLEMA

DEI SIGNORI DANIELE BERNOULLI, E DE LA GRANGE

MEMORIA

DEL SIGNOR CONTE

PIETRO ABBATI MARESCOTTI

SOCIO ONORARIO

Ricevuta adì 24. *Ottobre* 1822.

L'avventurosa, e per me onorevole circostanza d'avermi l'illustre Geometra, e distinto Letterato Signor Marchese Luigi Rangoni comunicato i suoi nuovi, e profondi pensamenti relativamente ad un problema di probabilità, che formano il soggetto di una Memoria da Esso Lui pubblicata nel fascicolo secondo del tomo decimo ottavo della Società Italiana delle Scienze, quella fu che m'indusse ad occuparmi della soluzione di altro problema concernente l'aspettazione. Lo scopo ch'io presi principalmente di mira quello fu di dimostrar vere le formule date dai Sommi Geometri Daniele Bernoulli, e De la Grange per la soluzione di alcuni problemi, i quali non ostante le non troppo acconcie espressioni da Essi adoprate nella sposizione dei correlativi enunciati, intender devonsi nel senso di aspettazione, e quindi ebbi in mira di conseguire l'intento di allontanare ogni ambiguità, e dubbiezza dal ramo delle matematiche discipline che riguarda il calcolo delle probabilità. (1)

---

(1) Veggasi il discorso fatto al § 7. della presente memoria sulla natura dei problemi di probabilità e di aspettazione.

All' enunciato, e alla soluzione del mio problema ho giudicato doversi premettere una motivata esposizione dell' opinione ch'io porto intorno al senso nel quale intender devonsi gli enunciati dei problemi sciolti da quei due lumi grandissimi delle matematiche scienze; opinione la quale grandemente ha in me avvalorata la perfetta identità dell' equazione e della formula da me ottenuta colla equazione, e colla formula che per la soluzione del suo problema diede il Sig. De la Grange in una Memoria che si legge fra quelle della Reale Accademia di Berlino per l' anno 1775.

1. Per l' esposto intento comincio dal rammentare che il Sig. De la Grange quantunque in modo più generale, non ostante in termini sostanzialmente niente dissimili da quelli antecedentemente adoprati da Daniele Bernoulli in una sua Memoria stampata nel tomo XIV. dei nuovi commentarj dell' Accademia di Pietroburgo per l' anno 1769, enuncia così il suo problema.

„ Sia dato un numero *a* di urne collocate di seguito, e
„ delle quali ciascuna contenga un egual numero *n* di vigliet-
„ ti parte bianchi, e parte neri secondo un riparto determi-
„ nato a piacere. Estraggasi contemporaneamente da ciascun'
„ urna un viglietto alla sorte, e si collochi il viglietto estratto
„ dall' una nell' altr' urna seguente, osservando di collocar nel-
„ la prima il viglietto estratto dall' ultima. Ciò presupposto
„ domandasi quale *probabilmente* sarà il numero dei viglietti
„ neri contenuti in ciascun' urna dopo un numero *t* di simi-
„ li estrazioni.

2. Ad indagare e quindi giungere, se fia possibile, a comprendere lo scopo vero della ricerca propostasi dal Sig. La Grange, suppongasi dapprima il caso più semplice qual' è quello di una sola estrazione, alla quale, siccome a tutte le altre susseguenti, dar si potrà il nome di *permutazione*. È chiaro in questo che potendo indifferentemente sortire da ogn' una delle *a* urne date ciascuno degli *n* viglietti in essa contenuti, e che ogni viglietto estratto da un' urna dovendo, per le

condizioni del problema, entrar nell' altra seguente, farà di mestieri il concepire, che in conseguenza della supposta permutazione ogn' una delle a urne date acquistar possa indifferentemente l' uno, o l' altro fra un numero di stati determinati, abbenchè non tutti differenti fra loro, espresso dalla n^a, ossia dal numero n dei viglietti contenuti in ciascun' urna elevato alla potenza a determinata dal numero a delle urne date.

3. Se di tutti i suddetti n^a stati presi relativamente ad una qualunque data, che chiamerò x, fra le urne accennate, suppongasi espresso mediante la P_0 il numero di quelli che si riferiscono al caso, pel quale in detta urna data non trovisi verun viglietto nero, mediante la P_1 il numero di quelli che si riferiscono al caso pel quale nella prefata urna trovisi un solo viglietto nero, mediante la P_2 il numero di quelli che si riferiscono al caso pel quale nella precitata urna trovinsi due soli viglietti neri ec. e finalmente mediante la P_n il numero di quelli che si riferiscono al caso pel quale nella mentovata urna trovinsi di color nero tutti gli n viglietti in essa contenuti, sarà la somma di tutte le precitate P segnate collo zero, uno, due ec. con n, uguale al numero n elevato alla potenza a, e la somma di tutti i viglietti neri contenuti in tutti gli n^a stati che l' urna data x può indifferentemente acquistare dopo la prima permutazione verrà rappresentata dalla somma delle P segnate moltiplicate ciascuna per un numero equivalente a quello che la controdistingue. Sarà quindi

$$P_0 + P_1 + P_2 + \ldots\ldots + P_n = n^a$$
$$0P_0 + P_1 + 2P_2 + \ldots\ldots + nP_n = T$$

supposto rappresentarsi dalla T il complessivo numero dei viglietti neri contenuti in tutti gli n^a stati che l' urna x può indifferentemente acquistare dopo la prima permutazione.

4. Lo che premesso cade tosto in acconcio il riflettere che se il Sig. La Grange nell'ipotesi di $t = 1$, vale a dire dopo la prima permutazione, proposta si fosse nel suo problema la determinazione della probabilità per la quale nell'assegnata urna x fosse residuato un concreto numero c non $> n$ di viglietti neri; in tale supposto, persuaso com' Egli doveva essere, che la probabilità di un evento determinato si esprime mediante una frazione il numerator della quale pareggia il numero dei casi favorevoli all' evento medesimo, e il denominatore pareggia la somma dei soli casi tutti possibili tanto favorevoli che contrarj all' evento stesso, rivolti avrebbe gli sforzi suoi alla determinazione del numero controssegnato dalla P_c, e sempre che gli fosse stato concesso di conseguirla, avrebbe quindi espressa la ricercata probabilità mediante la conosciuta frazione $\frac{P_c}{n^a}$. Che se in vece il Sig. De la Grange nel mentovato suo problema proposto si fosse di determinare quel numero di viglietti neri, il quale con maggiore, o con minore comparativa probabilità in paragone d' ogn' altro singolo possibile numero avesse potuto residuare nell' urna x dopo la prima permutazione, in allora, sempre, che gli fosse stato concesso di determinare l' una dietro all' altra tutte le P segnate, quella che fra esse avesse riscontrata di ogn' altra singola rispettivamente maggiore o minore, col proprio segno ossia col numero mediante il quale fosse stata dalle altre distinta, additato gli avrebbe il corrispondente numero ricercato.

Ora porto io ferma opinione che nè l' una, nè l' altra domanda precisamente emerga dalle parole colle quali il Signor De la Grange enuncia il suo problema. Conseguentemente porto uguale opinione che le parole medesime abbiano ad intendersi in tutt' altro significato.

5. È quindi che ad iscoprirlo suppongo racchiuse in un' urna un numero n elevato alla potenza a di palle, delle quali ne suppongo un numero denotato dalla P_0 entro ogn' una del-

le quali racchiudansi n viglietti tutti di color diverso dal nero, un numero denotato dalla P_1 contenenti ciascuna n viglietti de' quali un numero $n-1$ non colorati in nero, e l'altro di color nero ove in caratteri bianchi si trovi scritta una cambiale od un pagherò per l' ammontare di uno Zecchino; un numero denotato dalla P_2 contenenti ciascuna n viglietti due soli dei quali colorati in nero ed ove in ogn' uno in caratteri bianchi trovisi scritta una cambiale di uno Zecchino, ec., finalmente il restante numero denotato dalla P_n contenenti ciascuna n viglietti tutti colorati di nero, ed ove in ogn' uno trovisi in caratreri bianchi scritta una cambiale di uno Zecchino. Nella fatta ipotesi io rifletto che se per la conformazione, peso, ed ogn' altra circostanza delle date palle fosse egualmente probabile l' estrar dall' urna l' una, o l' altra di esse, se a chi dovesse estrarne una alla sorte venissero accordate in premio tutte le cambiali in essa contenute, se per l' intento di determinare il giusto prezzo in Zecchini col quale l'estraente vender potesse ad altri il premio che gli compete, si addomandasse dopo estratta una palla senza aprirla, quante probabilmente fossero le cambiali di uno Zecchino per cadauna, che è quanto dire il numero dei viglietti neri, in essa contenute, rifletto dissi che simil domanda riferir si dovrebbe alla determinazione dell' ammontare in Zecchini del premio aspettato da chi doveva estrarre dalla prefata urna una palla. Lo che stante siccome l'aspettazione componesi di ciascun premio aspettato moltiplicato per la rispettiva probabilità di conseguirlo, così alla fatta ricerca soddisfar dovrebbe un numero rappresentato da una frazione, il numerator della quale fosse la somma dei prodotti della P_0 moltiplicata per zero, della P_1 moltiplicata per uno, della P_2 moltiplicata per due ec. finalmente della P_n moltiplicata per n, e il denominatore fosse la somma di tutte le suddette P_0, P_1, P_2 ec. P_n. Soddisferebbe adunque alla fatta ricerca la frazione $\frac{T}{n^a}$.

6. Ritornando al La Grangiano problema io osservo, che nel supposto di una sola permutazione eseguita fra i viglietti delle a urne date, trattandosi di determinare lo stato che può quindi sortir l' urna x quanto al numero dei viglietti neri in essa contenuti, dovrà procedersi nel modo medesimo come se avesse a determinarsi il numero delle cambiali scritte in viglietti neri probabilmente contenute nella palla estratta a sorte dall' urna testè ideata. Lo che a comprovare varrà il riflettere che dopo la prima permutazione lo stato probabile della data urna x, quanto sia solamente al numero dei viglietti neri in essa contenuti dovrà identificarsi collo stato del numero aspettato dei viglietti del precitato colore contenuti in una piccola palla od urnetta estratta a sorte da un'urna più grande che ne racchiudesse delle prime un numero n^a; delle quali un numero denotato dalla P_0 non contenenti verun viglietto nero, un numero denotato dalla P_1 contenenti ciascuna un solo viglietto nero, un numero denotato dalla P_2 contenenti ciascuna due soli viglietti neri ec. e finalmente il restante numero denotato dalla P_n contenenti ciascuna n viglietti neri.

Raccogliendosi poi dalla teoria delle combinazioni che il numero degli stati, quantunque non tutti differenti fra loro, i quali dopo t permutazioni può indifferentemente, e con eguale probabilità in confronto l'uno dell'altro acquistar l'urna x, viene espresso dalla n elevata alla potenza indicata dal prodotto ta, ed osservandosi d' altronde, che a questo caso eziandio applicar puossi il precedente discorso, supponendo una grand' urna entro la quale racchiuse trovinsi, per estrarne una alla sorte, n^{ta} piccole urnette, delle quali il competente numero designato mediante la P_0 non contenenti verun viglietto nero, il competente numero P_1 contenenti ciascuna un solo viglietto nero, ec. e finalmente il competente numero P_n contenenti ciascuna un numero n di viglietti neri, rendesi manifestamente non destituta di valido fondamento l' opinione ch'io porto così nel caso di una sola, siccome nell' altro di un qualunque numero t di permutazioni, che l' enunciato del problema del Sig. La Grange abbia ad intendersi in senso di *aspettazione*.

7. A vie meglio chiarire la cosa, e a stabilir quindi il senso nel quale prender devesi l'enunciato del problema del prefato Geometra, e l' uso che potrà farsi della formula da esso ottenuta, io rifletto che nel caso di molti contingibili eventi può addomandarsi la relazione del modo e del come una porzione fra essi accader possa in confronto del modo e del come accader possano tutti, o una sola altra porzion dei restanti, e può addomandarsi in difetto il risultato che fosse per generarsi dalla verificazione di ognuno, la quale si figurasse aver luogo secondo il proprio grado di probabilità. Osservo in conseguenza doversi far luogo a due distinti generi di problemi, ch' io chiamerò di *probabilità*, e di *aspettazione*, secondo che le ricerche si rapporteranno rispettivamente alla prima, o alla seconda delle enunciate domande. A conoscere pertanto quando un problema appartenga al primo, e quando al secondo dei mentovati generi, farà quindi mestieri l' esaminare attentamente la natura della quistione. Se emerga da essa, a non poter dubitarne, doversi riferire lo scopo principale dell' indagine alla determinazione del rapporto fra il modo e il come dati eventi in fra molti accader possano, e il modo e il come accader possan tutti, o una sola data porzione dei restanti, in allora il problema dovrà dirsi di *probabilità*: diversamente di *aspettazione*. Siccome poi le domande che si fanno nei problemi possono variare in moltissime guise, così non di rado accadrà che per la soluzione dèi problemi medesimi rendasi necessario il decomporli in altri subalterni più semplici talchè analizzandone, la natura si scorgano appartenere a un terzo genere composto dei

due enunciati. Restringendosi a queste tre sorta tutti i problemi che si riferiscono a contingibili eventi, ed anzi l' una di esse non essendo se non che un composto delle due altre, la soluzione di tutti i prefati problemi dipenderà dalle regole per la determinazione della probabilità semplice, e dell' aspettazione. Consistono tali regole, come è già noto, e come è poi evidente dietro le date definizioni, nel determinare la probabilità mediante una frazione il numerator della quale pareggi il numero dei casi favorevoli al successo dei dati eventi, e il denominatore pareggi la somma dei soli casi tutti tanto favorevoli che contrarj al successo degli eventi medesimi (2), e nel fissare l' aspettazione nell' equivalente

---

(2) Sarà della destrezza del calcolatore il poter fare a norma delle condizioni del problema una giusta valutazione dei soli casi favorevoli e degli altri soli contrarj a un dato evento, onde poterne esprimere la probabilità mediante il rapporto del complesso dei primi al complesso degl'uni, e degl'altri. Ciò non pertanto varrà sempre a un tal uopo il considerare nella massa di tutti i contingibili eventi quale sia il complesso dei favorevoli, e quale il complesso dei contrarj a quello di cui vuolsi determinare la probabilità in confronto con altri dati. Per rischiarare la cosa mediante un esempio, se da due urne A, B delle quali la prima A contenga un numero m di viglietti segnati tutti colla lettera v ed il restante numero espresso da n tutti segnati colla lettera f, e la seconda B contenga un numero m' di simili viglietti tutti segnati colla lettera v, ed il restante numero espresso da n' tutti segnati colla lettera f, venga contemporaneamente estratto un viglietto alla sorte, e se dopo fatta l' estrazione, unicamente sapendosi che i viglietti estratti sono marcati con simili lettere, si addomandasse la probabilità mediante la quale dette lettere simili fossero piuttosto le v che le f; in tal caso osservatosi che nel complesso dei contingibili eventi espresso dal prodotto $(m+n)(m'+n')$ il prodotto mm' esprime quello dei casi favorevoli ed nn' esprime l'altro dei contrarj all'evento in questione, la ricercata probabilità verrebbe denotata dalla frazione $\frac{mm'}{mm'+nn'}$. Se dunque tanto nell' una quanto nell'altra delle due urne date il numero dei viglietti segnati colla lettera v superasse quello degli altri segnati colla lettera f che è quanto dire se fosse $m>n$, $m'>n'$, sarebbe $\frac{mm'}{mm'+nn'} = \frac{1}{1+\frac{nn'}{mm'}}$

$$> \frac{m}{m+n} \text{ ed altresì } > \frac{m'}{m'+n'}.$$

dell'aggregato di ciò che produce ogni singolo evento, lo che vale quanto dire dell'aggregato dei prodotti di ciò che vien ge-

---

Varrà quest' esempio a rendere evidentemente palese che sempre quando conseguir si potesse, ciò che d' altronde è fuor d' ogni dubbio impossibile, di valutare se non con tutta precisione, almeno con pochissima distanza dal vero la particolare disposizione in qualunque siasi testimonio immediato od a voler ingannar altri, o ad essere egli stesso ingannato, e che quindi rapporto ad ogn' uno in particolare assegnar si potesse se non esattamente, almeno prossimamente una frazione che ne stabilisse il grado di sua assoluta veracità, in tal caso mediante l'applicazione dei su-esposti principj con cui risolvonsi i mentovati problemi appartenenti al calcolo delle probabilità, pervenir si potrebbe senza l' uso d' altro più sodo e meno improprio ragionamento ad ottenere quella tale approssimazione la quale fosse sufficiente, ed anzi più che bastante a determinarci ad accordare, o a rifiutare la nostra adesione alla fatta testimonianza. Difatti per ciò che nella predetta non concessa ipotesi resterebbe solo a ribattere, vale a dire l' objezione che suolsi fare alla precitata applicazione, che in conseguenza di essa quanto maggiore fosse il numero delle testimonianze uniformi, tanto minori in paragone dell' unità con cui s' esprime la certezza, sarebbe la frazione mediante la quale verrebbe assegnato il grado di verità delle testimonianze medesime, ella cadrebbe al solo riflesso, che sempre quando i testimonj adoprati fossero in effetto, quali devon essere d' altronde per essere ricevuti, più spesso veritieri che mendaci, le notate formule anzi che una frazione minore, quanto alla probabilità del vero, somministrerebbero una frazione sempre maggiore e sempre più prossima all' unità quanto maggiore fosse il numero delle conformi loro asserzioni, per modo tale che quanto maggiore fosse il numero delle predette asserzioni conformi, altrettanto maggior motivo dovrebbe ricavarsi onde restare convinti della verità dell' asserto.

Anche alla valutazione della credibilità dovuta ad un testimonio mediato, il quale in prova dell' asserto suo allegasse l'asserto di altro testimonio immediato varrà la proporzione del numero dei casi favorevoli al complessivo dei favorevoli e contrarj al successo della cosa asserita. A calcolar gli uni e gli altri quando fosse dato, ciò ch' è d'altronde impossibile, di poter determinare con precisione il grado di veracità sì del testimonio mediato, che del testimonio immediato, onde il primo nelle volte $m+n$ potesse supporsi dire il vero costantemente le volte m, ed il falso le volte n, ed il secondo nelle volte $m'+n'$ potesse egualmente supporsi dire il vero costantemente le volte m', ed il falso le volte n', gioverà a norma dei casi la destrezza del calcolatore, a diriger la qual porto io ferma opinione che non sarà affatto inutile l' applicazione del ragionamento che son per fare nell'esempio seguente.

nerato da ogni evento moltiplicato per la rispettiva probabilità di accadere. È perciò che nella soluzione dei problemi puramen-

---

Il testimonio mediato M allegando l'asserto del testimonio immediato I assicura che nell'estrazione del Lotto il primo numero estratto fu il numero 10. Il testimonio M ad ogni dieci volte, e l'altro I ad ogni cento, dicono il falso una sol volta. Cercasi dietro l'asserto di M quale sarà il grado di probabilità che il 10 sia effettivamente sortito pel primo estratto del Lotto.

Nell' adotto esempio il numero dei casi tutti tanto favorevoli quanto contrarj all'asserto del testimonio M viene rappresentato del prodotto $10 \times 100 = 1000$. Il numero poi dei casi che fra i mille sovr' accennati son favorevoli all' asserto di M si troverà riflettendo che detto numero deve necessariamente comporsi della somma dei casi favorevoli alla verità dell' asserto medesimo derivati dalla supposizione che il testimonio M sia veritiero, e degli altri casi pur favorevoli alla verità del ripetuto asserto derivati dalla supposizione contraria che il testimonio M sia menzognero. Per quanto al numero de' primi è chiarissimo che verrà rappresentato dal numero 9 delle volte che ad ogni dieci il testimonio M dice il vero moltiplicato pel numero 99 delle volte che ad ogni cento il testimonio I dice esso pure la verità. Per quanto poi al numero de' secondi, siccome il testimonio M dicendo il falso lo può dire allegando in diverso modo dal vero la testimonianza fatta da I, lo che nel caso concreto si verificherebbe allor quando il testimonio I in luogo del 10 avesse asserito estratto pel primo un tutt'altro numero, e lo può dire allegando la testimonianza di I che non sussista per niente, così, supponendo M egualmente disposto a dire il falso nell' uno ed altro modo, pel caso primo vedrassi, che non potendosi verificare sortito il 10 pel primo estratto del lotto se non se in circostanza che il testimonio I fosse stato mendace, e che quindi in vece del 10 effettivamente sortito pel primo estratto ne avesse enunciato un tutt'altro degli 89 numeri restanti, ed essendovi la ragione di 1 : 89 che il testimonio M col suo mendacio abbia prescielto il 10 che vuolsi effettivamente sortito in fra gli 89 suddetti il numero delle circostanze favorevoli al successo dell' evento asserito da M verrà esattamente espresso da $\frac{1}{2} . 1 . \frac{1}{89}$. Nel caso secondo poi non sussistendo il testimonio I, e perciò in tutte le 100 volte nelle quali ei dice il falso una volta potendo il 10 essere stato effettivamente estratto pel primo numero del lotto mediante una probabilità espressa dalla ragione 1 : 90, è chiaro che il numero delle circostanze favorevoli al successo dell' evento enunciato dal testimonio M verrà espresso da $\frac{1}{2} . 100 . \frac{1}{90}$. Sommendo pertanto tutti i preindicati casi favorevoli al successo dell' evento sud. e dividendo per 1000 che è il compleste di aspettazione si ricadrà sempre in quella di molti problemi di probabilità, quando non possa supplirvisi con altro equivalente artifizio; ed è perciò ancora che dovranno dirsi risolubili tutti i problemi di simil genere quando tutti i casi contingibili, de' quali determinar vuolsi il risultamento, non sieno della stessa natura omogenea. Di fatti se racchiuse entr' un' urna si rinvenissero nove palle, tre delle quali numerizzate con distinti numeri, tre altre controsegnate con distinte lettere, e le tre rimanenti colorate con tre diversi colori, e fosse richiesto quale probabilmente sarebbe la palla estratta da chi dovesse dalla prefata urna levarne una alla sorte; veduto in tal caso che il problema non può riferirsi al genere di quelli di probabilità, giacchè non domandasi il rapporto del modo e del come uno o più fra i contingibili eventi accader possa col modo e col come accader possano tutti, o una data porzione dei restanti, e veduto d'altronde che non è fattibile sommare assieme numeri, lettere e colori, dovrà concludersene impossibile la soluzione.

Quanto ai risultati provenienti dalla soluzione dei problemi di aspettazione, che il più delle volte diversificano da ogni evento contemplato dai problemi medesimi, io rifletto che la cosa non può stare diversamente, e che anzi nei rarissimi casi nei quali il risultato d' aspettazione equivalga ad uno dei contingibili eventi contemplati dal problema, non potrà da questo inferirsi, che l' evento medesimo avesse per se una maggiore probabilità per succedere, dovendosi ognor ritenere che il risultato predetto non fa che rappresentare il complesso di ciò che produce ogni singolo evento moltiplicato per la rispettiva probabilità di accadere. Per darne un esempio, venga

---

sivo numero dei favorevoli e contrarj al successo dell' evento medesimo si otterrà per la ricercata probabilità la frazione

$$\frac{9.99+\frac{1}{2}.\ 1.\ \frac{1}{89}+\frac{1}{2}.100.\frac{1}{90}}{1000}$$
$$=\frac{2856562}{3204000}=0,89156117 3\ldots\ldots$$

richiesta l' aspettazione del numero estratto da un' urna in cui sieno collocati i tre numeri 1, 2, 3 e d'onde se ne levi uno alla sorte. Siccome l'aspettazione richiesta viene espressa dalla formula $\frac{1+2+3}{3} = 2$, e quindi da un numero equivalente ad uno di quelli che casualmente posson sortire dall'urna, così non dovrà inferirsene che l'estrazione del 2 sia maggiormente probabile di quella degli altri numeri, giacchè separatamente presi l' uno in confronto dell'altro, l'estrazione del 2 è egualmente probabile di quella d' ogn' uno degl' altri due, e presi questi in complesso, l' estrazione di uno, qualunque fra essi, è doppiamente probabile in confronte dell' estrazione del 2.

Quanto sia finalmente all' uso che potrà farsi delle soluzioni dei problemi di aspettazione, li quali non somministrano risultato che non sia il più delle volte diversissimo da ogni contingibile evento, io rifletto che potranno d' esse in alcuni casi servire a fissare la *sorte* ovvero sia la speranza del conseguimento di qualche premio, o il timore della sofferenza di qualche pena, ed in altri a determinare l' ammontare dei casi favorevoli al successo di un dato evento nella soluzione di molti problemi di misto genere lo scopo principale de' quali fosse di assegnare la probabilità di un evento determinato.

Analizzando dietro gli esposti principj il problema del sig. De la Grange sarà facile il riconoscerlo del genere di quelli di aspettazione. Dovrà per altro convenirsi, che la formula data per la sua soluzione, della verità di cui m'occuperò nel decorso, senza il riferimento ad una qualche domanda sia per fissar la speranza o il timore di ottener qualche premio, o di subir qualche pena, sia per la determinazione dei casi favorevoli al successo di qualche concreto evento in problemi di probabilità, isolatamente niente significa (3). E valga il vero: cosa può mai significare il risultato che il più delle volte s'ottiene dalla mentovata formula composto d'un numero intero e di una frazione? Non una probabilità giacchè, prescindendo dal fin quì detto, è a tutti noto che l'espressione della probabilità non deve superar quella della certezza, che suole indicarsi coll' unità. Non l'aspettazione di un evento equivalente al risultato ottenuto dalla formula, giacchè essendo quest' ultimo il più delle volte composto di un intero, e di una frazione per le condizioni del problema impossibile se ne renderebbe il conseguimento. Dunque isolatamente presa la formula stessa nulla significa. Ciò nulla meno determinata, come lo è stata dal La Grange, se venisse poscia richiesta la valutazione del premio, o della pena di chi rispettivamente dovesse conseguire o pagare tante specificate monete quanti fossero i viglietti di un dato colore effettivamente residuati in una assegnata delle urne date dopo un prefinito numero t di permutazioni, o venisse richiesta la probabilità per esempio di estrar dall'urna del Lotto il numero 90 dovendosi in una sola estrazione levar dall' urna medesima tante palle quanti fossero i viglietti del prefato colore residuati dopo t permutazioni nell' assegnata urna del Sig. De la Grange; in allora la formula da Esso ottenuta col suo astratto significato d' interi e frazioni varrebbe ad indicare nel caso primo la sorte, ossia il numero delle stabilite monete che si potessero corrispondentemente percepire o pagare, e nel caso secondo indicherebbe il numeratore di una frazione cui ponendo per denominatore il 90 si perverebbe alla determinazione della ricercata probabilità. Non varrà poi l' opporre un ragionamento che potrebbe formarsi a tutta prima dietro l'esempio che son per dare, mentre da questo se ne ricava al contrario una maggiore conferma. Dall' urna del Lotto estrar si debbano tutto ad un tratto tante palle quante unità comprenda un numero levato alla sorte fra i quattro dati 7. 8. 9 e 10, e sia quindi richiesta la probabilità che in ciò facendo sorta dall'urna del Lotto il numero 90. Veduto in tal caso che l'aspettazione del numero estratto fra i quattro dati si esprime mediante la frazione

---

(3) È per ciò che a dimostrar vera la formula del Sig. La Grange mi sono valso al §. 10. di un problema di *sorte*:

$\frac{7+8+9+10}{4} = 8\frac{1}{2}$, avrebbe a concludersi conforme al già detto che la ricercata probabilità sarebbe determinata dalla frazione $\frac{8}{90} + \frac{1}{180} = \frac{17}{180}$. Or si potrebbe quì opporre che per le condizioni del problema estrar si devono dall'urna del Lotto tante palle quante unità contiene il numero pria levato a sorte dai quattro 7. 8. 9, 10; che dunque in ogni caso la frazione esprimente la ricercata probabilità avendo per denominatore il 90 non potrà avere per numeratore un numero diverso dai dati, e tanto meno il numero $8\frac{1}{2}$ che mai potrebbe sortire nell' estrazione che dee preceder quella dei numeri dell'urna del Lotto; che in conseguenza dovrà ritenersi erronea la soluzione che ci somministra il metodo fin quì esposto, e così la frazione $\frac{17}{180}$ non esprimerà il vero risultato che si ricerca. Or se ben si rifletta che la probabilità ricercata si compone dei casi pei quali dai quattro dati numeri può levarsi ogni uno di essi, che levando per esempio il 7, lo che può accadere mediante un grado di probabilità espresso dalla frazione $\frac{1}{4}$, la probabilità per la quale possa quindi estrarsi dall' urna del Lotto il numero 90 verrà espressa dalla frazione $\frac{7}{90}$, e che in conseguenza la probabilità composta di levare il 7 dai quattro numeri dati, e successivamente il 90 dall' urna del Lotto, verrà espressa dal prodotto $\frac{1}{4} \times \frac{7}{90}$; che egualmente la probabilità composta di levar dai quattro dati il numero 8, e successivamente il 90 dall'urna del Lotto verrà espressa dal prodotto $\frac{1}{4} \times \frac{8}{90}$, ec., e che quindi la probabilità di levar il 90 dall' urna del Lotto estraendo dalla medesima tante palle quante unità contengonsi nel numero levato a sorte dai quattro dati, verrà espressa dalla somma

$\frac{1}{4}\times\frac{7}{90}+\frac{1}{4}\times\frac{8}{90}+\frac{1}{4}\times\frac{9}{90}+\frac{1}{4}\times\frac{10}{90}$ equivalente alla frazione $\frac{7+8+9+10}{4\cdot 90}$ ossia equivalente all'aspettazione del numero levato a sorte dai quattro dati che si è rinvenuta uguale a $\frac{7+8+9+10}{4}$ divisa per 90, non rimarrà dubbio veruno intorno alla verità di quanto è stato asserito.

8. Posto ora che nel senso d'aspettazione siccome è stato definito nell'antecedente §.° abbiano ad intendersi le espressioni adoprate dal Sig. De la Grange nell'enunciato del suo problema, resta a verificare se la formula data per la sua soluzione, affinchè sia capace di soddisfare all'intento, equivalga mai sempre alla frazione

$$\frac{0P_0+P_1+2P_2+\ldots\ldots+nP_n}{P_0+P_1+P_2+\ldots\ldots+P_n}$$

vale a dire ad una frazione, il numerator della quale pareggi l'aggregato del numero degli stati possibili dell'urna x, nella quale non trovisi verun viglietto nero moltiplicato per zero, del numero degli stati possibili di detta urna x, ove per ciascheduno trovisi nell'urna stessa un solo viglietto nero moltiplicato per uno, ec., e finalmente del numero degli stati possibili della mentovata urna x, nei quali trovinsi di color nero tutti gli n viglietti in essa contenuti, moltiplicato per n, e il denominatore pareggi la n elevata alla potenza ta, che rappresenta il complessivo numero $P_0+P_1+P_2+\ldots\ldots+P_n$ degli stati sopra indicati.

9. Per tanto eseguire s'affaccia tosto alla mente potersi adoprare due metodi, dipendente il primo dalla soluzione di un problema puramente di *probabilità* col quale richiesto fosse di determinare l'uno dopo l'altro i valori tutti delle P segnate, vale a dire di determinare l'uno dopo l'altro tutti i corrispondenti numeri degli stati possibili dell'urna x nella quale dopo t permutazioni fossero rispettivamente residuati zero, uno, due, ec., n viglietti neri; dipendente il secondo metodo

dalla soluzione di un problema di combinazioni col quale richiesto fosse di determinare la preindicata frazione senza conoscere uno ad uno precisamente i valori tutti delle precitate P segnate.

Dappoichè al meritissimo Presidente di questa Società Italiana delle Scienze Signor Marchese Luigi Rangoni, non ostante le correzioni da Esso fatte ai risultati prima ottenuti dal Sig. Malfatti in una sua Memoria intitolata ,,Esame critico di un problema di probabilità di Daniele Bernoulli,, che vedesi stampata nel Tomo I.° delle Memorie di detta Società, non fu concesso di rinvenire una formula generale per l' immediata determinazione delle P_0, P_1, P_2, ec., P_n e così per la soluzione del primo problema abbenchè ristretto al caso di due sole urne, e dappoichè emersero anzi al prelodato Sig. Marchese alcune profonde riflessioni sulla temuta impossibilità di poter giungere a conseguire l' integrazione di quell'equazione a differenze finite parziali da Esso stabilita al §. 14 della sua Memoria, e colla quale possonsi generalmente esprimere le mentovate P_0, P_1, P_2, ec., P_n, risolsi di tentare ogni via onde pervenire alla ricercata verificazione, e però mi proposi di sciogliere col secondo metodo il problema che si vedrà enunciato nel seguente paragrafo. Avendo poi conseguito il mio intento e dal paragone della formula da me ottenuta colla formula del Sig. La Grange avendo rilevata fra l' una e l' altra una perfetta identità, ho tutto il fondamento per ritenere di essere quindi pervenuto a dimostrare ad evidenza siccome il senso nel quale intender devesi l' enunciato del problema di quel grande Geometra, così la verità e l' uso della formula ch' Ei ci ha tramandata per la sua soluzione (4).

---

(4) A lode del vero non deve tacere l' Autore della presente Memoria, che il Sig. Marchese Luigi Rangoni leggendo nel 1811 l' esame critico fatto dal Malfatti di un problema di probabilità di Daniele Bernoulli aveva fin d'allora traveduto siccome il senso vero dell' enunciato di quel problema, così il

10. Problema. Dato che in un numero a di urne circolarmente disposte, e contenenti ciascuna un ugual numero n di viglietti in qualunque assegnato modo diversamente colorati, si permutino t volte i viglietti medesimi costantemente ad ogni volta in questo modo, che dopo estrattone contemporaneamente un solo da ciascun' urna, si riponga il viglietto estratto dall' una nell' altr' urna immediatamente seguente progredendo sempre circolarmente senza mai retrocedere, trattasi di determinare un numero, cui darò il nome di $y_{x,t}$, tale che avesse a ritenersi perfettamente uguale la sorte di due giocatori allorquando per le condizioni del gioco loro, l' uno dovesse dare all' altro, o vicendevolmente riceverne tante monete di

---

modo da tenersi, onde usando del canone di Nicolò Bernoulli che si legge a pag. 62 del tomo 5. degli opuscoli matematici estratti dagli atti di Lipsia, poter pervenire a dimostrar vera la soluzione datane da quel grande geometra. Non deve tacer nemmeno l' Autore della presente Memoria, che il prefato Sig. Marchese aveva saggiamento rinvenute le ragioni da opporre alle due speciose obbiezioni poste in campo dal Malfatti contro la formula Bernoulliana applicata al caso più semplice del correlativo problema, vale a dire al caso di due urne sole; e che tutto questo apparisce da una dotta lettera scritta il 30. Agosto 1811 dal prelodato Cavaliere ad un Matematico Modonese suo intimo conoscente. In appresso abbandonato il pensiero della difesa della formula Bernoulliana il suddetto Sig. Marchese prese a considerare il problema sotto l' altro aspetto *di probabilità*, e cercò se in questo ancora poteva trattarsi col calcolo delle differenze finite. Stabilitane la correlativa equazione, che non gli fu difficile di conseguire; s' accorse che non poteva questa integrarsi perchè conteneva funzioni dissimili, ed osservò saggiamente che all' integrazione di essa siccome d' ogni altra equazione consimile detta circostanza vi frapponeva un' obice insurmontabile. Questa difficoltà però seppe maestrevolmente superare la sagacità del sullodato Signor Marchese, giovandosi Egli per la soluzione del problema di un metodo, che tale si ravvisa da potersi utilmente applicare a quelle equazioni alle differenze, che contenendo funzioni simili non sono integrabili coi metodi conosciuti, non meno che a quelle, le quali come la già considerata nel caso in questione, contenendo funzioni dissimili, non sono perciò trattabili coi processi del calcolo delle differenze finite. (V. la precitata Memoria del sullodato Sig. Marchese Rangoni).

convenuta specie colle corrispondenti loro frazioni, quanta rispettivamente si riscontrasse la differenza in più, od in meno fra il ricercato numero $y_{x,t}$ ed il numero de' viglietti di un dato colore effettivamente rinvenuti dopo le accennate t permutazioni in una qualunque assegnata delle a urne date.

Alla soluzione del proposto problema vuolsi in primo luogo premettere, che l'urna, intorno alla quale trattasi di stabilire il prefato numero $y_{x,t}$, chiamisi col nome di x, che l'altra urna prossima a questa procedendo circolarmente in senso contrario a quello con cui si procede nel collocare dopo l'estrazione i viglietti dall' una all' altr' urna, chiamisi col nome $x-1$, che l' urna prossima a quest' ultima, procedendo allo stesso modo, chiamisi $x-2$, e così del resto talchè essendo a il numero delle urne date, l'urna cui poscia competesse il nome $x-a$ fosse l' identica urna x, ed egualmente fossero l'identica urna x quelle cui competessero i nomi $x-2a$, $x-3a$, ec., e parimenti fossero l'identica urna $x-1$ quelle cui competessero i nomi $x-a-1$, $x-2a-1$, ec.; fossero l' identica urna $x-2$ quelle cui competessero i nomi $x-a-2$, $x-2a-2$ ec. ec.

Vuolsi in secondo luogo premettere la supposizione che in corrispondenza della prima, e così d' ogn' altra permutazione, sia dato d' imaginare tanti sistemi, ossia corone delle accennate urne x, $x-1$, $x-2$, ec. $x-a+1$ quante sono le possibili combinazioni le quali sortir possono dal reale supposto che in luogo di ciascun viglietto estratto da ogni urna x entri ogn' uno degli n viglietti pria contenuti nella corrispondente urna $x-1$, che in luogo di questo entri ciascun viglietto pria contenuto nella corrispondente urna $x-2$, ec.

Vuolsi finalmente premettere che in corrispondenza di ogni singola permutazione dato sia di poter figurare un cilindro attorno al quale in altrettanti piani paralleli disposte vedansi le prefate corone di urne, rappresentanti tutti i possibili eventi derivati dalla permutazione medesima, talmente situate che quelle dello stesso nome, vale a dire le urne x, $x-1$, $x-2$ ec. $x-a+1$ si corrispondano in linea verticale.

Lo che premesso cade tosto in acconcio l'osservare.

I.° Che mediante le n^{a}, n^{2a}, n^{3a}, ec. $n^{(t-1)a}$, n^{ta} verranno espressi i precisi numeri dei sistemi, ossia corone, composte ciascuna di un numero a di urne x, $x-1$, $x-2$, ec. $x-a+1$ nell' accennata guisa distribuite attorno al corrispondente 1.° 2.° 3.° ec. $(t-1)^{esimo}$, t^{esimo} cilindro correlativamente al rispettivo supposto che siano state eseguite fra i viglietti delle a urne date una oppure due, o tre, ec. oppure $t-1$, oppure t permutazioni.

II.° Che dunque il numero delle urne sotto un dato nome qualunque siasi x, $x-1$, ec. $x-a+1$ verticalmente collocate, siccome è stato ideato, sulla superficie del cilindro t^{esimo} sarà n^{a} volte molteplice del numero delle urne sotto lo stesso corrispondente, o sotto altro nome qualunque similmente collocate sulla superficie dell' antecedente cilindro $(t-1)^{esimo}$.

III.° Che la colonna verticale delle urne x del cilindro t^{esimo} potrà formarsi mediante le urne dotate dello stesso nome x del cilindro $(t-1)^{esimo}$, supponendo da ogn'una di queste estratti un dopo l'altro tutti gli n viglietti in essa contenuti, e supponendo che nella colonna verticale delle urne x del cilindro t^{esimo} esistano tante corrispondenti urne x quanti per ciascun viglietto come sopra estratto da ogni urna x del cilindro $(t-1)^{esimo}$ sono i modi di combinazione coi quali può farsi, che in luogo del viglietto medesimo entri ciascuno degli n viglietti pria contenuti nella sua vicina corrispondente urna $x-1$, che in luogo di questo entri in detta urna $x-1$ ciascun viglietto pria contenuto nella sua vicina corrispondente urna $x-2$, ec. ec. Siccome poi in tutte le corone di urne che stanno disposte attorno al cilindro $(t-1)^{esimo}$ il numero di quelle che precedono la sua corrispondente urna x viene espresso dal numero $a-1$, così rendesi manifesto, che operando in tal guisa verrà a formarsi un numero n^{a-1} di urne x pel cilindro t^{esimo} in corrispondenza di ciascun viglietto estratto da ogni urna x del cilindro $(t-1)^{esimo}$, e che quindi essendo n il numero dei viglietti contenuti in ciascuna di esse, supponendoli estratti tutti un dopo l' altro da ogn' una verranno in tal modo a formarsi corrispondentemente ad ogni singola urna x del cilindro $(t-1)^{esimo}$ le sue n^{a} urne x pel susseguente cilindro t^{esimo}.

IV.° Che dunque fra tutte le predette n^{a} urne x del cilindro t^{esimo} derivate nel suespresso modo da due corrispondenti urne x, $x-1$ situate sullo stesso piano circolare, ossia nella medesima corona di urne del cilindro $(t-1)^{esimo}$ ve ne sarà nè più nè meno un numero n^{a-1} ogn' una delle quali ad eccezione di un solo dato conterrà tutti gli altri $n-1$ viglietti contenuti nella corrispondente derivatrice urna x; ve ne sarà similmente un numero n^{a-1} ogn' una delle quali, ad eccezione di un altro solo dato, conterrà tutti i restanti $n-1$ viglietti contenuti nella prefata derivatrice urna x, e così del resto. Che poi egualmente fra le nominate n^{a} urne x del cilindro t^{esimo} ve ne sarà un numero n^{a-1} ogn' una delle quali conterrà un solo dato degli n viglietti contenuti nella corrispondente derivatrice urna $x-1$ del cilindro $(t-1)^{esimo}$; ve ne sarà un numero n^{a-1} ogn' una delle quali conterrà un altro solo dato degli n viglietti suddetti; e così del resto.

V.° Che designate quindi mediante le $x1$, $(x-1)1$ due urne prossime, conseguente l' una, antecedente l'altra in uno qualunque siasi dei sistemi ossia corone di urne supposte collocate nello stesso piano circolare attorno al cilindro $(t-1)^{esimo}$ corrispondente alla $(t-1)^{esima}$ permutazione, ed espresso mediante la r' il numero dei viglietti di un dato colore, nero per esempio, esistenti nella prefata urna $x1$, e mediante la s' espresso il numero dei viglietti del medesimo color nero esistenti nell'urna $(x-1)1$, talchè mediante la $n-r'$ venga ad esprimersi il complessivo numero dei viglietti di color diverso dal dato color nero esistenti nell' urna $x1$, per quanto è stato poc' anzi avvertito, il total numero dei viglietti del dato color nero esistenti in corrispondenza della permutazione t^{esima} in tutte le n^{a} urne x del cilindro t^{esimo} derivate delle $x1$, $(x-1)1$ del cilindro $(t-1)^{esimo}$, verrà espresso dalla formula

$$r'(r'-1)n^{a-1}+(n-r')r'n^{a-1}+s'n^{a-1}$$

la quale ridotta cangiasi nella seguente

$$(n-1)r'n^{a-1}+s'n^{a-1}.$$

VI.° Che applicando il fatto discorso a due altre urne $x2$, $(x-1)2$ prese in un' altra qualunque diversa fra le corone di urne disposte attorno al cilindro $(t-1)^{esimo}$ e situata la prima sulla stessa linea verticale ove trovasi situata la presupposta $x1$, e così la seconda situata nella stessa linea verticale ov'è situata la presupposta $(x-1)1$, semprechè mediante la r'' venga designato il numero dei viglietti neri esistenti nell' urna $x2$, e mediante la s'' venga designato il numero di quelli dello stesso color nero esistenti nell' urna $(x-1)2$, la formula

$$(n-1)r''n^{a-1}+s''n^{a-1}$$

esprimerà il complessivo numero dei viglietti del prefato colore esistenti in tutte le n^{a} urne x del cilindro t^{esimo} derivate dalle su-accennate urne $x2$, $(x-1)2$ del cilindro $(t-1)^{esimo}$

VII.° Che applicando un medesimo discorso a tutte le altre corrispondenti urne x, $x-1$ del cilindro $(t-1)^{esimo}$, e designato mediante Σr il complessivo numero dei viglietti di un qualunque dato colore, per esempio nero, esistenti in tutte le urne x del prefato cilindro $(t-1)^{esimo}$, e designato mediante Σs il complessivo numero dei viglietti dello stesso dato colore esistenti in tutte le corrispondenti urne $x-1$ del precitato cilindro, si comprenderà che il numero complessivo dei viglietti del supposto dato colore, nero per esempio, esistenti in tutte le urne x del cilindro t^{esimo}, che si riferisce alla t^{esima} permutazione verrà espresso dalla formula

$$\Sigma r(n-1)n^{a-1}+\Sigma s n^{a-1}.$$

VIII.° Che denotato pertanto mediante la $\gamma_{x,t}$ il complessivo numero dei viglietti di un qualunque siasi dato colore esistenti in tutte le urne x del cilindro t^{esimo}, mediante la $\gamma_{x,t-1}$ denotato il complessivo numero di quelli dello stesso color dato esistenti in tutte le urne x del cilindro $(t-1)^{esimo}$, e denotato finalmente mediante la $\gamma_{x-1,t-1}$ il complessivo numero dei viglietti del medesimo color dato esistenti in tutte le urne $x-1$ dello stesso cilindro $(t-1)^{esimo}$, si otterrà, perciò che è stato detto nel precedente numero, l' equazione

$$\text{(I)} \qquad \gamma_{x,t}=n^{a-1}(n-1)\gamma_{x\,t-1}+n^{a-1}\gamma_{x-1,t-1}.$$

Le quali cose premesse se si rifletta che il ricercato numero $y_{x,t}$ deve esser tale, che misurando da esso nel modo spiegato nell' enunciato del problema le possibili perdite, e le vincite possibili di ogn' uno dei due giocatori, la somma delle une uguagliar deve la somma delle altre, e se d'altronde riflettasi che dopo eseguite fra i viglietti delle a urne date le volute t permutazioni, quanto allo stato dell'assegnata urna x, può indifferentemente sortire l'uno o l'altro degli stati rappresentati dalle n^{ta} urne x del cilindro t^{esimo} poc'anzi ideate, si comprenderà a non dubitarne, che per determinare detto numero $y_{x,t}$ varrà una frazione il numerator della quale rapporto ai viglietti del dato colore equivalga al complessivo numero dei viglietti del colore medesimo esistenti in tutte le urne x del cilindro t^{esimo}, e il denominatore, che si esprimerà mediante la N_t, equivalga al numero delle urne x del cilindro predetto; sarà dunque

$$\text{(II)}\quad y_{x,t} = \frac{\gamma_{x,t}}{N_t}$$

che è quanto dire, dover il numero $y_{x\,t}$ ricercato equivalere al numero intero o fratto dei viglietti del dato colore, il quale avesse a distribuirsi ugualmente in tutte le urne x del cilindro t^{esimo} affinchè ripetuto tante volte quante sono le urne medesime, ossia N_t volte venisse a formarsi un aggregato perfettamente uguale al complessivo numero $\gamma_{x,t}$ dei viglietti dello stesso colore realmente esistenti in tutte le prefate urne x (5).

Sostituendo ora nell'equazione (II) in luogo della $\gamma_{x,t}$ il suo valore ricavato dalla (I), e fatto riflesso che dipendente-

---

(5) Avendosi in qualunque numero h, di quantità q', q'', q''', ec. ec. $q^{(c-1)}$, $q^{(c)}$, $q^{(c+1)}$ ec., ec., $q^{(h)}$, ed essendo

$$\pi = \frac{q'+q''+q'''+\ldots\ldots+q^{(c)}+\ldots+q^{(h)}}{h}$$

è chiaro che la π sarà maggiore della minima, e minore della massima delle h quanmente dall' esposto superiormente al (n.° II.°) $N_t = n^a N_{t-1}$, sarà

$$y_{x,t} = \frac{n^{a-1}(n-1) y_{x,t-1} + n^{a-1} y_{x-1,t-1}}{n^a N_{t-1}}$$

equazione, la quale riducendo cangiasi nella seguente

$$\text{(III)} \quad y_{x,t} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{y_{x,t-1}}{N_{t-1}} + \frac{1}{n} \frac{y_{x-1,t-1}}{N_{t-1}} .$$

Ora se nell' equazione (II) pongasi $t-1$ in luogo di t ne viene

$$y_{x,t-1} = \frac{y_{x,t-1}}{N_{t-1}}$$

e se in detta equazione pongasi come sopra $t-1$ in luogo di t, e contemporaneamente $x-1$ in luogo di x ne risulta

$$y_{x-1,t-1} = \frac{y_{x-1,t-1}}{N_{t-1}}$$

dunque mediante la sostituzione l' equazione (III) si cangerà nella seguente

---

tità q', q'', ec., $q^{(h)}$ a meno che queste non fossero tutte uguali fra loro, nel qual caso la π eguaglierebbe ogn' una di esse. Supposto adunque che la π sia maggiore di tutte le q', q'', q''', ec. $q^{(c-1)}$, che sia la π non minore di $q^{(c)}$, e che finalmente la π sia minore di tutte in particolare le $q^{(c+1)}$, $q^{(c+2)}$, ec, $q^{(h)}$, la somma delle differenze fra le π e le q', q'', q''', ec. $q^{(c)}$ di essa π non maggiori, pareggierà la somma delle differenze fra le $q^{(c+1)}$, $q^{(c+2)}$, ec. $q^{(h)}$ maggiori della π e la stessa π, talchè sarà

$$\pi-q'+\pi-q''+\pi-q'''+\ldots+\pi-q^{(c)}=q^{(c+1)}-\pi+q^{(c+2)}-\pi+\ldots+q^{(h)}-\pi.$$

Difatti se ciò non fosse, e che volesse quindi suppersi

$$\pi-q'+\pi-q''+\ldots+\pi-q^{(c)}=q^{(c+1)}-\pi+q^{(c+2)}-\pi+\ldots+q^{(h)}-\pi+R$$

sarebbe trasportando e riducendo

$$h\pi=q'+q''+\ldots+q^{(c)}+q^{(c+1)}+\ldots+q^{(h)}+R$$

ed in consegnenza non sarebbe, come era d' altronde stato supposto

$$\pi = \frac{q'+q''+q'''+\ldots+q^{(h)}}{h}$$

$$\text{(IV)}\quad y_{x,t} = \frac{n-1}{n} y_{x,t-1} + \frac{1}{n} y_{x-1,t-1} \qquad (6)$$

Sostituendo di mano in mano nell' equazione (IV) i valori della $y_{x,t-1}$, $y_{x,t-2}$, ec. $y_{x-1,t-1}$, $y_{x-2,t-2}$, ec. ec. ricavati col sussidio dell' equazione medesima, indipendentemente dal conosciuto metodo di integrazione della precitata equazione, si giungerà ad ottenere pel ricercato valore della $y_{x,t}$ la seguente

$$\text{(V)}\quad y_{x,t} = \begin{cases} \frac{(n-1)^t}{n^t} y_{x,0} + \frac{t(n-1)^{t-1}}{1.n^t} y_{x-1,0} + \frac{t(t-1)(n-1)^{t-2}}{1.2.n^t} y_{x-2,0} \\ + \ldots + \frac{t(t-1)(t-2)\ldots\ldots(t-\mu+1)(n-1)^{t-\mu}}{1.2.3.\ldots\ldots\mu.n^t} y_{x-\mu,0} + \ldots\ldots \end{cases}$$

la quale adottando un' elegante modo di scrivere usato da altri in consimili casi potrà mettersi sotto la forma

$$\text{(VI)}\qquad y_{x,t} = \frac{((n-1)+y_{x,0})^t}{n^t}$$

con che nello sviluppo del secondo membro in luogo di una qualunque potenza di $y_{x,0}$, per esempio generalmente parlando in luogo di $y^{\mu}_{x,0}$, si collochi $y_{x-\mu,0}$.

A dimostrare il come mediante le sovr'accennate sostituzioni abbiasi a giunger finalmente ad ottenere l' equazione (V), varrà il seguente ragionamento. (7)

Suppongasi che detta equazione (V) si verifichi in ambi i casi nei quali collocata in luogo della t la $t-1$, la x rimanga la stessa, oppure si cangi in $x-1$, e quindi suppongansi le seguenti due equazioni

---

(6) L'identità della presente (IV) col l' equazione del Sig. De la Grange non lascia dubbio veruno siccome sul senso nel quale intender devesi l' ennunciato del suo problema, così sulla verità, e sull' uso della formola ch' Ei ci ha tramandata per la sua soluzone.

(7) Il Sig. Brunacci nel suo corso di Matematica sublime Tom. I. Cap. I. alla nota (*a*) del § 23 adoprò un simile ragionamento onde provare la formola Newtoniana pel caso di una potenza intera *n* del binomio.

$$y_{x,t-1} = \frac{(n-1)^{t-1}}{n^{t-1}} y_{x,0} + \frac{(t-1)(n-1)^{t-2}}{1.n^{t-1}} y_{x-1,0} + \dots$$
$$+ \frac{(t-1)(t-2)\dots(t-\mu)(n-1)^{t-\mu-1}}{1.2\dots\mu n^{t-1}} y_{x-\mu,0} + \text{ec.}$$
$$y_{x-1,t-1} = \frac{(n-1)^{t-1}}{n^{t-1}} y_{x-1,0} + \frac{(t-1)(n-1)^{t-2}}{1.n^{t-1}} y_{x-2,0} + \dots$$
$$+ \frac{(t-1)(t-2)\dots(t-\mu+1)(n-1)^{t-\mu}}{1.2\dots(\mu-1)n^{t-1}} y_{x-\mu,0} + \text{ec.}$$

io dico che in tale ipotesi si verificherà eziandio l'equazione (V) per la determinazione della $y_{x,t}$. Difatti essendo per l'equazione (IV)

$$y_{x,t} = \frac{n-1}{n} y_{x,t-1} + \frac{1}{n} y_{x-1,t-1}$$

si otterrà $y_{x,t} = \dots\dots\dots$

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{(n-t)^t}{n^t} y_{x,0} + \frac{(t-1)(n-1)^{t-1}}{1.n^t} y_{x-1,0} + \dots + \frac{(t-1)(t-2)\dots(t-\mu)(n-1)^{t-\mu}}{1.2\dots\mu.n^t} y_{x-\mu,0} + \text{ec.} \\ &\quad + \frac{(n-1)^{t-1}}{1.n^t} y_{x-1,0} + \dots + \frac{(t-1)(t-2)\dots(t-\mu+1)(n-1)^{t-\mu}}{1.2\dots(\mu-1)n^t} y_{x-\mu,0} + \text{ec.} \end{aligned}\right.$$

e quindi avendosi generalmente

$$\frac{(t-1)(t-2)\dots(t-\mu)}{1.2\dots\mu} + \frac{(t-1)(t-2)\dots(t-\mu+1)}{1.2\dots(\mu-1)} = \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-\mu+1)}{1.2.3\dots\mu}$$

sarà come nell'equazione (V)

$$y_{x,t} = \frac{(n-1)^t}{n^t} y_{x,0} + \frac{t(n-1)^{t-1}}{1.n^t} y_{x-1,0} + \dots$$
$$+ \frac{t(t-1)\dots(t-\mu+1)(n-1)^{t-\mu}}{1.2\dots\mu.n^t} y_{x-\mu,0} + \text{ec.}$$

Avendosi ora $y_{x,1} = \frac{n-1}{n} y_{x,0} + \frac{1}{n} y_{x-1,0}$

$$y_{x-1,1} = \frac{n-1}{n} y_{x-1,0} + \frac{1}{n} y_{x-2,0}$$

$$y_{x-2,1} = \frac{n-1}{n} y_{x-2,0} + \frac{1}{n} y_{x-3,0}$$

. . . .

. . . .

equazioni tutte della forma (V), per quanto è stato detto poc' anzi, mediante la stessa formula (V) verranno espressi i valori tutti delle $y_{x,2}$, $y_{x-1,2}$, $y_{x-2,2}$, $y_{x-3,2}$, ec. e così per la stessa ragione verranno espressi mediante detta formula i valori tutti delle $y_{x,3}$, $y_{x-1,3}$, $y_{x-2,3}$, ec. ec. tal che procedendo sempre sarà pienamente dimostrata la verità della mentovata formula generale.

Facend' uso della suddetta formula (V), o dello sviluppo della (VI) dovrà sempre aversi riguardo a ciò che fin da principio è stato premesso alla soluzione del proposto problema, e dovranno quindi collocarsi in luogo della $y_{x-ma,0}$, $y_{x-ma-1,0}$, $y_{x-ma-2,0}$, ec. le corrispondenti $y_{x,0}$, $y_{x-1,0}$, $y_{x-2,0}$ ec.

Equivalendo le $y_{x,0}$, $y_{x-1,0}$, $y_{x-2,0}$, ec. $y_{x-a+1,0}$ ai rispettivi numeri dei viglietti del color dato esistenti in origine nelle urne x, $x-1$, $x-2$, ec. che suppongonsi conosciuti, è chiaro che mediante l'equazione (V) resterà pienamente determinato il numero $y_{x,t}$ che si ricercava.

OSSERVAZIONI

11. Essendo che al progresso delle matematiche cognizioni giova non di rado il tener conto eziandio di ciò che in sulle prime può valutarsi di poco, o di niun momento, ho quindi giudicato non inutile cosa l'esporre un'altra dimostrazione dell'equazione (IV), e per conseguenza della formula (V), ricavata dall' indole e dalla natura dell' equazione generale, che seguendo i ragionamenti fatti dal Sig. Marchese Rangoni per istabilire pel caso di due sole urne l'equazione (B) del

§. 14. della citata sua Memoria, ho potuto conseguire per la determinazione della probabilità, che in una data fra un numero a di urne contenenti ciascuna un numero n di viglietti in assegnato modo diversamente colorati, dopo un numero t di permutazioni, sia residuato un concreto numero μ di viglietti di color dato.

Premetto adunque, onde stabilire la precitata equazione, che gli eventi, o gli stati pei quali nell' urna data, che chiamerò x, dopo un numero t di permutazioni, sia residuato un numero μ di viglietti di un dato colore derivar posson soltanto dagli eventi, o dagli stati della stessa urna x nella quale dopo $t-1$ permutazioni sia residuato l'uno o l'altro dei tre soli numeri $\mu+1$, μ, oppure $\mu-1$ di viglietti del precitato colore, e che quegli stati si verificano allora quando al compiersi della successiva t^{esima} permutazione nel caso primo fra quei residui viglietti venga estratto dall' urna x un viglietto del color dato, e dalla sua vicina urna $x-1$ venga contemporaneamente estratto un viglietto di color diverso dal dato, allora quando nel caso secondo i due viglietti contemporaneamente estratti al compiersi della permutazione t^{esima} l' uno dall' urna x, e l'altro dalla sua vicina $x-1$ sieno entrambi o di color simile, o di color diverso dal dato, e allora quando finalmente nel caso terzo il viglietto estratto dall'urna x nella t^{esima} permutazione sia di color diverso dal dato essendo simile a questo il colore del viglietto contemperaneamente estrato dall' urna $x-1$.

Procedendo, ciò posto, alla considerazione di tutte le possibili combinazioni di urne dopo un numero $(t-1)$ di permutazioni, denoto mediante le p_0, p_1, p_2, ec. p_n i rispettivi numeri di quelle che si riferiscono agli stati dell' urna x nella quale dopo le accennate permutazioni siano rispettivamente rimasti zero, uno, due, ec. n viglietti di color simile al dato.

Denoto egualmente mediante le π_0, π_1, π_2, ec. π_n i numeri di tutti i possibili stati dell'urna $x-1$, nella quale dopo le precitate $(t-1)$ permutazioni siano rispettivamente contenuti zero, uno, due ec. n viglietti di color simile al dato. Essendo che nel caso di un numero a di urne maggiore di due, dopo un numero $t-1$ di permutazioni uno stato determinato di una fra esse non trovasi necessariamente congiunto ad altro solo stato determinato dell' urna sua prossima, si avrà bensì l' equazione.

$$p_0+p_1+p_2+\ldots+p_n=\pi_0+\pi_1+\pi_2+\ldots+\pi_n \quad (8)$$

ma ciò nulla meno gli stati dell'urna x denotati dalla p_0 egualmente che gli altri della stessa urna x denotati dalla p_1, oppure dalla p_2 ec. potranno ritrovarsi congiunti con uno o più dei diversi stati dell' urna $x-1$ denotati dalle π_0, π_1, π_2 ec. π_n. In conseguenza della qual cosa denotati generalmente mediante le $\pi_{\alpha,0}$, $\pi_{\alpha,1}$, $\pi_{\alpha,2}$ ec. $\pi_{\alpha,n}$ i rispettivi numeri dei possibili stati dell' urna $x-1$ nella quale dopo $t-1$ permutazioni, quanto ai viglietti del dato colore, se ne ritrovi rispettivamente in essa contenuto un numero zero, uno, due ec. n, nel mentre che nell' urna x dopo le accennate permutazioni se ne ritrova costantemente un numero α, sarà

$$\text{(VII)} \quad p_\alpha=\pi_{\alpha,0}+\pi_{\alpha,1}+\pi_{\alpha,2}+\ldots\,\pi_{\alpha,n}$$

e sarà altresì

---

(8) Gioverà all' intelligenza del presente ragionamento il rammentare i cilindri ideati al §. 10, e segnatamente il cilindro $(t-1)^{esimo}$, e il ritenere che il numero delle urne espresso dalle p_0, p_1, ec. p_n è precisamente il numero delle urne x di detto cilindro, e che il numero delle urne espresso dalle π_0, π_1, π_2, ec. π_n è precisamente il numero delle urne $x-1$ del ripetuto cilindro.

$$
\text{(VIII)}\quad\left\{\begin{array}{l}
\pi_0 = \pi_{0,0} + \pi_{1,0} + \pi_{2,0} + \ldots\ldots + \pi_{n,0} \\
\pi_1 = \pi_{0,1} + \pi_{1,1} + \pi_{2,1} + \ldots\ldots + \pi_{n,1} \\
\pi_2 = \pi_{0,2} + \pi_{1,2} + \pi_{2,2} + \ldots\ldots + \pi_{n,2} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\pi_n = \pi_{0,n} + \pi_{1,n} + \pi_{2,n} + \ldots\ldots + \pi_{n,n}\ .
\end{array}\right.
$$

Procedendo ora alla ricerca di una formula generale col mezzo della quale poter esprimere la probabilità dell' evento che dopo t permutazioni trovisi residuato nell'urna x un numero μ di viglietti dell' assegnato colore, istituisco rapporto al primo degli accennati tre essenziali requisiti, vale a dire per rapporto al caso che in detta urna x dopo $t-1$ permutazioni trovisi residuato un numero $\mu+1$ di viglietti del prefato colore, il seguente ragionamento, il quale convenientemente applicato agli altri due requisiti che nella citata urna x dopo lo stesso numero $t-1$ di permutazioni trovisi residuato un numero μ, oppure un numero $\mu-1$ di viglietti del colore medesimo, varrà a far palese la verità della formula stessa, che si vedrà in appresso segnata (XI).

La probabilità dell' evento che dopo un numero $t-1$ di permutazioni trovisi contenuto nell' urna x un numero $\mu+1$ di viglietti del color dato verrà rappresentata dalla frazione $\frac{p_{\mu+1}}{\Sigma p}$ nella quale il denominatore Σp rappresenta l' aggregato delle p_0, p_1, p_2, ec. p_n. Ora in questo caso affinchè dopo la successiva permutazione t^{esima} trovisi residuato nell'urna x un solo numero μ di viglietti del colore assegnato rendesi in primo luogo necessario che all' eseguirsi della t^{esima} permutazione venga levato dall'urna x un viglietto del prefato colore. Dunque in detto caso la probabilità mediante la quale dopo eseguito un numero $(t-1)$ di permutazioni fra i viglietti delle a

urne date, ed appena compiuta una successiva estrazione di un viglietto dall' urna x, sia d' essa ridotta a tale di poter coll'aggiunta di altro viglietto contemporaneamente estratto dall' urna $x-1$, conseguire il voluto stato di contenere un numero μ di viglietti del dato colore, verrà espressa dalla frazione $\frac{\mu+1}{n}\cdot\frac{p_{\mu+1}}{\Sigma p}$, giacchè componendosi la probabilità ricercata delle due altre una delle quali di poter conseguire il presupposto stato dell'urna x, e l'altra di poter levare, ciò conseguito, dalla stessa urna x un viglietto del precitato colore, a stabilirne l'ammontare varrà il prodotto delle frazioni colle quali si esprimono le mentovate probabilità componenti. Ora gli eventi, o gli stati dell'urna x dopo $t-1$ permutazioni espressi dalla $p_{\mu+1}$ trovansi, come è stato avvertito in guisa tale congiunti cogli eventi ossia cogli stati dell' urna $x-1$, dopo lo stesso numero di permutazioni, che verificandosi uno dei primi deve necessariamente verificarsi per rapporto ai secondi uno degli eventi espressi dalle $\pi_{\mu+1,0}$, $\pi_{\mu+1,1}$, $\pi_{\mu+1,2}$, ec., $\pi_{\mu+1,n}$, e la probabilità per la quale potendo egualmente verificarsi ciascuno di questi eventi si verifichi l' uno piuttosto che gli altri, vale a dire uno di quelli espressi dalla $\pi_{\mu+1,0}$, oppure uno di quelli espressi dalla $\pi_{\mu+1,1}$, oppure ec. piuttosto che gli altri, viene corrispondentemente indicata dalle frazioni

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\pi_{\mu+1,0}}{\pi_{\mu+1,0}+\pi_{\mu+1,1}+\ldots\ldots+\pi_{\mu+1,n}}=\dfrac{\pi_{\mu+1,0}}{p_{\mu+1}}\\[2ex] \dfrac{\pi_{\mu+1,1}}{\pi_{\mu+1,0}+\pi_{\mu+1,1}+\ldots\ldots+\pi_{\mu+1,n}}=\dfrac{\pi_{\mu+1,1}}{p_{\mu+1}}\\[2ex] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\ \text{per la (VII)}$$

dunque nel dato che l'urna $x-1$ aver non possa dopo $t-1$ permutazioni, se non uno, qualunque poi sia, dei soli stati denotati dalle $\pi_{\mu+1,0}$, $\pi_{\mu+1,1}$, $\pi_{\mu+1,2}$ ec. ec. $\pi_{\mu+1,n}$, la probabilità dell' evento per cui all' eseguirsi della t^{esima} estrazione venga levato dalla precitata urna $x-1$ un viglietto di color diverso dal dato verrà espressa dalla somma delle preindicate frazioni, rispettivamente moltiplicate per $\frac{n}{n}$, $\frac{n-1}{n}$, $\frac{n-2}{n}$, ec. $\frac{n-n}{n}$, e quindi dalla

$$\frac{n\pi_{\mu+1,0}+(n-1)\pi_{\mu+1,1}+(n-2)\tau_{\mu+1,2}+\ldots\ldots+0\pi_{\mu+1,n}}{np_{\mu+1}}.$$

È perciò che la probabilità composta per la quale dopo t permutazioni trovisi residuato nell' urna x un numero μ di viglietti del dato colore dipendentemente dalla condizione che in detta urna x dopo $t-1$ permutazioni sia residuato un numero $\mu+1$ di viglietti del colore medesimo, verrà rappresentata dalla frazione

$$\frac{\mu+1}{n}\cdot\frac{p_{\mu+1}}{\Sigma p}\left\{\frac{n\pi_{\mu+1,0}+(n-1)\pi_{\mu+1,1}+(n-2)\pi_{\mu+1,2}+\ldots+0\pi_{\mu+1,n}}{np_{\mu+1}}\right\}$$

Applicando, come si è detto, un conveniente simile discorso agli altri due requisiti superiormente specificati che nell' urna x dopo un numero $(t-1)$ di permutazioni sia residuato un numero μ, oppure $\mu-1$ di viglietti del colore assegnato, si otterrà quanto all' espressione generale della ricercata probabilità, ch' io denoterò mediante la $Z_{\mu,t}$ la seguente equazione

$$Z_{\mu,t}=\begin{cases}\text{caso 1.}^\circ\ \dfrac{\mu+1}{n}\cdot\dfrac{p_{\mu+1}}{\Sigma p}\left(\dfrac{n\pi_{\mu+1,0}+(n-1)\pi_{\mu+1,1}+(n-2)\pi_{\mu+1,2}+\ldots+0\pi_{\mu+1,n}}{np_{\mu+1}}\right)\\ \text{caso 2.}^\circ\begin{cases}+\dfrac{\mu}{n}\cdot\dfrac{p_\mu}{\Sigma p}\left(\dfrac{0\pi_{\mu,0}+\pi_{\mu,1}+2\pi_{\mu,2}+\ldots\ldots+n\pi_{\mu,n}}{np_\mu}\right)\\ +\dfrac{(n-\mu)}{n}\dfrac{p_\mu}{\Sigma p}\left(\dfrac{n\pi_{\mu,0}+(n-1)\pi_{\mu,1}+(n-2\pi_{\mu,2}+\ldots\ldots+0\pi_{\mu,n}}{np_\mu}\right)\end{cases}\\ \text{caso 3.}^\circ+\dfrac{(n-\mu+1)}{n}\cdot\dfrac{p_{\mu-1}}{\Sigma p}\left(\dfrac{0\pi_{\mu-1,0}+\pi_{\mu-1,1}+2\pi_{\mu-1,2}+\ldots\ldots+n\pi_{\mu-1,n}}{np_{\mu-1}}\right)\end{cases}$$

equazione la quale riducendo, e supponendo generalmente

$$\text{(IX)}\quad\begin{aligned}A_\mu&=n\pi_{\mu,0}+(n-1)\pi_{\mu,1}+(n-2)\pi_{\mu,2,}+\ldots+0\pi_{\mu,n}\\ B_\mu&=0\pi_{\mu,0}+\pi_{\mu,1}+2\pi_{\mu,2}+\ldots\ldots+n\pi_{\mu,n}\end{aligned}$$

si cangerà nella seguente

$$\text{(X)}\qquad Z_{\mu,t}=\frac{(\mu+1)A_{\mu+1}+\mu B_\mu+(n-\mu)A_\mu+(n-\mu+1)B_{\mu-1}}{n^2\Sigma p}\,.$$

Fatto poscia riflesso che per la determinazione del numero aspettato dei viglietti del preindicato color dato residuati nell'urna x dopo la t^{esima} permutazione, ossia per la determinazione mediante l'equazione (X) della frazione

$$\frac{0Z_{0,t}+Z_{1,t}+2Z_{2,t}+\ldots\ldots+\mu Z_{\mu,t}+\ldots\ldots+nZ_{n,t}}{Z_{0,t}+Z_{1,t}+Z_{2,t}+\ldots\ldots+Z_{\mu,t}+\ldots\ldots+Z_{n,t}}$$

può trascurarsi nei valori delle $Z_{0,t}$, $Z_{1,t}$, ec. ricavati dalla citata equazione il denominatore comune $n^2\Sigma p$, giacchè fatto

$$\text{(XI)}\quad Q_\mu=(\mu+1)A_{\mu+1}+\mu B_\mu+(n-\mu)A_\mu+(n-\mu+1)B_{\mu-1}\quad(9)$$

sarà come è per se evidente

---

(9) Nel caso specialissimo di due sole urne contenenti in origine un egual numero n di viglietti tutti bianchi nell'una, e tutti neri nell'altra, sarà

$$p_0=\pi_{0,n};\ p_1=\pi_{1,n-1};\ p_2=\pi_{2,n-2};\ldots p_{\mu-1}=\pi_{\mu-1,n-\mu+1}$$
$$p_\mu=\pi_{\mu\ n-\mu};\ p_{\mu+1}=\pi_{\mu+1,n-\mu-1};\ldots p_n=\pi_{n,0}$$

$$\frac{oZ_{0,t}+Z_{1,t}+2\,Z_{2,t}+\ldots\ldots+nZ_{n,t}}{Z_{0,t}+Z_{1,t}+Z_{2,t}+\ldots\ldots+Z_{n,t}}$$

$$=\frac{oQ_{0}+Q_{1}+2Q_{2}+\ldots\ldots+nQ_{n}}{Q_{0}+Q_{1}+Q_{2}+\ldots\ldots+Q_{n}}$$

mi varrò dell' equazione (XI) onde giungere alla dimostrazione dell' equazione (IV), e della conseguente formula (V) sopra indicate.

Per l'oggetto esposto suppongo di mano in mano nella (XI) la $\mu=0,\ 1,\ 2,\ 3,$ ec. n e sarà:

$$\text{II)}\left\{\begin{array}{lllll}
\text{Per} & & & & \\
\mu=0, & Q_{0}=A_{1}+ & 0+ & nA_{0}+ & 0 \\
\mu=1, & Q_{1}=2A_{2}+ & B_{1}+(n-1)A_{1}+ & & nB_{0} \\
\mu=2, & Q_{2}=3A_{3}+2B_{2}+(n-2)A_{2}+(n-1)B_{1} & & & \\
\mu=3, & Q_{3}=4A_{4}+3B_{3}+(n-3)A_{3}+(n-2)B_{2} & & & \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\
\mu=v-1, & Q_{v-1}=vA_{v}+(v-1)\,B_{v-1} & +(n-v+1)A_{v-1} & +(n-v+2)B_{v-2} & \\
\mu=v, & Q_{v}=(v+1)A_{v+1} & +vB_{v} & +(n-v)\;A_{v} & +(n-v+1)B_{v-1} \\
\mu=v+1, & Q_{v+1}=(v+2)A_{v+2} & +(v+1)B_{v+1} & +(n-v-1)A_{v+1} & +\;(n-v)B_{v} \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\mu=n-2, & Q_{n-2}=(n-1)A_{n-1} & +(n-2)B_{n-2} & +2A_{n-2} & +3B_{n-3} \\
\mu=n-1, & Q_{n-1}=\;nA_{n} & +(n-1)B_{n-1} & +\;A_{n-1} & +2B_{n-2} \\
\mu=n, & Q_{n}=\;0 & +\;nB_{n} & +\;0 & +\;B_{n-1}
\end{array}\right.$$

essendo poi uguali allo zero tutte le altre $\pi_{0,0}$; $\pi_{0,1}$, ec. $\pi_{0,n-1}$; $\pi_{1,0}$, $\pi_{1,1}$, $\pi_{1,2}$, ec. $\pi_{1,n-2}$, $\pi_{1,n}$ ec. ec.

Sarà perciò in detto caso $A_{\mu+1}=(n-n+\mu+1)\pi_{\mu+1,n-\mu-1}=(\mu+1)p_{\mu+1}$

mentre è chiaro che il secondo termine di Q_0, e il terzo di Q_n devono essere uguali allo zero in causa dei coefficienti numerici ricavati nei rispettivi casi dalla (XI), e che il quarto termine del valore di Q_0, e il primo del valore di Q_n sono pure uguali allo zero in causa che i valori di B_{-1}, e di A_{n+1} sono evidentemente uguali allo zero com'è facile di scoprire dietro le fatte supposizioni.

Sommando in adesso i primi membri assieme, e così assieme i secondi membri delle preindicate equazioni (XII) sarà

$$Q_0+Q_1+Q_2+\ldots\ldots+Q_n=$$

$$\left\{\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad (A_1+B_1)+ \qquad 2(A_2+B_2)+ \qquad 3(A_3+B_3)+\ldots+n(A_n+B_n) \\ n(A_0+B_0)+(n-1)(A_1+B_1)+(n-2)(A_2+B_2)+(n-3)(A_3+B_3)+\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots+(n-n+1)(A_{n-1}+B_{n-1}) \end{array}\right.$$

la quale riducendo si cangia nella

$$Q_0+Q_1+Q_2+\ldots+Q_n=n(A_0+B_0+A_1+B_1+A_2+B_2+\ldots\ldots+A_n+B_n).$$

Essendo poi per le equazioni (IX) in generale

$$A_\mu+B_\mu=n(\pi_{\mu,0}+\pi_{\mu,1}+\pi_{\mu,2}+\ldots+\pi_{\mu,n})$$

e per l'equazione (VII) essendo $p_\mu=\pi_{\mu,0}+\pi_{\mu,1}+\pi_{\mu,2}+\ldots+\pi_{\mu,n}$ si otterrà finalmente

---

$$\begin{aligned} A_\mu &= (n-n+\mu)\pi_{\mu,n-\mu} = \mu p_\mu \\ B_\mu &= (n-\mu)\pi_{\mu,n-\mu} = (n-\mu)p_\mu \\ B_{\mu-1} &= (n-\mu+1)\pi_{\mu-1,n-\mu+1} = (n-\mu+1)p_{\mu-1}. \end{aligned}$$

Quindi pel caso medesimo l'equazione (XI) si cangerà nella seguente

$$Q_\mu=(\mu+1)^2p_{\mu+1}+2\mu(n-\mu)p\mu+(n-\mu+1)^2p_{\mu-1}$$

che e perfettamente identica all'equazione (B) del § 14. della lodata Memoria del Sig. Marchese Rangoni.

$$\text{(XIII)}\quad Q_0+Q_1+Q_2+\ldots+Q_n=n^2(p_0+p_1+p_2+\ldots+p_n)\quad (10)$$

Ciò posto io considero che essendo

$$(v+1)Q_{v+1}+vQ_v+(v-1)Q_{v-1}=$$
$$(v+1)(Q_{v+1}+Q_v+Q_{v-1})-Q_v-2Q_{v-1}$$

si avrà dalle equazioni (XII) tenendo separato conto dei soli termini che contengono A_v, oppure B_v, e riunendo gli altri tutti in un solo complesso che si denoterà mediante la R

$$(v+1)Q_{v+1}+vQ_v+(v-1)Q_{v-1}=$$
$$\left\{\begin{array}{c}(v+1)(v(A_v+B_v)+(n-v)(A_v+B_v))\\ -v(A_v+B_v)-nA_v+R\end{array}\right.$$

e quindi riducendo

---

(10) Le Q_0, Q_1, Q_2, ec. Q_n non rappresentano tutti gli stati dell'urna x contenenti zero, uno, due ec. n viglietti del dato colore, che seguendo il metodo del III. §. 10 potevano ricavarsi da tutti gli stati delle urne x del cilindro $(t-1)^{esimo}$ il cui complesso viene quì espresso dalla somma delle p_0, p_1, p_2, ec. p_n.

Dette Q_0, Q_1, Q_2, ec. Q_n, che rappresentano i numeratori delle frazioni mediante le quali resta determinata la probabilità per cui dopo t permutazioni trovisi residuato nell'urna x un corrispondente numero zero, uno, due ec. n di viglietti del dato colore, sonosi dedotte avuto soltanto riguardo ai differenti stati dell'urna x i quali sortir possono da tutte le possibili combinazioni fra $n-1$ viglietti di ogn'una urna x del cilindro $(t-1)^{esimo}$ con ogn'uno degli n altri viglietti della sua corrispondente urna $x-1$, il che bastava per determinare le probabilità che si ricercavano. È quindi evidente che essendosi operato in tal guisa doveva necessariamente ottenersi la su-notata equazione (XIII).

Se poi si rifletta che seguendo il modo, col quale al III. §. 10. da ogni urna x del cilindro $(t-1)^{esimo}$ ottiensi un numero n^a di urne x pel susseguente cilindro t^{esimo}, ne consegue per rapporto a queste ultime, che uno stesso identico stato viene a ripetersi in fra esse un numero n^{a-2} di volte, si comprenderà tosto, che denotato mediante la P_0 il numero delle urne x del cilindro t^{esimo} non contenenti

$$(v+1)Q_{v+1}+vQ_v+(v-1)Q_{v-1}=$$
$$(v+1)n(A_v+B_v)-v(A_v+B_v)-nA_v+R.$$

Adottando ora una maniera di scrivere analoga a quella prima adoprata dal Professore Paolo Ruffini nella sua teoria delle equazioni, ed indicando colla seguente espressione

$$(A_v, B_v)|((v+1)Q_{v+1}+vQ_v+(v-1)Q_{v-1})$$

---

verun viglietto del dato colore, mediante la P_1 il numero di quelle contenenti un solo viglietto del color dato, mediante la P_2 il numero di quelle altre contenenti due soli viglietti del detto colore, ec. mediante la P_n finalmente il numero di quelle contenenti n viglietti del precitato colore, sarà $P_0=n^{a-2}Q_0$, $P_1=n^{a-2}Q_1$, $P_2=n^{a-2}Q_2$, cc. $P_n=n^{a-2}Q_n$, e quindi

$$P_0+P_1+P_2+\ldots+P_n=n^{a-2}(Q_0+Q_1+Q_2+\ldots+Q_n)=n^a(p_0+p_1+p_2+\ldots+p_n),$$

$$\frac{0P_0+P_1+2P_2+\ldots.+nP_n}{P_0+P_1+P_2+\ldots..+P_n}=\frac{n^{a-2}(0Q_0+Q_1+2Q_2+\ldots+nQ_n)}{n^{a-2}(Q_0+Q_1+Q_2+\ldots+Q_n)}$$
$$=\frac{0Q_0+2Q_1+Q_2+\ldots\ldots+nQ_n}{Q_0+Q_1+Q_2+\ldots\ldots+Q_n},$$

e che in conseguenza potrà sempre collocarsi in luogo della $\frac{0P_0+P_1+2P_2+\ldots.+nP_n}{P_0+P_1+P_2+\ldots..+P_n}$ la $\frac{0Q_0+Q_1+2Q_2+\ldots.+nQ_n}{Q_0+Q_1+Q_2+\ldots.+Q_n}$ e viceversa.

Non dovrà quindi nel progresso aversi difficoltà alcuna allora quando dietro la supposizione che sia $y_{x,t}=\frac{0Q_0+Q_1+2Q_2+\ldots..+nQ_n}{Q_0+Q_1+Q_2+\ldots..+Q_n}$

si dirà essere $$y_{x,t-1}=\frac{0p_0+p_1+2p_2+\ldots..+np_n}{p_0+p_1+p_2+\ldots..+p_n},$$

$$y_{x-1,t-1}=\frac{0\pi_0+\pi_1+2\pi_2+\ldots..+n\pi_n}{\pi_0+\pi_1+\pi_2+\ldots..+\pi_n}$$

i soli termini della quantità a destra della linea verticale che contengono una od entrambe le quantità a sinistra della linea medesima, sarà in generale

$$\text{(XIV)} \qquad (v+1)n(A_v+B_v)-v(A_v+B_v)-nA_v = (A_v,\ B_v)\,|\,((v+1)Q_{v+1}+vQ_v+(v-1)Q_{v-1}).$$

Fatto quindi in detta equazione (XIV) di mano in mano $v=0,\ 1,\ 2,$ ec. n, si otterranno corrispondentemente le equazioni seguenti

$$\text{(XV)}\left\{\begin{array}{l}
\text{Per } v=0;\ n(A_0+B_0)-\quad 0 \quad -nA_0= \\
\qquad (A_0,\ B_0)\,|\,(Q_1+0\ +0\ ) \\
v=1;\ 2n(A_1+B_1)-\ (A_1+B_1)-nA_1= \\
\qquad (A_1,\ B_1)\,|\,(2Q_2+Q_1\ +0\ ) \\
v=2;\ 3n(A_2+B_2)-2(A_2+B_2)-nA_2= \\
\qquad (A_2,\ B_2)\,|\,(3Q_2+2Q_2+Q_1) \\
v=3;\ 4n(A_3+B_3)-3(A_3+B_3)-nA_3= \\
\qquad (A_3,\ B_3)\,|\,(4Q_4+3Q_3+2Q_2) \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
v=n-2;\ (n-1)n(A_{n-2}+B_{n-2})-(n-2)(A_{n-2}+B_{n-2})-nA_{n-2}= \\
\qquad (A_{n-2},\ B_{n-2})\,|\,((n-1)Q_{n-1}+(n-2)Q_{n-2}+(n-3)Q_{n-3}) \\
v=n-1;\ n.n(A_{n-1}+B_{n-1})-(n-1)(A_{n-1}+B_{n-1})-nA_{n-1}= \\
\qquad (A_{n-1},\ B_{n-1})\,|\,(nQ_n+(n-1)Q_{n-1}+(n-2)Q_{n-2}) \\
v=n;\ (n+1)n(A_n+B_n)-n(A_n+B_n)-nA_n= \\
\qquad (A_n,\ B_n)\,|\,(0+nQ_n+(n-1)Q_{n-1})
\end{array}\right.$$

Riflettendo ora che in conseguenza delle equazioni (XII) la Q_1 si compone di soli termini che contengono le A_2, A_1, B_1, B_0, la Q_2 si compone di soli termini che contengono le A_3, A_2, B_2, B_1, ec. e generalmente la Q_μ si compone dei soli termini che contengono le $A_{\mu+1}$, A_μ, B_μ, $B_{\mu-1}$ e che quindi

$$(A_0, B_0)|Q_1 + (A_1, B_1)|Q_1 + (A_2, B_2)|Q_1 = Q_1$$

$$(A_1, B_1)|2Q_2 + (A_2, B_2)|2Q_2 + (A_3, B_3)|2Q_2 = 2Q_2$$

$$(A_2, B_2)|3Q_3 + (A_3, B_3)|3Q_3 + (A_4, B_4)|3Q_3 = 3Q_3$$

. . . .

. . . .

$$(A_{n-2}, B_{n-2})|(n-1)Q_{n-1} + (A_{n-1}, B_{n-1})|(n-1)Q_{n-1} + (A_n, B_n)|(n-1)Q_{n-1} = (n-1)Q_{n-1}$$

$$(A_{n-1}, B_{n-1})|nQ_n + (A_n, B_n)|nQ_n + 0 = nQ_n$$

agevolmente si comprenderà che sommando assieme i primi membri delle equazioni (XV), e sommandone egualmente assieme i secondi si otterrà l' equazione

$$\text{(XVI)}\quad \begin{aligned} & n(A_0 + B_0 + A_1 + B_1 + A_2 + B_2 + \ldots + A_n + B_n) \\ & + (n-1)(0(A_0 + B_0) + (A_1 + B_1) + 2(A_2 + B_2) + \ldots + n(A_n + B_n)) \\ & - n(A_0 + A_1 + A_2 + \ldots\ldots\ldots + A_n) = \\ & Q_1 + 2Q_2 + 3Q_3 + \ldots + nQ_n \end{aligned}$$

Essendo poi come si è veduto in addietro

$$n(A_0 + B_0 + A_1 + B_1 + \ldots\ldots + A_n + B_n) = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \ldots\ldots + Q_n$$
$$= n^2(p_0 + p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_n)$$

ed essendo generalmente $A_\mu + B_\mu = np_\mu$ si avrà dividendo il primo membro della precedente equazione (XVI) per

$n^2(p_0+p_1+p_2+\ldots+p_n)$, e dividendo il secondo per $Q_0+Q_1+Q_2+\ldots+Q_n$ e facendo le opportune sostituzioni, e riduzioni

$$\text{(XVII)}\qquad 1+\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{0p_0+p_1+2p_2+\ldots+np_n}{p_0+p_1+p_2+\ldots+p_n}\right)-\frac{A_0+A_1+A_2+\ldots\ldots+A_n}{n(p_0+p_1+p_2+\ldots+p_n)}=\frac{0Q_0+Q_1+2Q_2+\ldots\ldots+nQ_n}{Q_0+Q_1+Q_2+\ldots\ldots+Q_n},$$

e riducendo il primo membro allo stesso denominatore

$$\text{(XVIII)}\qquad \frac{np_0-A_0+np_1-A_1+\ldots+np_n-A_n}{n(p_0+p_1+p_2+\ldots\ldots+p_n)}+\frac{n-1}{n}\left(\frac{0p_0+p_1+2p_2+\ldots+np_n}{p_0+p_1+p_2+\ldots+p_n}\right)=\frac{0Q_0+Q_1+2Q_2+\ldots+nQ_n}{Q_0+Q_1+Q_2+\ldots+Q_n}.$$

Siccome poi si ha generalmente $np_\mu-A_\mu=B_\mu=0\pi_{\mu,0}+\pi_{\mu,1}+2\pi_{\mu,2}+\ldots+n\pi_{\mu,n}$ così facendo di mano in mano $\mu=0,\ 1,\ 2,$ ec. n sarà

$$\begin{aligned}
np_0-A_0&=0\pi_{0,0}+\pi_{0,1}+2\pi_{0,2}+3\pi_{0,3}+\ldots+n\pi_{0,n}\\
np_1-A_1&=0\pi_{1,0}+\pi_{1,1}+2\pi_{1,2}+3\pi_{1,3}+\ldots+n\pi_{1,n}\\
np_2-A_2&=0\pi_{2,0}+\pi_{2,1}+2\pi_{2,2}+3\pi_{2,3}+\ldots+n\pi_{2,n}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
np_n-A_n&=0\pi_{n,0}+\pi_{n,1}+2\pi_{n,2}+3\pi_{n,3}+\ldots+n\pi_{n,n}
\end{aligned}$$

e quindi stante le equazioni (VIII)

$$np_0-A_0+np_1-A_1+\ldots+np_n-A_n=$$
$$0\pi_0+\pi_1+2\pi_2+3\pi_3+\ldots+n\pi_n.$$

Sostituendo pertanto un tal valore nell'equazione (XVIII) e fatto riflesso che $p_0+p_1+p_2+\ldots+p_n=\pi_0+\pi_1+\pi_2+\ldots+\pi_n$ l' equazione medesima si cangerà nella seguente

$$\text{(XIX)}\qquad \frac{1}{n}\left(\frac{0\pi_0+\pi_1+2\pi_2+\ldots\ldots+n\pi_n}{\pi_0+\pi_1+\pi_2+\ldots\ldots+\pi_n}\right)+$$

$$\frac{n-1}{n}\left(\frac{0p_0+p_1+2p_2+\ldots\ldots+np_n}{p_0+p_1+p_2+\ldots\ldots+p_n}\right)=\frac{0Q_0+Q_1+2Q_2+\ldots+nQ_n}{Q_0+Q_1+Q_2+\ldots+Q_n}.$$

Supposto ora che la

$$\frac{0Q_0+Q_1+2Q_2+\ldots+nQ_n}{Q_0+Q_1+Q_2+\ldots+Q_n}=\frac{0P_0+P_1+P_2+\ldots+nP_n}{P_0+P_1+P_2+\ldots+P_n}$$

siccome è stato osservato alla nota (9), venga espressa mediante la $y_{x,t}$, in tal caso stante le supposizioni fatte quanto al significato delle p_0, p_1, p_2, ec. p_n, e delle π_0, π_1, π_2, ec. π_n mediante la $y_{x,t-1}$ verrà denotata la frazione $\frac{0p_0+p_1+2p_2+\ldots+np_n}{p_0+p_1+p_2+\ldots+p_n}$, e mediante la $y_{x-1,t-1}$ verrà denotata la frazione $\frac{0\pi_0+\pi_1+2\pi_2+\ldots+n\pi_n}{\pi_0+\pi_1+\pi_2+\ldots+\pi_n}$, d'onde sostituendo nella (XIX) si otterrà finalmente la seguente equazione

$$\text{(XX)}\qquad \frac{1}{n}\,y_{x-1,t-1}+\frac{n-1}{n}\,y_{x,t-1}=y_{x,t}.$$

la quale altro non è se non l'equazione (IV) superiormente ottenuta con altro ragionamento.

12. Nel caso specialissimo del problema del Sig. Bernoulli ristretto alla condizione di due sole urne date, ch'io chiamerò x, $x-1$, contenenti in origine un ugual numero n di viglietti tutti neri nella prima, e tutti bianchi nell'altra, avendosi generalmente, siccome è stato osservato alla nota (8) $A_\mu=\mu p_\mu$, l'equazione (XVII) mediante la sostituzione si cangierà nella seguente

$$1+\frac{n-1}{n}\left(\frac{0p_0+p_1+2p_2+\ldots\ldots+np_n}{p_0+p_1+p_2+\ldots\ldots+p_n}\right)-$$

$$\frac{0p_0+p_1+2p_2+\ldots+np_n}{n(p_0+p_1+p_2+\ldots\ldots+p_n)}=\frac{0Q_0+Q_1+Q_2+\ldots+nQ_n}{Q_0+Q_1+Q_2+\ldots+Q_n}$$

ossia nella fatta ipotesi di $y_{x,t}=\frac{0Q_0+Q_1+2Q_2+\ldots+nQ_n}{Q_0+Q_1+Q_2+\ldots+Q_n}$

e di
$$y_{x,t-1}=\frac{0p_0+p_1+2p_2+\ldots+np_n}{p_0+p_1+p_2+\ldots+p_n}$$
si cangerà nella
$$y_{x,t}=\frac{n-2}{n}y_{x,t-1}+1$$
equazione dalla quale ricavandosi
$$y_{x,t-1}=\frac{n-2}{n}y_{x,t-2}+1$$
$$y_{x,t-2}=\frac{n-2}{n}y_{x,t-3}+1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_{x,t-t+1}=\frac{n-2}{n}y_{x,0}+1$$
si otterrà colla successiva sostituzione, e coll'appoggio di un discorso simile al già fatto onde conseguire l'equazione (V).
$$y_{x,t}=\left(\frac{n-2}{n}\right)^t y_{x,0}+\left(\frac{n-2}{n}\right)^{t-1}+\left(\frac{n-2}{n}\right)^{t-2}+\ldots+\frac{n-2}{n}+1\ .$$

Siccome poi denotato mediante le $y_{x,0}$, $y_{x-1,0}$ il rispettivo numero dei viglietti neri contenuti in origine nelle urne date x, $x-1$, abbiamo $y_{x,0}=n$, così l'aspettazione del numero dei viglietti neri contenuti in detta urna x dopo un numero t di permutazioni verrà espressa dall'equazione
$$y_{x,t}=n\left(\frac{n-2}{n}\right)^t+\left(\frac{n-2}{n}\right)^{t-1}+\left(\frac{n-2}{n}\right)^{t-2}+\ldots+\frac{n-2}{n}+1$$
la quale per essere generalmente
$$n\left(\frac{n-2}{n}\right)^t+\left(\frac{n-2}{n}\right)^{t-1}=\frac{(n-1)(n-2)^{t-1}}{n^{t-1}}.$$
Si può anche esprimere mediante
$$y_{x,t}=\frac{(n-1)(n-2)^{t-1}}{n^{t-1}}+\left(\frac{n-2}{n}\right)^{t-2}+\left(\frac{n-2}{n}\right)^{t-3}+\ldots+\frac{n-2}{n}+1$$
che è l'equazione ottenuta per questo caso dal Sig. Bernoulli.

Avendosi poi la somma della serie geometrica

$$1+\frac{n-2}{n}+\left(\frac{n-2}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n-2}{n}\right)^{t-1}=\frac{n^{t+1}-n(n-2)^t}{2.n^t}$$

ed essendo quindi

$$y_{x,t}=\frac{n(n-2)^t}{n}+\frac{n^{t+1}-n(n-2)^t}{2.n^t}=\frac{n(n-2)^t+n^{t+1}}{2n^t}=\frac{n}{2}\left(1+\left(\frac{n-2}{n}\right)^t\right)$$

$$=\frac{n}{2}\left(\frac{((n-1)-1)^t+((n-1)+1)^t}{n^t}\right)=n\left(\frac{(n-1)^t}{n^t}+\frac{t(t-1)(n-1)^{t-2}}{1.2.n^t}+\text{ec.}\right)$$

si comprenderà in primo luogo che all' aumentarsi della t il valore della $y_{x,t}$ si accosterà ognora di più al valore della $\frac{n}{2}$, e che sempre determinar si potrà un valor tale di t per cui il corrispondente valore della $y_{x,t}$ differisca dalla $\frac{n}{2}$ di una quantità minore di qualunque siasi assegnata differenza; si comprenderà poi in secondo luogo che il risultato ottenuto in questo §.° per la $y_{x,t}$ è, come d'altronde esser deve, perfettamente identico a quello che sarebbesi ottenuto mediante la formula (V) convenientemente applicata a questo caso, vale a dire in cui fatto si fosse $a=2$, $y_{x,0}=n$, $y_{x-1,0}=0$, e quindi $y_{x-2,0}=y_{x,0}=n$, $y_{x-3,0}=y_{x-1,0}=0$, ec. ec.

13. Quando il problema delle urne prender si volesse in un modo più generale ancora di quel che lo prese il Sig. la Grange, e che quindi volesse supporsi che il total numero dei viglietti contenuti in origine in ciascuna delle a urne date potesse esser qualunque, purchè >0, e non già in tutte costantemente lo stesso; denotato in tal caso mediante la n_0 il numero totale dei viglietti in assegnato modo diversamente colorati contenuti nell'urna x, mediante la n_1 il numero totale dei viglietti essi pure in assegnato modo diversamente colorati contenuti nell' urna $x-1$, mediante la n_2 il numero totale dei viglietti contenuti nell' urna $x-2$, ec.; ed istituito un discorso simile al già fatto al §. 10. per istabilire l' equazio-

ne (IV), avendo però riguardo che nella fatta ipotesi sarebbe

$$N_1 = n_0 \,.\, n_1 \,.\, n_2 \,.\,.\,.\,.\, n_{(a-1)} \;;\; N_t = (n_0 \,.\, n_1 \,.\, n_2 \,.\,.\,.\, n_{(a-1)})^t$$

$$\gamma_{x,t} = \frac{N_1}{n_0}\left(n_0 - 1\right)\gamma_{x,t-1} + \frac{N_1}{n_1}\gamma_{x-1.t-1}$$

si otterrebbe quindi onde esprimere la ricercata aspettazione, cui si darà al solito il nome di $y_{x,t}$, l'equazione seguente

$$\text{(XXI)} \qquad y_{x,t} = \frac{n_0 - 1}{n_0}\, y_{x,t-1} + \frac{1}{n_1}\, y_{x-1,t-1}$$

la quale sarebbesi ottenuta egualmente se a questo generalissimo caso si fosse debitamente applicato il ragionamento, e il calcolo fatto al §. 11.

Per determinare mediante la preindicata equazione (XXI) il valore della $y_{x,t}$, che è quanto dire per giungere ad ottenerlo espresso colle sole $y_{x,0}$, $y_{x-1,0}$ ec. che sono i rispettivi numeri dei viglietti del dato colore esistenti in origine nelle corrispondenti urne x, $x-1$ ec., mi varrò di un ragionamento simile a quello del §. 10. col quale fu dimostrata la verità della formola (V). Premesso pertanto che mediante la seguente compendiosa espressione

$$\text{(XXII)} \qquad \left(\frac{n_{0,1,2,\ldots\mu} - 1}{n_{0,1,2,\ldots\mu}}\right)^{t-\mu}$$

venga indicato tutto quanto il complesso dei prodotti di $t-\mu$ dimensioni sostanzialmente in quanto alla forma diversi fra loro, che formar si possono con un numero $(t-\mu)$ di fattori, ogn' un dei quali sia una qualunque delle frazioni

$$\frac{n_0 - 1}{n_0},\; \frac{n_1 - 1}{n_1},\; \frac{n_2 - 1}{n_2},\; \ldots\ldots\; \frac{n_\mu - 1}{n_\mu}\;.$$

che potrà, ed anzi dovrà ritrovarsi replicata nello stesso prodotto, e vedervisi quindi elevata a tutte quelle potenze che non essendo maggiori di $t-\mu$ possono soddisfare alla voluta condizione di non omettere verun prodotto di $t-\mu$ dimensioni formato da una o più delle anzidette frazioni, il quale in quanto alla forma si rinvenisse diverso dai contemplati.

Premesso adunque che mediante la su-accennata maniera di scrivere venga indicato il seguente complesso di prodotti

$$\left(\frac{n_0-1}{n_0}\right)^{t-\mu}+\left(\frac{n_0-1}{n_0}\right)^{t-\mu-1}\left(\frac{n_1-1}{n_1}+\frac{n_2-1}{n_2}+\frac{n_3-1}{n_3}+\ldots+\frac{n_\mu-1}{n_\mu}\right)$$

$$+\left(\frac{n_0-1}{n_0}\right)^{t-\mu-2}\left(\left(\frac{n_1-1}{n_1}\right)^2+\left(\frac{n_1-1}{n_1}\right)\left(\frac{n_2-1}{n_2}\right)+\left(\frac{n_2-1}{n_2}\right)^2+\ldots\right)+$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\left(\frac{n_1-1}{n_1}\right)^{t-\mu}+\left(\frac{n_1-1}{n_1}\right)^{t-\mu-1}\left(\frac{n_2-1}{n_2}+\frac{n_3-1}{n_3}+\ldots+\frac{n_\mu-1}{n_\mu}\right).$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

coll' avvertenza quando fosse $t=\mu$, e però $t-\mu=0$, di notare l' unità in luogo della quantità espressa dalla corrispondente formula (XXI), io rifletto che verificandosi l' una e l' altra delle due equazioni seguenti

$$y_{x,t-1}=\begin{cases}\left(\frac{n_0-1}{n_0}\right)^{t-1}y_{x,0}+\frac{1}{n_1}\left(\frac{n_{0,1}-1}{n_{0,1}}\right)^{t-2}y_{x-1,0}+\frac{1}{n_1n_2}\left(\frac{n_{0,1,2}-1}{n_{0,1,2}}\right)^{t-3}y_{x-2,}\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n_1\cdot n_2\cdot n_3\ldots n_\mu}\left(\frac{n_{0,1,2\ldots\mu}-1}{n_{0,1,2..\mu}}\right)^{t-\mu-1}y_{x-\mu,0}+..\end{cases}$$

(XXIII)

$$y_{x-1,t-1}=\begin{cases}\left(\frac{n_1-1}{n_1}\right)^{t-1}y_{x-1,0}+\frac{1}{n_2}\left(\frac{n_{1,2}-1}{n_{1,2}}\right)^{t-2}y_{x-2,0}\\ \qquad+\frac{1}{n_2\ n_3}\left(\frac{n_{1,2,3}-1}{n_{1,2,3}}\right)^{t-3}y_{x-3,0}\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n_2\cdot n_3\ldots n_\mu}\left(\frac{n_{1,2,3\ldots\mu}-1}{n_{1,2,3\ldots\mu}}\right)^{t-\mu}y_{x-\mu,0}+\ldots\end{cases}$$

si verificherà altresì l' equazione

$$\text{(XXIV)}\ y_{x,t}=\begin{cases}\left(\frac{n_0-1}{n_0}\right)^{t}y_{x,0}+\frac{1}{n_1}\left(\frac{n_{0,1}-1}{n_{0,1}}\right)^{t-1}y_{x-1,0}\\ \qquad+\frac{1}{n_1n_2}\left(\frac{n_{0,1,2}-1}{n_{0,1,2}}\right)^{t-2}y_{x-2,0}+\\ +\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n_1\cdot n_2\cdot n_3..n_\mu}\left(\frac{n_{0,1,2\ldots\mu}-1}{n_{0,1,2..\mu}}\right)^{t-\mu}y_{x-\mu,0}+\text{ e}\end{cases}$$

Per convincersi della verità dell'asserto, si consideri, che essendo

$$y_{x,t} = \frac{n_0 - 1}{n_0} \, y_{x,t-1} + \frac{1}{n_1} \cdot y_{x-1,t-1}$$

chiamando C il coefficiente di una qualunque $y_{x-\mu,0}$ nell'espressione della $y_{x,t}$ che si ricerca, sarà

$$C = \frac{n_0 - 1}{n_0} \cdot \frac{1}{n_1 \cdot n_2 \ldots\ldots n_\mu} \left(\frac{n_{0,1,2\ldots\mu} - 1}{n_{0,1,2\ldots\mu}} \right)^{t-\mu-1}$$
$$+ \frac{1}{n_1} \cdot \frac{1}{n_2 \cdot n_3 \ldots\ldots n_1} \left(\frac{n_{1.2\ldots\mu} - 1}{n_{1,2\ldots\mu}} \right)^{t-\mu}$$

Ora $\frac{n_0 - 1}{n_0} \left(\frac{n_{0,1,2\ldots\mu} - 1}{n_{0,1,2\ldots\mu}} \right)^{t-\mu-1}$ pareggia il complesso dei prodotti espressi dalla formula (XXII) che contengono il fattore $\frac{n_0 - 1}{n_0}$, ed $\left(\frac{n_{1,2.3\ldots\mu} - 1}{n_{1,2,3\ldots\mu}} \right)^{t-\mu}$ pareggia il complesso dei prodotti espressi dalla stessa (XXII) che sono privi del fattore $\frac{n_0 - 1}{n_0}$; dunque sarà

$$\text{(XXV)} \quad C = \frac{1}{n_1 \; n_2 \; n_3 \ldots\ldots n_\mu} \left(\frac{n_{0,1,2\ldots\mu} - 1}{n_{0,1,2\ldots\mu}} \right)^{t-\mu}.$$

Dunque verificandosi le equazioni (XXIII) si verificherà altresì l' altra equazione (XXIV) come è stato accennato.

Rifletto ora che se le equazioni (XXIII) si verificassero sempre ponendovi di mano in mano in luogo della x le $x-1$, $x-2$, $x-3$, ec. e corrispondentemente in luogo della n_0 le n_1, n_2, n_3, ec. in luogo della n_1 le n_2, n_3, n_4, ec. in luogo della n_2, le n_3, n_4, n_5, ec., ec. in allora si verificherà altresì l' equazione (XXIV) ponendovi in corrispondenza in luogo della x la $x-1$, oppure la $x-2$, oppure la $x-3$, ec. e rispettivamente in luogo della n_0 le n_1, n_2, n_3 ec. in luogo della n_1 le n_2, n_3, n_4 ec. in luogo della n_2 le n_3, n_4, n_5, ec.

Avendosi nel supposto di $t = 2$.

$$y_{x,t-1} = y_{x,1} = \frac{n_0 - 1}{n_0}\, y_{x,0} + \frac{1}{n_1}\, y_{x-1,0}$$

$$y_{x-1,t-1} = y_{x-1,1} = \frac{n_1 - 1}{n_1}\, y_{x-1,0} + \frac{1}{n_2}\, y_{x-2,0}$$

$$y_{x-2,t-1} = y_{x-2,1} = \frac{n_2 - 1}{n_2}\, y_{x-2,0} + \frac{1}{n_3}\, y_{x-3,0}$$

. . . .

. . . .

$$y_{x-a+1,t-1} = y_{x-a+1,1} = \frac{n_{a-1} - 1}{n_{a-1}}\, y_{x-a+1,0} + \frac{1}{n_a}\, y_{x-a,0}$$

tutte della forma (XXIII), saranno della forma (XXIV), tutti i valori delle $y_{x,2}$, $y_{x-1,2}$, $y_{x-2,2}$, $y_{x-3,2}$, ec. Ma ciò essendo si verificherà, come è facile di vedere, che tali valori delle $y_{x,2}$, $y_{x-1,2}$, $y_{x-2,2}$ ec. saranno pure della forma (XXIII) nella quale siasi fatto aumentare la t d' un' unità; dunque della forma (XXIV) saranno tutti i valori delle $y_{x,3}$, $y_{x-1,3}$, $y_{x-2,3}$ ec. ec. Potendosi replicare un simile discorso successivamente per le $y_{x,4}$, $y_{x-1,4}$ ec. indi per le $y_{x,5}$, $y_{x-1,5}$, ec. e così indefinitamente, dovrà concludersi che la formula (XXIV) vale ad esprimere il valore della $y_{x,t}$ col mezzo dei conosciuti valori delle $y_{x,0}$, $y_{x-1,0}$, $y_{x-2,0}$, ec.

Ad evitare la confusione, e il pericolo insieme che nell' adoprare la suddetta formula (XXIV) potessero trascurarsi alcuni termini i quali d' altronde dovessero calcolarsi, e a togliere qualunque equivoco sul vero significato della formula (XXII) sarà cosa ben fatta il figurarsi un numero t di tante diverse n sottosegnate l' una coll' indice zero, l' altra coll' indice 1, e così di mano in mano cogl' indici 2. 3, ec. $t-1$. Svolta la formula (XXIV), e tutti i termini di essa nell' astratto supposto che le n_0, n_1, n_2 ec. n_{t-1} indichino quantità differenti, in allora si procederà alla sostituzione in luogo della n_0 del total numero dei viglietti contenuti nell' urna x, in luogo della n_1, del numero totale dei viglietti contenuti nell' urna $x - 1$, ec. in luogo della n_{a-1} del numero totale dei viglietti contenuti nell' urna $x - a + 1$, la quale siccome tutte le altre sue antecedenti, corrisponderà ad una delle a urne date nel modo che venne accennato nella 1.ª delle premesse al §. 10. Operando nella spiegata guisa si sfuggirà il pericolo di trascurare molti termini, che dovessero calcolarsi, giacchè veruno di questi potrà presentarsi con forma simile agl' altri.

14. Se mediante il numero c verrà espresso il numero dei colori differenti dei viglietti esistenti in tutte le a urne date come al numero precedente, e se mediante la $y_{x,t}$ contraddistinta dai diversi apici 1.°, 2.°, 3.°, ec. c^{eismo} verrà rappresentata dopo t permutazioni l' aspettazione del numero residuato nell' urna x dei viglietti che rispettivamente si riferiscono a ciascun diverso dei dati colori, ch' io distinguerò col nome di primo, secondo, terzo ec. c^{esimo}, dico che sarà in generale

$$
(\mathrm{XXVI})\left\{\begin{array}{l}
y'_{x,t} + y''_{x,t} + y'''_{x,t} + \ldots\ldots + y^{(c)}_{x,t} = n_0 \\
y'_{x-1,t} + y''_{x-1,t} + y'''_{x-1,t} + \ldots\ldots + y^{(c)}_{x-1,t} = n_1 \\
y'_{x-2,t} + y''_{x-2,t} + y'''_{x-2,t} + \ldots\ldots + y^{(c)}_{x-2,t} = n_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y'_{x-a+1,t} + y''_{x-a+1,t} + y'''_{x-a+2,t} + \ldots\ldots + y^{(c)}_{x-a+1,t} = n_{a-1}
\end{array}\right.
$$

Onde provarlo rifletto da prima che

$$
y'_{x,t} = \frac{n_0 - 1}{n_0} y'_{,xt-1} + \frac{1}{n_1} y'_{x-1,t-1}
$$

$$y''_{x,t}=\frac{n_0-1}{n_0}y''_{x,t-1}+\frac{1}{n_1}y''_{x-1,t-1}$$

. . . .

$$y^{(c)}_{x,t}=\frac{n_0-1}{n_0}y^{(c)}_{x,t-1}+\frac{1}{n_1}y^{(c)}_{x-1,t-1}$$

e che quindi fattosi generalmente

$$y'_{z,r}+y''_{z,r}+y'''_{z,r}+\ldots\ldots+y^{(c)}_{z,r}=\Sigma y_{z,r}$$

sarà sommando assieme i primi e secondi membri delle preaccennate equazioni

$$\Sigma y_{x,t}=\frac{n_0-1}{n_0}\Sigma y_{x,t-1}+\frac{1}{n_1}\Sigma y_{x-1,t-1}$$

Riflettendo poscia che essendo

$$y'_{x-1,t}=\frac{n_1-1}{n_1}y'_{x-1,t-1}+\frac{1}{n_2}y'_{x-2,t-1}$$

$$y''_{x-1,t}=\frac{n_1-1}{n_1}y''_{x-1,t-1}+\frac{1}{n_2}y''_{x-2,t-1}$$

. . . .

$$y^{(c)}_{x-1,t}=\frac{n_1-1}{n_1}y^{(c)}_{x-1,t-1}+\frac{1}{n_2}y^{(c)}_{x-2,t-1}$$

sarà egualmente

$$\Sigma y_{x-1,t}=\frac{n_1-1}{n_1}\Sigma y_{x-1,t-1}+\frac{1}{n_2}\Sigma y_{x-2,t-1};$$

che essendo

$$y'_{x-2,t}=\frac{n_2-1}{n_2}y'_{x-2,t-1}+\frac{1}{n_3}y'_{x-3,t-1}$$

$$y''_{x-2,t}=\frac{n_2-1}{n_2}y''_{x-2,t-1}+\frac{1}{n_3}y''_{x-3,t-1}$$

. . . .

$$y^{(c)}_{x-2,t}=\frac{n_2-1}{n_2}y^{(c)}_{x-2,t-1}+\frac{1}{n_3}y^{(c)}_{x-3,t-1}$$

sarà pure

$$\Sigma y_{x-2,t}=\frac{n_2-1}{n_2}\Sigma y_{x-2,t-1}+\frac{1}{n_3}\Sigma y_{x-3,t-1}$$

ec. ec.

Rifletto finalmente che qualora si verificassero generalmente le equazioni

$$\Sigma y_{x,t-1}=n_0;\ \Sigma y_{x-1,t-1}=n_1;\ \Sigma y_{x-2,t-1}=n_2;\ \text{ec.}$$
$$\Sigma y_{x-a+1,\,t-1}=n_{a-1}$$

si verificherebbero altresì le altre

$$\Sigma y_{x,t}=n_0;\ \Sigma y_{x-1,t}=n_1;\ \Sigma y_{x-2,t}=n_2,\ \text{ec. ec. }\ \Sigma y_{x-a+1,t}=n_{a-1}$$

giacchè avendosi generalmente

$$\Sigma y_{x-\mu,t}=\frac{n_\mu-1}{n_\mu}\Sigma y_{x-\mu,t-1}+\frac{1}{n_{\mu+1}}\Sigma y_{x-\mu-1,t-1}$$

e per l' ipotesi $\Sigma y_{x-\mu,t-1}=n_\mu$, $\Sigma y_{x-\mu-1,t-1}=n_{\mu+1}$ ne consegue che sarebbe in generale

$$\Sigma y_{x-\mu,t}=n_\mu .$$

Ora noi abbiamo $\Sigma y_{x,0}=n_0$; $\Sigma y_{x-1,0}=n_1$; $\Sigma y_{x-2,0}=n_2$, ec. $\Sigma y_{x-a+1,0}=n_{a-1}$; dunque sarà ancora $\Sigma y_{x,1}=n_0$; $\Sigma y_{x-1,1}=n_1$, ec. $\Sigma y_{x-a+1,1}=n_{a-1}$, e quindi $\Sigma y_{x,2}=n_0$, $\Sigma y_{x-1,2}=n_1$ ec. $\Sigma y_{x-a+1,2}=n_{a-1}$ ec. ec. e generalmente $\Sigma y_{x,t}=n_0$, $\Sigma y_{x-1,t}=n_1$, ec. $\Sigma y_{x-a+1,t}=n_{a-1}$ che sono le equazioni (XXVI) i primi membri delle quali sono stati quì compendiati mediante le rispettive espressioni di $\Sigma y_{x,t}$, $\Sigma y_{x-1,t}$ ec.

15. Prendasi a considerare la generalissima formula

(XXI) $$y_{x,t}=\frac{n_0-1}{n_0}y_{x,t-1}+\frac{1}{n_1}y_{x-1,t-1}$$

e l' altra che quindi ne nasce

$$y_{x-\mu,t}=\frac{n_\mu-1}{n_\mu}y_{x-\mu,t-1}+\frac{1}{n_{\mu+1}}y_{x-\mu-1,t-1}$$

e si vedrà facilmente come dopo un qualunque numero t di permutazioni, la somma delle aspettazioni, quanto al numero dei viglietti di un dato colore residuati in tutte le a urne supposte, pareggi costantemente, come dee farsi d' altronde, il complessivo numero dei viglietti medesimi esistente in origine nelle a urne suddette, e che si avrà in conseguenza

(XXVII)
$$y_{x,t}+y_{x-1,t}+y_{x-2,t}+\dots\dots+y_{x-a+1,t}=$$
$$y_{x,0}+y_{x-1,0}+y_{x-2,0}+\dots\dots+y_{x-a+1,0}\,.$$

Avendosi infatti per la suindicata equazione, che si ricava dalla (XXI) le equazioni seguenti

$$y_{x,t}=\frac{n_0-1}{n_0}\,y_{x,t-1}+\frac{1}{n_1}\,y_{x-1,t-1}=$$
$$y_{x,t-1}-\frac{1}{n_0}\,y_{x,t-1}+\frac{1}{n_1}\,y_{x-1,t-1}\,,$$
$$y_{x-1,t}=\frac{n_1-1}{n_1}\,y_{x-1,t-1}+\frac{1}{n_2}\,y_{x-2,t-1}=$$
$$y_{x-1,t-1}-\frac{1}{n_1}\,y_{x-1,t-1}+\frac{1}{n_2}\,y_{x-2,t-1}\,,$$
$$y_{x-2,t-1}=\frac{n_2-1}{n_2}\,y_{x-2,t-1}+\frac{1}{n_3}\,y_{x-3,t-1}=$$
$$y_{x-2,t-1}-\frac{1}{n_2}\,y_{x-2,t-1}+\frac{1}{n_3}\,y_{x-3,t-1}$$

(XXVIII) . . . .

$$y_{x-a+2,t}=\frac{n_{a-2}-1}{n_{a-2}}\,y_{x-a+2,t-1}+\frac{1}{n_{a-1}}\,y_{x-a+1,t-1}=$$
$$y_{x-a+2,t-1}-\frac{1}{n_{a-2}}\,y_{x-a+2,t-1}+\frac{1}{n_{a-1}}\,y_{x-a+1,t-1}\,,$$
$$y_{x-a+1,t}=\frac{n_{a-1}-1}{n_{a-1}}\,y_{x-a+1,t-1}+\frac{1}{n_0}\,y_{x,t-1}=$$
$$y_{x-a+1,t-1}-\frac{1}{n_{a-1}}\,y_{x-a+1,t-1}+\frac{1}{n_0}\,y_{x,t-1}$$

sarà sommando e riducendo

$$y_{x,t}+y_{x-1,t}+y_{x-2,t}+\dots\dots+y_{x-a+1,t}=$$
$$y_{x,t-1}+y_{x-1,t-1}+y_{x-2,t-1}+\dots\dots+y_{x-a+1,t-1}$$

equazione dalla quale desumendosi che il valore della somma

$$y_{x,t}+y_{x-1,t}+y_{x-2,t}+\dots\dots+y_{x-a+1,t}$$

non s' altera punto allora quando la t si cangia in $t-1$, ci fornisce un giusto motivo di ritenere che il valore della somma medesima resterà sempre invariabile al cangiarsi della t

in $t-1$, poscia in $t-2$, ec. e finalmente in $t-t$, e che sarà in conseguenza

$$y_{x,t}+y_{x-1,t}+y_{x-2,t}+\ldots\ldots+y_{x-a+1,t}=$$

$$y_{x,0}+y_{x-1,0}+\ldots\ldots\ldots+y_{x-a+1,0}.$$

16. Le formule (V) e (XXIV) convenientemente applicate ai corrispondenti casi varranno eziandio a sciogliere il problema mediante il quale richiesto fosse di determinare l' aspettazione del numero dei viglietti di un dato colore probabilmente residuati nella prima fra un definito numero a di urne dopo un numero t di permutazioni, tutte eseguite in questo modo che dopo estratto contemporaneamente un viglietto da ogn' una, il viglietto estratto dalla seconda si riponesse nella prima, il viglietto estratto dalla terza si riponesse nella seconda, e così del resto, lacerando il viglietto estratto dalla prim' urna, e riponendo nell' ultima un viglietto di color diverso dal dato. Siccome in fatti la difficoltà ridurrebbesi al caso che il numero a delle urne date fosse minore di $t+1$, e siccome in questo niente influirebbe al pieno adempimento delle condizioni del problema il supporre un numero $a'>t+1$ di urne, delle quali e per ordine in primo luogo collocate le a date, poscia le restanti a compimento del numero delle supposte, con che queste ultime non contenessero verun viglietto di color simile al dato, così evidentemente si renderebbe palese che avendosi in tale ipotesi $y_{x-a,0}=0$; $y_{x-a-1,0}=0$, ec. $y_{x-a'+1,0}=0$, e sussistendo quindi i soli primi a termini delle rispettive formule (V) e (XXIV), col mezzo dei soli preindicati a termini resterebbe determinata l' aspettazione che si ricercava. È perciò che nel caso di un' urna sola contenente n viglietti, dei quali un numero $y_{x,0}$ colorati di un dato colore, per esempio rosso, quando ogni permutazione si compia estraendo dalla prefata urna un viglietto alla sorte, e facendone entrare in luogo suo un altro qualunque, purchè di color

diverso dal dato rosso, l' aspettazione del numero dei viglietti rossi residuati in detta urna dopo un numero t di simili permutazioni verrà espressa dall' equazione

$$y_{x,t}=\left(\frac{n-1}{n}\right)^t y_{x,0}$$

Nell' ipotesi fatta in questo paragrafo non sussistendo se non se i primi a termini delle formule (V) e (XXIV), ed essendo chiaro d' altronde che per essere la a, la n, oppure le n_0, n_1, n_2 ec. n_{a-1}, tutte quantità intere, finite, e maggiori dello zero, sarà ognor reperibile un valor tale di t, per cui ciascuno dei primi a termini suddetti diventi minore di qualunque assegnabile quantità. Si scorge quindi, che lo zero sarà il limite dei decrementi dell' aspettazione ricercata nel problema esposto in questo paragrafo.

17. Se nel generalissimo caso del problema delle urne esposto al §. 13 dopo eseguito fra i viglietti delle a urne date un numero t di permutazioni, e dopo ottenute relativamente ad una qualunque urna x le diverse aspettazioni dei differenti numeri dei viglietti dei varj colori primo, secondo, terzo, ec. c^{esimo} ivi residuati corrispondentemente espresse dalle $y'_{x,t}$, $y''_{x,t}$, $y'''_{x,t}$, ec. $y^{(c)}_{x,t}$, si compia la successiva permutazione $(t+1)^{esima}$ fra i viglietti medesimi, siccome ciò posto, stante l' equazione (XXI), si avrà

$$y'_{x,t+1}=\frac{n_0-1}{n_0}y'_{x,t}+\frac{1}{n_1}y'_{x-1,t}$$

$$y''_{x,t+1}=\frac{n_0-1}{n_0}y''_{x,t}+\frac{1}{n_1}y''_{x-1,t}$$

. . . .

. . . .

$$y^{(c)}_{x,t+1}=\frac{n_0-1}{n_0}y^{(c)}_{x,t}+\frac{1}{n_1}y^{(c)}_{x-1,t}$$

così anche dietro le equazioni (XXVI) del §. 14 è chiaro che sarebbesi ottenuto dopo la $(t+1)^{esima}$ permutazione un risultato identico al sopra indicato qualora, compiuta la permutazione t^{esima} si fosse imaginato un numero a di urne una delle quali denominata x avesse contenuto un numero n_0 di viglietti tutti di ugual superficie, e tutti ugualmente colorati, vale a dire divisi tutti in un eguale conveniente numero di parti, onde evitar le frazioni, e tutti colorati del colore denotato dall' apice primo per un numero delle spiegate parti indicato dalla $\frac{y'_{x,t}}{n_0}$, tutti colorati del colore indicato dall' apice secondo per un numero delle parti medesime indicato dalla $\frac{y''_{x,t}}{n_0}$, ec.; un' altr' urna prossima alla suddetta denominata $x-1$ avesse contenuto un numero n_1 di viglietti della stessa ugual superficie, e divisi tutti nello stesso egual numero di parti delle quali ogni viglietto ne comprendesse un numero espresso dalla $\frac{y'_{x-1,t}}{n_1}$ di colorate del colore indicato dall' apice primo, ne comprendesse un numero denotato dalla $\frac{y''_{x-1,t}}{n_1}$ di colorate del colore indicato dall'apice secondo ec.; un' altr' urna $x-2$ prossima ec. ec.

Considerate ora nell' espressa foggia le a urne date dopo compiuta la t^{esima} permutazione, ne consegue che lo stato loro corrisponder deve pienamente allo stato che per la natura dei liquidi perfettamente miscibili avrebbero acquistato dopo t permutazioni a botti, una delle quali chiamata x avesse da prima contenuto un numero n_0 di misure di un misto composto di un numero c di liquidi differenti, la rispettiva quantità dei quali fosse stata in detto misto determinata mediante l' equazione

$$y'_{x,0} + y''_{x,0} + y'''_{x,0} + \ldots\ldots\ldots + y^{(c)}_{x,0} = n_0$$

un' altra delle quali chiamata $x - 1$ avesse contenuto un numero n_1 di simili misure di altro misto composto dallo stesso numero c di liquidi come sopra, la rispettiva quantità dei quali nel misto medesimo fosse stata determinata dall' equazione

$$y'_{x-1,0} + y''_{x-1,0} + y'''_{x-1,0} + \ldots + y^{(c)}_{x-1,0} = n_1$$

e così delle altre botti restanti. Dunque dopo la successiva $(t+1)^{esima}$ permutazione l'aspettazione quanto al numero dei viglietti di ciascun' assegnato fra i differenti c colori dei viglietti medesimi residuato in una qualunque urna x delle a date verrà espressa mediante una formula identica a quella con cui per la natura dei liquidi perfettamente miscibili nella fatta ipotesi dopo un simile numero di permutazioni si esprime lo stato che realmente acquista la botte x fra le a date, per rapporto alla quantità di ciascun corrispondente diverso liquido componente il misto in essa contenuto. Dunque in pari circostanze, ad eccezione che nel problema delle urne la ricerca s' intende diretta alla determinazione di un' aspettazione, e in quello delle botti la ricerca medesima s' intende diretta alla determinazione dello stato reale che per la natura dei liquidi acquistano le botti istesse dopo un' assegnato numero di permutazioni, le formule che sciolgono entrambi i prefati problemi dovranno essere, come lo sono difatti, in tutto simili ed identiche.

Se il Sig. Malfatti nel suo esame critico del Bernoulliano problema dalla conosciuta identità delle formule per la soluzione dei due problemi delle urne, e delle botti, anzi che ricavare un motivo onde tacciare d' erronea la formula del Bernoulli, avesse sospettato che l' identità medesima non poteva in verun' altro modo aver luogo, se non supponendo che nel senso d' aspettazione avesse dovuto intendersi l' enunciato del problema del precitato Geometra, avrebbe non v' ha dubbio diretti gli sforzi suoi alla ricerca delle possibili combinazioni delle urne, e sarebbe quindi pervenuto al conseguimento della formula (V), o di altra equivalente, la quale riconfermandolo nella preconcepita opinione del senso vero dell' enunciato del Bernoulliano problema, lo avrebbe in pari tempo convinto della verità della soluzione ch' Egli aveva presa a disamina.

18. Se i numeri dei viglietti di un dato colore esistenti nelle rispettive a urne supposte $x, x-1, x-2$, ec., $x-a+1$ ed espressi dalle corrispondenti $y_{x,0}$, $y_{x-1,0}$, $y_{x-2,0}$, ec. $y_{x-a+1,0}$ avessero fra loro una tal relazione che si verificassero tutte le proporzioni seguenti

$$\begin{array}{llll}
y_{x,0} & : y_{x-1,0} & :: n_0 & : n_1 \\
y_{x-1,0} & : y_{x-2,0} & :: n_1 & : n_2 \\
y_{x-2,0} & : y_{x-3,0} & :: n_2 & : n_3 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
y_{x-a+2,0} & : y_{x-a+1,0} & :: n_{a-2} & : n_{a-1}
\end{array}$$

io dico che dopo un numero qualunque t di permutazioni eseguito come sopra fra i viglietti delle stesse a urne date, sussisteranno costantemente fra le corrispondenti aspettazioni dei numeri dei viglietti del prefato colore residuati nelle urne x, $x-1$, $x-2$, ec. $x-a+1$ gli stessi rapporti vale a dire sarà sempre qualunque siasi la t

$$\begin{array}{llll}
y_{x,t} & : y_{x-1,t} & :: n_0 & : n_1 \\
y_{x-1,t} & : y_{x-2,t} & :: n_1 & : n_2 \\
y_{x-2,t} & : y_{x-3,t} & :: n_2 & : n_3 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
y_{x-a+2,t} & : y_{x-a+1,t} & :: n_{a-2} & : n_{a-1}.
\end{array}$$

Supposto infatti che gli enunciati rapporti si verificassero dopo la permutazione $(t-1)^{esima}$, è chiaro che si verificherebbero eziandio dopo la susseguente permutazione t^{esima}, mentre essendo per le supposte analogie

$$\frac{1}{n_0}\,y_{x,t-1}=\frac{1}{n_1}\,y_{x-1,t-1}$$

$$\frac{1}{n_1}\,y_{x-1,t-1}=\frac{1}{n_2}\,y_{x-2,t-1}$$

$$\frac{1}{n_2}\,y_{x-2,t-1}=\frac{1}{n_3}\,y_{x-3,t-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{n_{a-2}}\,y_{x-a+2,t-1}=\frac{1}{n_{a-1}}\,y_{x-a+1,t-1}$$

dalle equazioni (XXVIII) subito si raccoglie che sarà

$$y_{x,t}=y_{x,t-1}\,;\ y_{x-1,t}=y_{x-1,t-1}\,;$$

$$y_{x-2,t}=y_{x-2,t+1}\,;\ \text{ec. } y_{x-a+1,t}=y_{x-a+1,t-1}$$

e quindi nella fatta supposizione

$$y_{x,t}:y_{x-1,t}::n_0:n_1\,;\ y_{x-1,t}:y_{x-2,t}::n_1:n_2\,;\ \text{ec.}$$

Essendo poi per l' ipotesi $y_{x,0}:y_{x-1,0}::n_0:n_1$, $y_{x-1,0}:y_{x-2,0}::n_1:n_2$, ec. $y_{x-a+2,0}:y_{x-a+1,0}::n_{a-2}:n_{a-1}$; $y_{x-a+1,0}:y_{x\,0}::n_{a-1}:n_0$ sarà in conseguenza di quanto è stato detto poc' anzi

$$y_{x,1}:y_{x-1,1}::n_0:n_1\,;\ y_{x-1,1}:y_{x-2,1}::n_1:n_2\,;\ \text{ec.}$$

$$y_{x-a+2,1}:y_{x-a+1,1}::n_{a-2}:n_{a-1}\,,\ y_{x-a+1,1}:y_{x,0}::n_{a-1}:n_0\,;$$

d' onde per la ragione medesima, si ricaverà

$$y_{x,2}:y_{x-1,2}::n_0:n_1\,;\ y_{x-1,2}:y_{x-2,2}::n_1:n_2\,;\ \text{ec. ec.}$$

d' onde procedendo si ricaverà finalmente siccome è stato enunciato

$$y_{x,t} : y_{x-1,t} :: n_0 : n_1 ; \; y_{x-1,t} : y_{x-2,t} :: n_1 : n_2 ; \text{ ec.}$$
$$y_{x-a+2,t} : y_{x-a+1,t} :: n_{a-2} : n_{a-1} .$$

Si comprenderà poi dalle equazioni (XXVIII) che nella fatta ipotesi sarà

$$\begin{array}{lllll} y_{x,0} & = y_{x,1} & = y_{x,2} & = \ldots\ldots = & y_{x,t} \\ y_{x-1,0} & = y_{x-1,1} & = y_{x-1,2} & = \ldots\ldots = & y_{x-1,t} \\ y_{x-2,0} & = y_{x-2,1} & = y_{x-2,2} & = \ldots\ldots = & y_{x-2,t} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{x-a+1,0} & = y_{x-a+1,1} & = y_{x-a+1,2} & = \ldots\ldots = & y_{x-a+1,t} \end{array}$$

e si comprenderà egualmente dalle stesse equazioni (XXVIII) che qualunque volta accader potesse che dopo $(t-1)$ permutazioni le $y_{x,t-1}$, $y_{x-1,t-1}$, ec. avessero fra loro le mentovate ragioni talchè fosse

$$y_{x,t-1} : y_{x-1,t-1} :: n_0 : n_1 ; \; y_{x-1,t-1} : y_{x-2,t-1} :: n_1 : n_2 ; \text{ ec.}$$
$$y_{x-a+2,t-1} : y_{x-a+1,t-1} :: n_{a-2} : n_{a-1}$$

sarebbe sempre

$$\begin{array}{llll} y_{x,t-1} & = y_{x,t} & = y_{x,t+1} & = \ldots\ldots \\ y_{x-1,t-1} & = y_{x-1,t} & = y_{x-1,t+1} & = \ldots\ldots \\ y_{x-2,t-1} & = y_{x-2,t} & = y_{x-2,t+1} & = \ldots\ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{x-a+1,t-1} & = y_{x-a+1,t} & = y_{x-a+1,t+1} & = \ldots\ldots \end{array}$$

19. Nelle precedenti ipotesi supposto aversi dopo un numero r di permutazioni

$$y_{x,r} : y_{x-1,r} :: n_0 : n_1 , \; y_{x-1,r} : y_{x-2,r} :: n_1 : n_2 , \text{ ec. ec.}$$
$$y_{x-a+2,r} = y_{x-a+1,r} :: n_{a-2} : n_{a-1}$$

e quindi

$$y_{x,r} : y_{x-1,r} :: n_0 : n_1 \text{, } y_{x,r} : y_{x-2,r} :: n_0 : n_2 \text{ ec.}$$

$$y_{x,r} : y_{x-a+1,r} :: n_0 : n_{a-1}$$

e perciò

$$\frac{1}{n_0} y_{x,r} = \frac{1}{n_1} y_{x-1,r} = \frac{1}{n_2} y_{x-2,r} = \ldots = \frac{1}{n_{a-1}} y_{x-a+1,r}$$

ed essendo per ciò che è stato concluso al paragrafo antecedente

$$y_{x,r} = y_{x,t}$$

qualunque siasi la t purchè maggiore della r, ed essendo altresì, come è facile di vedere

$$\Sigma y_{x,t} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{n_0 - 1}{n_0}\right)^t \Sigma y_{x,0} + \frac{1}{n_1}\left(\frac{n_{0,1} - 1}{n_{0,1}}\right)^{t-1} \Sigma y_{x-1,0} + \frac{1}{n_1 n_2}\left(\frac{n_{0,1,2} - 1}{n_{0,1,2}}\right)^{t-2} \Sigma y_{x-2,0} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n_1 n_2 \ldots n_\mu}\left(\frac{n_{0,1,2\ldots\mu} - 1}{n_{0,1,2..\mu}}\right)^{t-\mu} \Sigma y_{x-\mu,0} + \ldots \end{array} \right.$$

d' onde, per quanto si è detto al § 14, ricavasi

$$n_0 = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{n_0 - 1}{n_0}\right)^t n_0 + \frac{1}{n_1}\left(\frac{n_{0.1} - 1}{n_{0,1}}\right)^{t-1} n_1 + \frac{1}{n_1 n_2}\left(\frac{n_{0,1,2} - 1}{n_{0,1,2}}\right)^{t-2} n_2 + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n_1 n_2 \ldots n_\mu}\left(\frac{n_{0,1,2\ldots\mu} - 1}{n_{0,1,2\ldots\mu}}\right)^{t-\mu} n_\mu + \ldots \end{array} \right.$$

e quindi

$$1 = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{n_0 - 1}{n_0}\right)^t + \frac{1}{n_0}\left(\frac{n_{0,1} - 1}{n_{0,1}}\right)^{t-1} + \frac{1}{n_0 n_1}\left(\frac{n_{0,1,2} - 1}{n_{0,1,2}}\right)^{t-2} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n_0 n_1 \ldots n_{\mu-1}}\left(\frac{n_{0,1,2\ldots\mu} - 1}{n_{0,1,2..\mu}}\right)^{t-\mu} + \ldots \end{array} \right.$$

sarà

$$\text{(XXIX)}\ y_{x,r} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{n_0 - 1}{n_0}\right)^t y_{x,r} + \frac{1}{n_0}\left(\frac{n_{0,1} - 1}{n_{0,1}}\right)^{t-1} y_{x,r} \\ + \frac{1}{n_0 n_1}\left(\frac{n_{0,1,2} - 1}{n_{0,1,2}}\right)^{t-2} y_{x,r} + \ldots \\ + \ldots \frac{1}{n_0 . n_1 \ldots n_{\mu-1}}\left(\frac{n_{0,1,2\ldots\mu} - 1}{n_{0,1,2\ldots\mu}}\right)^{t-\mu} y_{x,r} \end{array} \right.$$

Sostituendo nel secondo, terzo, quarto, ec. termine del secondo membro della precedente equazione rispettivamente e di mano in mano in luogo di $\frac{1}{n_0} y_{x,r}$ gli equivalenti valori $\frac{1}{n_1} y_{x-1,r}$, $\frac{1}{n_2} y_{x-2,r}$, ec. si ricaverà

$$y_{x,r} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{n_0 - 1}{n_0}\right)^t y_{x,r} + \frac{1}{n_1} \left(\frac{n_{0,1} - 1}{n_{0,1}}\right)^{t-1} y_{x-1,r} + \\ \qquad \frac{1}{n_1 n_2} \left(\frac{n_{0,1,2} - 1}{n_{0,1,2}}\right)^{t-2} y_{x-2,r} + \text{ec.} \\ + \frac{1}{n_1 \, n_2 \, n_3 \ldots\ldots n_\mu} \left(\frac{n_{0,1,2\ldots\mu} - 1}{n_{0,1,2\ldots\mu}}\right)^{t-\mu} y_{x-\mu,r} + \text{ec.} \end{array} \right.$$

Essendo pertanto $y_{x,r} = y_{x,t}$ qualunque siasi la $t > r$, sarà per l'equazione (XXIV)

$$\begin{array}{l} \left(\frac{n_0 - 1}{n_0}\right)^t y_{x,0} + \frac{1}{n_1} \left(\frac{n_{0,1} - 1}{n_{0,1}}\right)^{t-1} y_{x-1,0} + \ldots + \\ \qquad \frac{1}{n_1 \, n_2 \ldots\ldots n_\mu} \left(\frac{n_{0,1,.2\ldots\mu} - 1}{n_{0,1,2\ldots\mu}}\right)^{t-\mu} y_{x-\mu,0} + \text{ec.} \\ = \left(\frac{n_0 - 1}{n_0}\right)^t y_{x,r} + \frac{1}{n_1} \left(\frac{n_{0,1} - 1}{n_{0,1}}\right)^{t-1} y_{x-1,r} + \ldots\ldots + \\ \qquad \frac{1}{n_1 \, n_2 \ldots\ldots n_\mu} \left(\frac{n_{0,1,2\ldots\mu} - 1}{n_{0,1,2\ldots\mu}}\right)^{t-\mu} y_{x-\mu,r} + \text{ec.} \end{array}$$

qualunque sia la $t > r$.

Con discorso analogo si prova che qualunque siasi la $t > r$ sarà sempre nella fatta supposizione

$$\begin{array}{l} \left(\frac{n_1 - 1}{n_1}\right)^t y_{x-1,0} + \frac{1}{n_2} \left(\frac{n_{1,2} - 1}{n_{1,2}}\right)^{t-1} y_{x-2} \\ \qquad + \frac{1}{n_2 \, n_3} \left(\frac{n_{1,2,3} - 1}{n_{1,2,3}}\right)^{t-2} y_{x-3,0} + \ldots \\ = \left(\frac{n_1 - 1}{n_1}\right)^t y_{x-1,r} + \frac{1}{n_2} \left(\frac{n_{1,2} - 1}{n_{1,2}}\right)^{t-1} y_{x-2,r} + \\ \frac{1}{n_2 \, n_3} \quad \frac{n_{1.2,3} - 1}{n_{1,2,3}}\Bigg)^{t-2} y_{x-4,r} + \ldots\ldots \end{array}$$

sarà ancora

$$\begin{array}{l} \left(\frac{n_2 - 1}{n_2}\right)^t y_{x-2.0} + \frac{1}{n_3} \left(\frac{n_{2.3} - 1}{n_{2,3}}\right)^{t-1} y_{x-3,0} + \\ \qquad \frac{1}{n_3 \, n_4} \left(\frac{n_{2,3,4} - 1}{n_{2,3,4}}\right)^{t-2} y_{x-4,0} + \ldots\ldots = \end{array}$$

$$= \left(\frac{n_2 - 1}{n_2}\right)^t y_{x-2,r} + \frac{1}{n_3}\left(\frac{n_{2,3} - 1}{n_{2,3}}\right)^{t-1} y_{x-3,r} +$$
$$\frac{1}{n_3\ n_4}\left(\frac{n_{2,3:4} - 1}{n_{2,3,4}}\right)^{t-2} y_{x-4,r} + \ldots\ldots$$

. . . .

20. Perchè si verifichino le equazioni tutte del paragrafo precedente sopposto $y_{x,r} = y_{x,0} + \pi_0$; $y_{x-1,r} = y_{x-1,0} + \pi_1$, $y_{x-2,r} = y_{x-2,0} + \pi_2$ ec. $y_{x-a+1,r} = y_{x-a+1,0} + \pi_{a-1}$ sarà mestieri che per qualunque valore intero di $t > r$ si verifichino le equazieni

$$\text{(XXX)}\ \left\{\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{n_0 - 1}{n_0}\right)^t \pi_0 + \frac{1}{n_1}\left(\frac{n_{0,1} - 1}{n_{0,1}}\right)^{t-1} \pi_1 + \frac{1}{n_1\ n_2}\left(\frac{n_{0,1,2} - 1}{n_{0,1,2}}\right)^{t-2} \pi_2 + \\ &\quad \ldots + \frac{1}{n_1\ n_2 \ldots n_\mu}\left(\frac{n_{0,1,2\ldots\mu} - 1}{n_{0,1,2\ldots\mu}}\right)^{t-\mu} \pi_\mu + \text{ec.} \\ 0 &= \left(\frac{n_1 - 1}{n_1}\right)^t \pi_1 + \frac{1}{n_2}\left(\frac{n_{1,2} - 1}{n_{1,2}}\right)^{t-1} \pi_2 + \ldots\ldots\ldots \\ &\quad \ldots + \frac{1}{n_2\ n_3 \ldots n_{\mu+1}}\left(\frac{n_{1,2\ldots(\mu+1)} -}{n_{1,2\ldots\mu+1}}\right)^{t-\mu} \pi_{\mu+1} + \text{ec.} \\ 0 &= \left(\frac{n_2 - 1}{n_2}\right)^t \pi_2 + \frac{1}{n_3}\left(\frac{n_{2,3} - 1}{n_{2,3}}\right)^{t-1} \pi_3 + \ldots\ldots \\ &\quad \ldots + \frac{1}{n_3\ n_4 \ldots n_{\mu+2}}\left(\frac{n_{2,3\ldots(\mu+2)} - 1}{n_{2,3\ldots\mu+2}}\right)^{t-\mu} \pi_{\mu+2} + \text{ec.} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

ove si vede che pel § 15. sul fine sarà

$$\pi_0 + \pi^{1} + \pi_2 + \ldots\ldots + \pi_{a-1} = 0.$$

21. Nel solo caso particolarissimo di $n_0 = n_1 = n_2 = \ldots = n_{a-1}$ per cui l'equazione (XXIV) cangiasi nella (V), e nella sola special circostanza di esso nella quale abbiasi $\pi_0 = -\pi_1 = \pi_2 = -\pi_3 = \ldots = -\pi_{2p-1}$ è a mio credere, e come dimostrerò nel decorso, possibile che possa sussistere l'equazione (XXX) a meno che non vogliansi uguali allo zero

tutte le π_0, π_1, π_2, ec. e quando non abbiasi in conseguenza.

$$y_{x,r} = y_{x,0},\ y_{x-1,r} = y_{x-1,0},\ y_{x-2,r} = y_{x-2,0} \text{ ec. ec.}$$

Il divisato caso può unicamente aver luogo quando il numero a delle urne date sia pari, quando ogn' una di esse contenga due soli viglietti colorati per modo che nelle urne alterne $x, x-2, x-4$, ec. non se ne ritrovi veruno tinto del dato colore, mentre in tutte le altre si abbiano o tutti e due, od un solo costantemente colorato del colore medesimo; o vice versa può aver luogo ugualmente quando contenendo tutte le urne prime o tutti e due od un solo viglietto colorato del dato colore tutte le seconde non ne contengan veruno, oppure vicendevolmente ne contengan un solo, o tutti e due colorati del colore predetto. Che poi in detto caso verifichinsi le equazioni (XXX) io lo ripeto dalla speciale proprietà per la quale nello sviluppo della potenza t^{esima} del binomio $1+1$ la somma dei termini collocati in posto pari uguaglia sempre l' altra di quelli collocati in posto dispari. Di fatti siccome nel supposto indicato i secondi membri delle equazioni (XXX) riduconsi tutti all' espressione seguente

$$\frac{1}{2^t}\pi_0 - \frac{t}{2^t}\pi_0 + \frac{t(t-1)}{2.2^t}\pi_0 - \text{ec.} + \text{ec.} \mp \frac{t}{2^t}\pi_0 \pm \frac{1}{2^t}\pi_0$$

che in forza della riferita proprietà è identicamente uguale allo zero, così rendesi manifesta la verità dell' asserto.

22. In conseguenza delle quali cose ho quindi rivolte le ricerche mie allo scopo di rinvenire una dimostrazione elementare diretta a provare, che fuor dei casi accenati, le ragioni tutte dell'una all'altra fra loro delle $y_{x,t}, y_{x-1,t}, y_{x-2,t}$, ec. $y_{x-a+1,t}$ mai potranno ugualiare le corrispondenti ragioni dell' una all'altra fra loro delle n_0, n_1, n_2, ec. n_{a-1}; che ciò non di meno dando alla t dei valori sempre maggiori sarà ogn' ora fattibile dopo un' indefinito numero di permutazioni di pervenire a tai risultati, che le ragioni tutte dell' uno all' altro di essi

differiscano dalle rispettive ragioni dell' una all' altra delle n_0, n_1, n_2, ec., n_{a-1} di una quantità minore di qualunque assegnata, per modo che a giusto titolo queste ultime ragioni abbiano a considerarsi siccome i diversi limiti ai quali, coll' aumentarsi il numero delle permutazioni, tendono incessantemente senza potervi giungere mai ad uguagliare le prime.

Ho considerata la cosa tanto nella special ipotesi del problema del Sig. La Grange quanto nell'altra più generale dello stesso problema indicata al §. 13. Siccome poi nell' opuscolo che per l' entità del soggetto, e per la nitidezza e precisione dei ragionamenti io reputo non mai lodato abbastanza del celebre Professore Ruffini intitolato *Riflessioni critiche sopra il Saggio Filosofico intorno alle probabilità del Sig. March.^{e} La Place* trovasi fatta menzione di un problema di questo matematico insigne, i risultati del quale, per ciò che concerne i limiti a cui s'accostano, hanno una rassomiglianza grandissima coi risultati del problema del Sig. La Grange, così mi sono studiato di derivare da conformi principj la dimostrazione non tanto dall'accennata quanto di alcune altre proprietà, che le risultanze del primo hanno comuni colle risultanze del secondo dei mentovati problemi. È perciò che prima di procedere all' esposizione della prefata dimostrazione mi sono occupato nel seguente paragrafo dell' equazione del problema del Sig. March^e. La Place.

23. Consiste il mentovato problema nelle ipotesi istesse, e nelle stesse ricerche dell'altro del Sig. La Grange colla differenza, che ove in quest'ultimo ogni permutazione dei viglietti viene eseguita levandone contemporaneamente uno da ogn' urna, nell'altro ogni permutazione si compie levando alla sorte dalla prim' urna un viglietto e riponendolo nella seconda, poscia levando da questa alla sorte un viglietto, e riponendolo nella terza, ec. finalmente levando dall' ultim' urna un viglietto, e riponendolo nella prima.

A stabilire pertanto l'equazione di un tale problema essendo a il numero delle urne date suppongo per una generalità maggiore di quella che si riscontra nell' esposizione del Sig. La Place, che le n_1, n_2, n_3, ec. n_a esprimano il complessivo numero dei viglietti in assegnato modo diversamente colorati rispettivamente contenuti nell' urna prima, seconda, ec., a^{esima}; che le $y_{1,0}$, $y_{2,0}$, $y_{3,0}$, ec. $y_{a,0}$ denotino il numero dei viglietti di un dato colore corrispondentemente racchiusi nelle urne predette, che t esprima il numero delle permutazioni da farsi, che finalmente $y_{z,t}$ ove z non sia maggiore di a denoti l' aspettazione del numero dei viglietti del precitato colore probabilmente residuati nell' urna z appena dopo effettuate le volute t permutazioni. Ciò posto io considero:

1.° Che all' eseguirsi della prima, e così di tutte le altre successive permutazioni, potranno idearsi, siccome fu fatto al §. 10, altrettante corone di urne, e così altrettante corrispondenti urne z quanti saranno i sistemi delle urne medesime, che risguardati nel complesso di dette urne figurar si potranno l' uno sostanzialmente diverso dall' altro dipendentemente dai differenti modi di combinazione che all' eseguirsi della prima, e così delle altre successive permutazioni sortir potranno fra i viglietti delle urne suddette. Pertanto ciò posto, e chiamato M_1 il numero delle prefate corone di urne come sopra sostanzialmente diverse, ricavate però, quanto sia alla prima permutazione, unicamente dal dato che l' operazione fosse stata protratta soltanto fino al segno di aver introdotto nell' urna z il viglietto estratto dalla sua antecedente urna $z-1$, il numero M_1 verrà determinato dal numero delle volte che ciascun viglietto originariamente contenuto nelle urne 1^a, 2^a, $3.^a$ ec., $(z-1)^{esima}$ potrà figurarsi passato nelle urne z delle presupposte corone. Ora all' eseguirsi della prima permutazione ogni viglietto dell' urna prima non può entrare nell' urna

z se non se nell' unico modo di venire successivamente e costantemente estratto da tutte le urne 1^a, 2^a, 3^a, ec. $(z-1)^{esima}$; così ogni viglietto dell' urna seconda quantunque in pari guisa estratto costantemente e sempre introdotto dall' una nell' altr' urna seguente in un solo modo al compiersi della prima permutazione entrar possa finalmente nell' urna z, ciò non pertanto il viglietto medesimo potendo venir rimpiazzato nell' urna seconda da un qualunque viglietto dell' urna prima, dovrà considerarsi contenuto in altrettante corrispondenti urne z le volte espresse dal numero n_1 dei viglietti racchiusi in origine nell' urna prima; così ogni viglietto dell' urna terza quantunque similmente in un solo modo colle successive continue estrazioni passando sempre da un' urna all' altra al compiersi della prima permutazione entrar possa nell' urna z, ciò nulla meno essendo possibile che il viglietto medesimo venga rimpiazzato in detta urna terza o da un qualunque viglietto dell' urna prima, o da uno qualunque della seconda che in essa potrà venir rimpiazzato da uno qualunque della prima, potrà l' accennato viglietto considerarsi entrato in altrettante corrispondenti urne z le volte espresse dalla formola $n_1 + n_1 n_2 = n_1 (n_2 + 1)$, che equivale al numero dei modi coi quali può farsi che un qualunque viglietto dell' urna prima entri nella terza, o che ve ne entri uno qualunque della seconda, il quale venga in essa rimpiazzato da un qualunque viglietto della prima; così ogni viglietto dell' urna quarta abbenchè all' eseguirsi della prima permutazione passando continuamente da un' urna all' altra in un solo modo entrar possa nell' urna z, ciò non pertanto essendo possibile che il viglietto medesimo sia rimpiazzato in detta urna quarta o da ciascun viglietto della prima, o da ciascuno della seconda, che sia poi rimpiazzato da ciascuno della prima, o finalmente da ciascuno della terza, che in detta urna terza sia poi rimpiazzato in tutti i possibili modi superiormente accennati da un qualunque viglietto delle due urne antecedenti, il prefato viglietto dell' urna quarta potrà considerarsi entrato in altrettante corrispondenti urne z, e far quindi luogo a tante corone di urne quant' è il numero espresso dalla formula

$$n_1 + n_1 n_2 + n_3(n_1 + n_1 n_2) = n_1(n_2+1)(n_3+1)$$

così ec. ec. ec.

Sarà pertanto

$$M_1 = n_1(n_2+1)(n_3+1)\ldots\ldots(n_{z-1}+1).$$

2.° Che se mediante N_1 venga espresso il numero delle corone di urne come sopra sostanzialmente diverse fra loro, e così il numero delle corrispondenti urne z allora quando l' operazione della permutazione fosse stata ulteriormente protratta fino al segno di aver levato dall' urna z un viglietto, in tal caso rendesi manifesto che essendo $n_z + 1$ il numero dei viglietti contenuti in ogn' una delle M_1 urne z del 1.° precedente, sarà

$$N_1 = (n_z+1)M_1 = n_1(n_2+1)(n_3+1)\ldots\ldots(n_z+1).$$

3.° Che volendosi $z = a$, che è quanto dire che l'operazione della permutazione si fosse compiuta, in tale ipotesi chiamato P_1 il numero corrispondente alla M_1 e chiamato Q_1 il corrispondente alla N_1 dei due numeri antecedenti, sarà

$$P_1 = n_1(n_2+1)(n_3+1)\ldots\ldots(n_{a-1}+1)$$

$$Q_1 = n_1(n_2+1)(n_3+1)\ldots\ldots(n_a+1)$$

e la Q_1 esprimendo il numero totale delle corone di urne sostanzialmente diverse conseguibili al compiersi della prima permutazione, esprimerà in conseguenza al compiersi della permutazione medesima il numero totale degli stati possibili ed ugualmente probabili delle due urne estreme ultima, e prima.

4.° Che perciò in ordine sempre alla prima permutazione chiamato i_1 il numero dei viglietti del dato colore antecedentemente contenuti in tutte le urne 1^a, 2^a, ec. ec., $(z-1)^{esima}$, ed introdotti nelle M_1 urne z del n.° 1.° anteced., sarà

$$i_1 = y_{1.0} + n_1 y_{2,0} + n_1(n_2+1)y_{3,0} + \ldots\ldots$$
$$+ n_1(n_2+1)(n_3+1)\ldots\ldots(n_{z-2}+1)y_{z-1,0}.$$

5.° Che relativamente sempre alla preindicata prima permutazione chiamato S_1 il total numero dei viglietti del dato colore residuati nelle N_1 urne z del preindicato n.° 2.°, siccome dette N_1 urne z ricavansi levando un dopo l'altro dalle M_1 altre urne z del n.° 1.° tutti gli $n_z + 1$ viglietti rispettivamente in esse contenuti, e siccome levandone uno qualunque diverso da quello che col mezzo della permutazione v'era stato introdotto, oltre quest' ultimo resterà sempre in dette urne lo stesso originario numero $y_{z,0}$ di viglietti del dato colore, a meno che il viglietto estratto non fosse appunto di un tal colore per cui detto residuo numero si diminuisse di un'unità, e siccome levando il viglietto stato in dette urne z introdotto vi rimarrebbe sempre il solo originario numero $y_{z,0}$ di viglietti del dato colore, così rendesi manifesto che il valore della supposta S_1 verrà espresso mediante l' equazione

$$S_1 = n_z i_1 + (n_z - y_{z,0}) M_1 y_{z,0} + y_{z,0} M_1 (y_{z,0} - 1)$$

$$+ M_1 y_{z,0} = n_z (M_1 y_{z,0} + i_1)$$

6.° Che volendosi pertanto espressa mediante la $y_{z,1}$ l' aspettazione del numero dei viglietti del dato colore residuati nell' urna z dopo la prima permutazione siccome la

$$y_{z,1} = \frac{S_1}{N_1} = n_z \left(\frac{M_1}{N_1} y_{z,0} + \frac{i_1}{N_1} \right)$$

così sarà

$$y_{z,1} = n_z \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{y_{z,0}}{n_z + 1} + \dfrac{y_{z-1,0}}{(n_z + 1)(n_{z-1} + 1)} + \dfrac{y_{z-2,0}}{(n_z + 1)(n_{z-1} + 1)(n_{z-2} + 1)} + \ldots \\ + \dfrac{y_{2,0}}{(n_z + 1)(n_{z-1} + 1) \ldots (n_2 + 1)} + \dfrac{y_{1,0}}{(n_z + 1)(n_{z-1} + 1) \ldots\ldots (n_2 + 1) n_1} \end{array} \right\}.$$

7.° Che il valore della $y_{z,1}$ espresso che fosse mediante una frazione il numerator della quale pareggiasse il complessivo numero dei viglietti del dato colore esistenti in tutte le Q_1 urne z delle corone di urne supposte al n.° 3.° antecedente, e il denominatore pareggiasse la Q_1 sarebbe ciò non dimeno perfettamente identico al già ottenuto nel n.° preced., lo che sarà facile di comprendere sol che si osservi dovere i prefati numeratore, e denominatore essere entrambi le volte $(n_{z+1}+1)(n_{z+2}+1)\ldots(n_a+1)$ moltiplici del rispettivo numeratore, e denominatore del predetto valore ottenuto al n.° precedente.

8.° Che procedendo alla seconda permutazione, e figurando quindi formate le Q_1 corone di urne di cui al n.° 3.°, e per ciascuna di esse nei modi dei n.^{i} 2.°, 3.° precedenti altre M_1, N_1 corone di urne onde abbiasi $N_2 = N_1 Q_1$, se suppongansi designati mediante le h'_1, h''_1, h'''_1, ec. $h_1^{(Q_1)}$ i rispettivi numeri dei viglietti del dato colore esistenti in una, poi in altra, poi in altra, ec. delle urne prime delle precitate Q_1 corone di urne, se mediante le h'_2, h''_2, h'''_2, ec. $h_2^{(Q_1)}$ suppongansi denotati i rispettivi numeri dei viglietti dello stesso dato colore in pari modo esistenti in tutte le urne seconde delle prefate Q_1 corone, ec., ec., se mediante le h'_z, h''_z, h'''_z, ec. $h_z^{(Q_1)}$ suppongansi designati i rispettivi numeri dei viglietti sempre del dato colore esistenti similmente nelle urne z delle prenominate Q_1 corone di urne, se finalmente suppongasi

$$\Sigma h_1 = h'_1 + h''_1 + h'''_1 + \ldots\ldots + h_1^{(Q_1)}$$

$$\Sigma h_2 = h'_2 + h''_2 + h'''_2 + \ldots\ldots + h_2^{(Q_1)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Sigma h_z = h'_z + h''_z + h'''_z + \ldots\ldots + h_z^{(Q_1)}$$

sarà

$$i_2 = \Sigma h_1 + n_1 \Sigma h_2 + n_1(n_2+1)\Sigma h_3 + \ldots + n_1(n_2+1)\ldots(n_{z-2}+1)\Sigma h_{z-1}$$

$$S_2 = n_z\,(M_1 \Sigma h_z + i_2)$$

$$y_{z,2} = \frac{S_2}{N_2} = \frac{n_z(M_1 \Sigma h_z + i_2)}{Q_1 N_1}.$$

Ora pel n.° 7.° prec. $\frac{\Sigma h_1}{Q_1} = y_{1,1}$, $\frac{\Sigma h_2}{Q_1} = y_{2,1}$, $\frac{\Sigma h_3}{Q_1} = y_{3,1}$; ec. ec. $\frac{\Sigma h_z}{Q_1} = y_{z,1}$. Dunque sostituendo sarà finalmente

$$y_{z,2} = n_z \left\{ \begin{array}{l} \frac{y_{z,1}}{n_z+1} + \frac{y_{z-1,1}}{(n_z+1)(n_{z-1}+1)} + \frac{y_{z-2,1}}{(n_z+1)(n_{z-1}+1)(n_{z-2}+1)} + \ldots \\ + \frac{y_{2,1}}{(n_z+1)(n_{z-1}+1)\ldots(n_2+1)} + \frac{y_{1,1}}{(n_z+1)(n_{z-1}+1)\ldots(n_2+1)n_1} \end{array} \right\}$$

9.° Che replicando sempre successivamente i discorsi medesimi dei due numeri antecedenti sarà facile di provare doversi generalmente avere

$$\text{(XXXI)} \quad y_{z,t} = n_z \left\{ \begin{array}{l} \frac{y_{z,t-1}}{n_z+1} + \frac{y_{z-1,t-1}}{(n_z+1)(n_{z-1}+1)} + \frac{y_{z-2,t-1}}{(n_z+1)(n_{z-1}+1)(n_{z-2}+1)} + \ldots. \\ + \frac{y_{2,t-1}}{(n_z+1)(n_{z-1}+1)\ldots..(n_2+1)} + \frac{y_{1,t-1}}{(n_z+1)(n_{z-1}+1)\ldots..(n_2+1)n_1} \end{array} \right\}$$

equazione dalla quale avendosi per ogni caso che non sia $z - 1 < 2$

$$\frac{y_{z-1,t}}{n_{z-1}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{y_{z-1,t-1}}{n_{z-1}+1} + \frac{y_{z-2,t-1}}{(n_{z-1}+1)(n_{z-2}+1)} + \ldots\ldots. \\ + \frac{y_{2,t-1}}{(n_{z-1}+1)(n_{z-2}+1)\ldots(n_2+1)} + \frac{y_{1,t-1}}{(n_{z-1}+1)(n_{z-2}+1)\ldots.(n_2+1)n_1} \end{array} \right\}$$

mediante la sostituzione si otterrà per ogni caso che non sia $z < 3$

$$\text{(XXXII)} \qquad y_{z,t} = \frac{n_z}{n_z+1}\left(y_{z,t-1} + \frac{1}{n_{z-1}} y_{z-1,t} \right)$$

ricavandosi poi dalla (XXXI) per $z = 2$

$$\text{(XXXIII)} \qquad y_{2,t} = \frac{n_2}{n_2+1}\left(y_{2,t-1} + \frac{1}{n_1} y_{1,t-1} \right).$$

10.° Che poi ad ogni permutazione che si faccia, lo stato dell' urna prima trovasi dipendente dallo stato dell' ultima, e che supposte per ciò in quanto alla prima permutazione le P_1, Q_1 corone di urne delle quali è stata fatta menzione al n.° 3.° preced. tutte le urne prime di ciascuna delle P_1 corone suddette saranno mancanti di un viglietto, e tutte le ultime ne conterranno uno di più, talchè levati poscia da queste l'un dopo l'altro tutti i viglietti, e collocatili corrispondentemente un dopo l'altro nelle rispettive urne prime verranno a formarsi le mentovate Q_1 corone di urne. Denotato pertanto mediante la T_1 il complessivo numero dei viglietti del dato colore esistenti in tutte le urne prime delle precitate Q_1 corone di urne, siccome un tale complesso si compone del numero dei viglietti del prefato colore sempre residuati nelle urne prime delle precitate P_1 corone di urne, le quali mediante l'aggiunta di uno dietro all'altro dei viglietti delle corrispondenti urne ultime servono a formare le urne prime delle su-citate Q_1 corone di urne, e si compone altresì del numero dei viglietti dello stesso dato colore che verranno introdotti nelle mentovate urne prime coll'aggiunta predetta, e siccome è poi chiaro che l'uno degli accennati componenti verrà espresso dalla formola

$$y_{1,0}(n_1-y_{1,0})(n_2+1)(n_3+1)\ldots(n_a+1)+(y_{1,0}-1)y_{1,0}(n_2+1)(n_3+1)\ldots$$
$$\ldots\ldots(n_a+1)=(n_1-1)y_{1,0}(n_2+1)(n_3+1)\ldots\ldots(n_a+1)$$

e che l'altro verrà espresso dalla formula

$$y_{1,0}+n_1y_{2,0}+n_1(n_2+1)y_{3,0}+\ldots+n_1(n_2+1)\ldots(n_{a-1}+1)y_{a,0}$$

così la T_1 equivarrà alla somma dell'una e dell'altra delle prenotate due formule. Ora la $y_{1,t}=\frac{T_1}{Q_1}$, dunque si otterrà

$$_{,1}=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{y_{1,0}}{n_1(n_2+1)\ldots\ldots(n_a+1)}+\dfrac{y_{2.0}}{(n_2+1)(n_3+1)\ldots\ldots(n_a+1)}+\dfrac{y_{3,0}}{(n_3+1)(n_4+1)\ldots\ldots(n_a+1)} \\ \quad+\ldots\ldots+\dfrac{y_{a,0}}{n_a+1}+\dfrac{n_1-1}{n_1}y_{1,0}.\end{array}\right\}$$

11.° Che mediante un ragionamento analogo a quello del preced. n.° 9.° si proverà doversi avere in generale

$$\text{(XXXIV)}\quad y_{1,t}=\left\{\begin{array}{c}\dfrac{y_{1,t-1}}{n_1(n_2+1)\ldots\ldots(n_a+1)}+\dfrac{y_{2,t-1}}{(n_2+1)\ldots\ldots(n_a+1)}\\ +\dfrac{y_{3,t-1}}{(n_3+1)\ldots\ldots(n_a+1)}\\ +\ldots+\dfrac{y_{a,t-1}}{n_a+1}+\dfrac{n_1-1}{n_1}\,y_{1,t-1}\end{array}\right\}$$

equazione il complesso dei termini del secondo membro della quale eccettuato l' ultimo, per l' altra equazione (XXXI) in cui siasi fatta $z=a$ equivalendo ad $\frac{y_{a,t}}{n_a}$ si cangerà finalmente nella seguente

$$\text{(XXXV)}\qquad y_{1,t}=\frac{y_{a,t}}{n_a}+\frac{n_1-1}{n_1}\,y_{1,t-1}.$$

12.° Quando si volesse $n_1=n_2=n_3=\ldots=n_a=n$ lo che si suppone nel problema del Sig. March. La Place citato dal Professore Ruffini, dalle formule (XXXV), (XXXIII), (XXXII) si ricaverebbero rispettivamente le altre

$$\text{(XXXVI)}\left\{\begin{array}{l}y_{1,t}=\frac{n-1}{n}\,y_{1,t-1}+\frac{1}{n}\,y_{a,t}\\ y_{2,t}=\frac{n}{n+1}\,y_{2,t-1}+\frac{1}{n+1}\,y_{1,t-1}\\ \text{e per } z>2\\ y_{z,t}=\frac{n}{n+1}\left(y_{z,t-1}+\frac{1}{n}\,y_{z-1,t}\right)\end{array}\right\}$$

24. Dalle equazioni (XXXII), (XXXIII), (XXXV) ridotta che siasi la prima alla forma

$$y_{z,t}+\frac{1}{n_z}\,y_{z,t}-\frac{1}{n_{z-1}}\,y_{z-1,t}=y_{z,t-1}$$

la seconda alla forma

$$y_{2,t}+\frac{1}{n_2}\,y_{2,t}-\frac{1}{n_1}\,y_{1,t-1}=y_{2,t-1}$$

e l' ultima alla forma

$$y_{1,t} - \frac{1}{n_a} y_{a,t} + \frac{1}{n_1} y_{1,t-1} = y_{1,t-1}$$

sommando i primi assieme e i secondi membri assieme di queste due ultime rispettivamente coi primi e i secondi membri dell'altra, nella quale siasi fatto di mano in mano $z = 3, 4$, ec. fino ad a inclusivamente, si ricava

$$y_{1,t} + y_{2,t} + y_{3,t} + \ldots + y_{a,t} = y_{1,t-1} + y_{2,t-1} + \ldots + y_{a,t-1}$$

lo che viene a denotar chiaramente, che la somma delle aspettazioni dei numeri dei viglietti di un dato colore residuati in tutte le a urne date è sempre la stessa qualunque siasi il numero delle fatte permutazioni, e che perciò la somma stessa pareggia sempre il complessivo numero dei viglietti di quel dato colore racchiusi in origine in tutte le a urne date.

Che se pertanto dopo un finito numero di permutazioni non risultassero tutte uguali fra loro le singole aspettazioni dei numeri dei viglietti di un dato distinto colore residuati in ogn' una delle a urne date, chiamata Σc la complessiva somma dei viglietti colorati del preindicato colore riposti in origine nelle urne medesime, alcune delle prefate aspettazioni sarebbero necessariamente maggiori, altre necessariamente minori di $\frac{\Sigma c}{a}$.

25. Dalle sopra indicate equazioni si ricava altresì, che sempre quando dopo compiuto un finito numero $t-1$ di permutazioni si giungesse ad avere le ragioni tutte delle singole aspettazioni dei numeri dei viglietti di un dato colore residuati in ogn' una delle a urne date rispettivamente uguali alle ragioni tutte che hanno fra loro le n_1, n_2, n_3, ec., ec. n_a, supponendo effettuate in decorso quante altre successive permutazioni pur si volessero, le corrispondenti aspettazioni medesime si manterrebber costantemente fra loro nelle stesse date ragioni. Di fatti quando si volesse che le $y_{1,t-1}$, $y_{2,t-1}$, ec. $y_{a,t-1}$ stasser fra loro nelle stesse corrispondenti ragioni con

cui stanno fra loro le n_1, n_2, n_3, ec. n_a, supposto $y_{1,t-1}=n_1 h$ sarebbe $y_{2,t-1}=n_2 h$, $y_{3,t-1}=n_3 h$ ec. ec. $y_{a,t-1}=n_a h$, e perciò avendosi della (XXXIII)

$$y_{2,t}=\frac{n_2}{n_2+1}\left(y_{2,t-1}+\frac{1}{n_1}y_{1,t-1}\right)$$

sarebbe

$$y_{2,t}=\frac{n_2}{n_2+1}(n_2 h+h)=n_2 h$$

ed avendosi dalla (XXXII)

$$y_{3,t}=\frac{n_3}{n_3+1}\left(y_{3,t-1}+\frac{1}{n_2}y_{2,t-1}\right)$$

$$y_{4,t}=\frac{n_4}{n_4+1}\left(y_{4,t-1}+\frac{1}{n_3}y_{3,t-1}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{a,t}=\frac{n_a}{n_a+1}\left(y_{a,t-1}+\frac{1}{n_{a-1}}y_{a-1,t-1}\right)$$

sarebbe

$$y_{3,t}=\frac{n_3}{n_3+1}(n_3 h+h)=n_3 h$$

$$y_{4,t}=\frac{n_4}{n_4+1}(n_4 h+h)=n_4 h$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{a,t}=\frac{n_a}{n_a+1}(n_a h+h)=n_a h.$$

26. Procedendo a dimostrare le proprietà delle quali feci parola al (§. 22.), suppongo in entrambi i problemi delle urne considerati in tutta la loro generalità, che una distinta urna fra le a date si consideri siccome la prima dalla quale abbiano origine tutte le permutazioni. È chiaro ciò posto, che stante il modo di permutazione che vuolsi eseguito nel problema del Sig. Marchese La Place ben diverso dall' altro che si vuol praticato nel problema del Sig. La Gran-

ge sarà in questo sì, e nell' altro nò indifferente il prendere nell' indicata qualità di prima una qualunque delle a urne date. Suppongo poscia, sempre in entrambi i problemi, che mediante la n_1 venga denotato il total numero dei viglietti contenuti nell' urna prima, che mediante la n_2 venga denotato il total numero di quelli contenuti nell' urna seconda, ch' io riterrò quella in cui al compiersi d' ogni permutazione verrà collocato il viglietto estratto dall' urna prima, che mediante la n_3 venga similmente denotato il total numero dei viglietti contenuti nell' urna terza, ec. fino a che mediante la n_a venga denotato il total numero dei viglietti contenuti nell' ultim' urna a^{esima}. Suppongo che designata generalmente in entrambi i problemi mediante la $y_{z,t}$ l' aspettazione del numero dei viglietti di un dato colore residuati nell' urna z dopo un numero t di permutazioni, si faccia

$$\frac{y_{z,t}}{n_z} = p + d_t^{(z)} = q - f_t^{(z)}$$

onde abbiasi generalmente

$$y_{z,t} = n_z\,(p + d_t^{(z)}) = n_z\,(q - f_t^{(z)}).$$

Suppongo da ultimo denotata mediante Σn la somma delle n_1, n_2, n_3 ec. n_a, e mediante Σy_t la somma di tutte le $y_{1,t}$, $y_{2,t}$ ec. $y_{a.t}$.

27. Stante le ipotesi fatte nel precedente, e le cose dette nei §§. 15. 24. dovendo la Σy_t mantenersi costantemente la stessa qualunque sia il numero t delle permutazioni, e quindi aversi $\Sigma y_t = \Sigma y_0$, sarà facile di vedere che se dopo un definito numero t di permutazioni accada in entrambi i problemi che le ragioni tutte fra loro delle $y_{1,t}$, $y_{2,t}$, $y_{3,t}$ ec. $y_{a,t}$ pareggino le corrispondenti ragioni delle n_1, n_2, n_3, ec. n_a

fra loro, siccome ciò essendo avrebbesi

$$p+d'_t=p+d''_t=p+d'''_t=\ldots=p+d_t^{(a)}$$

e quindi

$$\Sigma y_t=\Sigma n(p+d'_t)=\Sigma n(p+d''_t)=\ldots=\Sigma n(p+d_t^{(a)})=\Sigma y_0$$

così sarà in detto caso

$$p+d'_t=p+d''_t=p+d'''_t=\ldots=p+d_t^{(a)}=\frac{\Sigma y_0}{\Sigma n}$$

e siccome ciò essendo avrebbesi ugualmente

$$q-f'_t=q-f''_t=q-f'''_t=\ldots=q-f_t^{(a)}$$

$$\Sigma y_t=\Sigma n(q-f'_t)=\Sigma n(q-f''_t)=\ldots=\Sigma n(q-f_t^{(a)})=\Sigma y_0$$

così in detto caso sarà pure

$$q-f'_t=q-f''_t=q-f'''_t=\ldots=q-f_t^{(a)}=\frac{\Sigma y_0}{\Sigma n}\,.$$

Che se dopo l' accennata permutazion t^{esima} non si trovassero corrispondentemente uguali fra loro le mentovate ragioni in allora fra le $p+d'_t$, $p+d''_t$, ec. $p+d_t^{(a)}$ e così fra le $q-f'_t$, $q-f''_t$, ec. $q-f_t^{(a)}$ alcune sarebbero necessariamente maggiori, ed alcune altre necessariamente minori di $\frac{\Sigma y_0}{\Sigma n}$ vale a dire di una frazione di cui il numeratore fosse il total numero dei viglietti di un dato colore contenuti in tutte le urne, e il denominatore fosse il total numero dei viglietti di qualunque colore contenuti in tutte le urne medesime. Di fatti per darne una prova, la quale quando sia convenientemente applicata a tutte le ipotesi servir può a render palese la verità dell'asserto, vogliansi tutte minori di $\frac{\Sigma y_0}{\Sigma n}$ le $p+d'_t$, $p+d''_t$, ec. $p+d_t^{(a)}$; in tale circostanza sarebbe $n_1(p+d'_t)+n_2(p+d''_t)+\ldots$

$\ldots + n_a(p+d_t^{(a)}) < (n_1 + n_2 + \ldots + n_a) \frac{\Sigma y_0}{\Sigma n}$ e quindi $\Sigma y_t < \Sigma y_0$ contro ciò che fu dimostrato al § 24. Nel caso adunque testè supposto se colla p venga designata precisamente la minima, e se colla q venga precisamente designata la massima fra tutte le frazioni

$$\frac{y_{1,t}}{n_1}, \frac{y_{2,t}}{n_2}, \frac{y_{3,t}}{n_3}, \ldots\ldots, \frac{y_{a,t}}{n_a}$$

sarà la p sempre minore, e la q sempre maggiore di $\frac{\Sigma y_0}{\Sigma n}$, e ciascuna delle d'_t, d''_t, d'''_t, ec. $d_t^{(a)}$, f'_t, f''_t, ec. $f_t^{(a)}$ mai minore dello zero.

Siccome poi nel problema delle urne del Sig. La Grange preso altresì in tutta la generalità del § 13. può considerarsi, senza che ne derivi sostanzial differenza nei risultati, una qualunque delle urne date siccome quella prima in circolo dalla quale si figuri prendere origine ogni permutazione, così supposta nel decorso essere questa tale l' urna cui dopo la permutazion t^{esima} corrisponde il minimo valore fra le frazioni aventi per numeratore le correlative diverse aspettazioni dei numeri dei viglietti del dato colore residuati in ogni singola urna, e per denominatore i rispettivi totali numeri dei viglietti originariamente contenuti in ogni singola urna suddetta, potrà sempre nel mentovato problema considerarsi la $d'_t = 0$.

28. Espressi pertanto nel problema del §. 13. mediante i termini dell' una, o dell' altra dalle seguenti due serie

$$n_1 p,\ n_2(p+d''_t),\ n_3(p+d'''_t), \ldots, n_a(p+d_t^{(a)})$$

(XXXVI)

$$n_1(q-f'_t),\ n_2(q-f''_t),\ n_3(q-f'''_t), \ldots, n_a(q-f_t^{(a)})$$

i corrispendenti valori delle $y_{1,t}$, $y_{2,t}$, $y_{3,t}$, ... $y_{a,t}$ e ricavati per mezzo della formula (XXI), convenientemente applicata, gli altri delle $y_{1,t+1}$, $y_{2,t+1}$, ec. $y_{a,t+1}$, sarà

$$(\mathrm{XXXVII})\left\{\begin{array}{l}
y_{1,t+1}=\frac{n_1-1}{n_1}\,y_{1,t}+\frac{1}{n_a}\,y_{a,t} \\
\quad =n_1p+d_t^{(a)}=n_1q-(n-1)f'_t-f_t^{(a)} \\
y_{2,t+1}=\frac{n_2-1}{n_2}\,y_{2,t}+\frac{1}{n_1}\,y_{1,t} \\
\quad =n_2p+(n_2-1)d''_t=n_2q-(n_2-1)f''_t-f'_t \\
y_{3,t+1}=\frac{n_3-1}{n_3}\,y_{3,t}+\frac{1}{n_2}\,y_{2,t} \\
\quad =n_3p+(n_3-1)d'''_t+d''_t=n_3q-(n_3-1)f'''_t-f''_t \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_{a,t+1}=\frac{n_a-1}{n_a}\,y_{a,t}+\frac{1}{n_{a-1}}\,y_{a-1,t} \\
\quad =n_ap+(n_a-1)d_t^{(a)}+d_t^{(a-1)}=n_aq-(n_a-1)f_t^{(a)}-f_t^{(a-1)}.
\end{array}\right.$$

Dalle prefate equazioni si scorge subito che il minimo valore delle $\frac{y_{1,t+1}}{n_1}$, $\frac{y_{2,t+1}}{n_2}$, ec. $\frac{y_{a,t+1}}{n_a}$ mai sarà minore del minimo valore p attribuito alle $\frac{y_{1,t}}{n_1}$, $\frac{y_{2,t}}{n_2}$, ec. $\frac{y_{a,t}}{n_a}$, e che il massimo valore delle prime mai sarà maggiore del massimo valore q attribuito alle seconde.

Fatto poi riflesso che sempre quando tutte le n_1, n_2, ec. n_a fossero maggiori dell' unità, se due, o più delle consecutive quantità portate dalle su-notate due serie (XXXVI) non fossero rispettivamente uguali alle p, q mai potrebbero dopo la successiva permutazion $(t+1)^{esima}$ uguagliarsi corrispondentemente alle p, q una, o più delle $\frac{y_{1,t+1}}{n_1}$, $\frac{y_{2,t+1}}{n_2}$, ec.

$\frac{y_{a,t+1}}{n_a}$, fatto riflesso che qual' ora due, o più di dette successive quantità s'uguagliassero alla p, oppure alla q, il loro numero sarebbe sempre minore del numero finito a delle urne date, e fatto finalmente riflesso che all' eseguirsi di ciascuna successiva permutazione il detto numero di quantità successive uguali alla p, oppure alla q diminuirebbe di mano in mano sempre di un' unità, rendesi manifesto che eseguite tutt'al più un numero g non $> a - 1$ di permutazioni oltre la data t^{esima} si perverrà ad ottenere le corrispondenti

$$\frac{y_{1,t+g}}{n_1},\ \frac{y_{2,t+g}}{n_2},\ \text{ec.}\ \frac{y_{a,t+g}}{n_a}$$

la massima, e la minima delle quali differiranno tra loro per una differenza minore di quella che si riscontrava fra la massima q, e la minima p delle $\frac{y_{1,t}}{n_1}$, $\frac{y_{2,t}}{n_2}$, ec. $\frac{y_{a,t}}{n_a}$, talchè e la minima delle prime aumentandosi al di sopra del valore della minima delle seconde, e la massima di quelle diminuendosi al di sotto del valore della massima di queste, tanto la minima quanto la massima fra le prime si accosterà a $\frac{\Sigma y_0}{\Sigma n}$ più di quello che vi si accostasse la massima, e la minima delle seconde.

Considerando poi dal modo con cui dai valori supposti nella (XXXVI) ricavansi gli altri notati nella (XXXVII) che dopo eseguite oltre le t date altre $g = a - 1$ permutazioni, le corrispondenti $\frac{y_{1,t+g}}{n_1}$, $\frac{y_{2,t+g}}{n_2}$, ec. $\frac{y_{a,t+g}}{n_a}$ tutte sarebbero uguali alla p aumentata di una quantità che in ciascheduna conterrebbe tutte le d''_t, d'''_t, ec. $d^{(a)}_t$ moltiplicate ogn' una per una o più frazioni, i numeratori delle quali per essere le n_1, n_2, ec. n_a tutte maggiori dell' unità, non potrebbero essere di essa minori, e i denominatori delle quali sarebbero un prodotto formato di $a-1$ fattori uguali o disuguali presi fra le quantità n_1, n_2, ec. n_a, si arriverà a comprendere che se dopo compiute le prefate g permutazioni la minima, o la massima delle precitate $\frac{y_{1,t+g}}{n_1}$, $\frac{y_{2\,t+g}}{n_2}$, ec. $\frac{y_{a.t+g}}{n_a}$ si volesse rispettivamente maggiore di p, o minore di q per una differenza minore di qualsivoglia quantità assegnata, anche le d''_t, d'''_t, ec. $d^{(a)}_t$ avrebbero dovuto corrispondentemente supporsi minori di qualsivoglia altra quantità assegnata, per modo tale che minore di questa avesse tanto più dovuto supporsi la differenza di ogn' una delle $\frac{y_{1,t}}{n_1}$, $\frac{y_{2,t}}{n_2}$, ec. in paragone di $\frac{\Sigma y_n}{\Sigma n}$.

Considerando poscia che dopo eseguita la su-riferita $(t+g)^{esima}$ permutazione possono rinnovarsi supposizioni affatto simili alle precedenti, e può in conseguenza replicarsi il medesimo antecedente discorso, e così di seguito indefinitamente, considerando da ultimo essere cosa certissima che se da una quantità finita si levi altra quantità finita di essa non maggiore, poi dal residuo si levi altra quantità di esso non maggiore, e si proceda in ciò fare un indefinito numero di volte, l'una o l'altra delle seguenti due cose dovrà accadere, o che le quantità che di mano in mano si andranno così levando trovinsi per sì fatta guisa vincolate a una legge, che le abbia a rendere piccole in modo di poter quindi divenire minori di qualsivoglia quantità data, o che finalmente si potrà giungere ad un residuo, il quale sarà lui medesimo minore di qualsivoglia quantità data, non resterà campo a dubitare, che nella fatta ipotesi delle n_1, n_2, ec. n_a tutte maggiori dell' unità, dando alla t dei valori sempre maggiori, qualunque fosse dei due precedenti il supposto, che di preferenza volesse adottarsi, si perverrebbe finalmente a conseguire per le $\frac{y_{1,t}}{n_1}$,

$\frac{y_{2,t}}{n_2}$, ec. $\frac{y_{a,t}}{n_a}$ tali valori che il massimo e il minimo di essi nell' ultima ottenuta serie differirebber fra loro di una quantità minore di ogni qualunque data quantità, per cui di una quantità tanto più minore di questa differirebbe ogni singolo dei precitati valori in paragone di $\frac{\Sigma y_0}{\Sigma n}$.(11)

29. Provato ora che dando alla t dei valori sempre maggiori o si arriverà ad avere le corrispondenti $\frac{y_{1,t}}{n_1}$, $\frac{y_{2,t}}{n_2}$, ec. $\frac{y_{a,t}}{n_a}$ uguali tutte a $\frac{\Sigma y_0}{\Sigma n}$, o a differirne tutte di una quantità minore di qualsivoglia assegnata, vogliansi conoscere i casi e le circostanze nelle quali ottengasi il primo, e le circostanze e i casi nei quali in diffetto abbia però a conseguirsi il secondo dei risultati predetti. A un tanto scopo suppongasi che non prima, e perciò al solo compiersi della permutazion $(t+1)^{esima}$ ottengasi l' uguaglianza di tutte fra loro, e di ciascuna alla $\frac{\Sigma y_0}{\Sigma n}$ delle $\frac{y_{1,t+1}}{n_1}$, $\frac{y_{2,t+1}}{n_2}$, ec. $\frac{y_{a,t+1}}{n_a}$.

In tal caso dalle equazioni (XXXVII) si avrà

$$p+\frac{d_t^{(a)}}{n_1}=p+\frac{n_2-1}{n_2}d't=p+\frac{n_3-1}{n_3}d'''t+\frac{d''t}{n_3}=\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots=p+\frac{n_a-1}{n_a}d_t^{(a)}+\frac{d_t^{(a-1)}}{n_a}$$

---

(11) Porto ferma opinione che la proprietà accennata in questo §. abbia altresì ad avverarsi quando le n_1, n_2, ec. n_a non fossero tutte maggiori dell' unità, purchè non tutte uguali alla medesima, e tutte maggiori dello zero. Quando poi ognuna delle prefate n_1, n_2, ec. n_a fosse uguale all'unità, siccome stante il modo, di permutazione voluto dal problema, al compiersi di ciascuna di esse l' unico viglietto contenuto in egn'urna non farebbe che passare dall'una all'altra seguente, così evidentemente si scorge che lo stato di tutte le urne congiuntamente prese dopo un dato periodo tornerebbe a riprodursi indefinitamente.

e per ciò

(XXXVIII) $$\frac{d_t^{(a)}}{n_1} = \frac{n_2 - 1}{n_2} d''_t = \frac{n_3 - 1}{n_3} d''_t + \frac{d''_t}{n_3} = \ldots$$

$$\ldots\ldots = \frac{n_a - 1}{n_a} d_t^{(a)} + \frac{d_t^{(a-1)}}{n_a}$$

e quindi

$$\frac{d_t^{(a)}}{n_1} = \frac{n_a - 1}{n_a} d_t^{(a)} + \frac{d_t^{(a-1)}}{n_a}$$

ossia

(XXXIX) $$(n_a + n_1)\, d_t^{(a)} = n_1 n_a d_t^{(a)} + n_1 d_t^{(a-1)}.$$

Potendosi ora considerare, siccome è stato superiormente avvertito, una qualunque delle a urne date siccome la prima dalla quale prendano origine le permutazioni, e non essendo d'altronde le equazioni (XXXVII) vincolate ad altra condizione se non se a quella che derivando elleno dalle equazioni (XXXVI) all'urna prima corrisponda il valore $\frac{y_{1,t}}{n_1} = p$, ne viene che quando contro l'ipotesi fatta non si volessero tutte uguali alla p le $\frac{y_{2,t}}{n_2}$, $\frac{y_{3,t}}{n_3}$, ec. $\frac{y_{a,t}}{n_a}$, potrà sempre supporsi che siasi col fatto considerata siccome la prima un'urna tale fra le a date alla quale corrispondendo il valore $\frac{y_{1,t}}{n_1} = p$ l'altro valore $\frac{y_{a.t}}{n_a}$ che quindi si riferirebbe all'a^{esima} in ordine addivenga maggiore di p, e che perciò sia $d_t^{(a)} > 0$. Lo che stante la verificazione della equazione (XXXIX), ch'io chiamerò di condizione, dovrà unicamente ripetersi dai possibili particolari valori necessariamente interi delle n_1, n_a, e dai valori della $d_t^{(a)}$ sempre maggiori dello zero, e della $d_t^{(a-1)}$ non mai minori di esso.

Suppongasi dapprima $n_1=1$ onde qualunque sia il valore intero di n_a la (XXXIX) si cangi nella seguente $d_t^{(a)}=d_t^{(a-1)}$. In tal caso dalle equazioni (XXXVIII) incominciando dall' ultima e venendo di mano in mano fino alla seconda mediante le convenienti sostituzioni avrebbesi, contro la fatta ipotesi,

$$d_t^{(a-1)}=d_t^{(a-2)}=\dots\dots=d'_t=d_t^{(a)}=0.$$

Facciasi pertanto $n_1>1$; in tal caso siccome per le avvertite cose a verificare l' equazione (XXXIX) non potrebbe servire un qualunque valore di $n_a>2$, suppongasi da prima $n_a=1$. Ciò posto dalla (XXXIX) medesima si avrebbe

$$d_t^{(a)}=n_1\,d_t^{(a-1)}$$

talchè essendo per le equazioni (XXXVIII)

$$\frac{d_t^{(a)}}{n_1}=\frac{n_{a-1}-1}{n_{a-1}}\,d_t^{(a-1)}+\frac{d_t^{(a-2)}}{n_{a-1}}$$

mediante la sostituzione sarebbe

$$d_t^{(a-1)}=d_t^{(a-1)}-\frac{d_t^{(a-1)}}{n_{a-1}}+\frac{d_t^{(a-2)}}{n_{a-1}}$$

e quindi

$$d_t^{(a-1)}=d_t^{(a-2)}=\frac{d_t^{(a)}}{n_1}$$

ed essendo pure per le stesse equazioni (XXXVIII)

$$\frac{d_t^{(a)}}{n_1}=d_t^{(a-2)}=\frac{n_{a-2}-1}{n_{a-2}}\,d_t^{(a-2)}+\frac{d_t^{(a-3)}}{n_{a-2}}$$

sarebbe

$$d_t^{(a-2)}=d_t^{(a-2)}-\frac{d_t^{(a-2)}}{n_{a-2}}+\frac{d_t^{(a-3)}}{n_{a-2}}$$

e quindi

$$d_t^{(a-2)}=d_t^{(a-3)}=d_t^{(a-1)}=\frac{d_t^{(a)}}{n_1}$$

ec. ec. fino ad avere $d_t^{(a-1)}=d_t^{(a-2)}=d_t^{(a-3)}=\ldots\ldots=d'_t=0$ e perciò anche $d_t^{(a)}=n_1 d_t^{(a-1)}=0$, e tutte per conseguenza contro la fatta ipotesi uguali fra loro le $\frac{y_{1,t}}{n_1}$, $\frac{y_{2,t}}{n_2}$, ec. $\frac{y_{a,t}}{n_a}$. Fatto adunque $n_a=2$, e premesso che in questo caso a verificare l'equazione (XXXIX) non può servire altro valore di $n_1>1$ se non il valore $n_1=2$, si ottiene, ciò ponendo nella stessa equazione, $d_t^{(a-1)}=0$; e quindi $\frac{y_{a-1,t}}{n_{a-1}}=p$. Ora se anche la $d_t^{(a-2)}$, che non può essere per le fatte ipotesi minore di zero, si volesse uguale allo zero, dalle equazioni (XXXVIII) si ricaverebbero tutte uguali allo stesso zero le altre $d_t^{(a-3)}$, $d_t^{(a-4)}$, ec. d''_t, $d_t^{(a)}$, e quindi, contro la supposizione, uguali tutte fra loro le $\frac{y_{1,t}}{n_1}$, $\frac{y_{2,t}}{n_2}$, ec. $\frac{y_{a,t}}{n_a}$, lo che succederebbe eziandio quando fossero uguali allo zero due qualunque consecutive $d_t^{(a-\mu)}$, $d_t^{(a-\mu-1)}$ che si riferissero a due qualunque consecutive delle urne date. Avendosi poi $d_t^{(a-1)}=0$, e dalle equazioni (XXXVIII)

$$\frac{n_{a-2}-1}{n_{a-2}}\,d_t^{(a-2)}+\frac{d_t^{(a-3)}}{n_{a-2}}=\left(\frac{n_{a-1}-1}{n_{a-1}}\right)d_t^{(a-1)}+\frac{d_t^{(a-2)}}{n_{a-1}}=\frac{d_t^{(a-2)}}{n_{a-1}}$$

d'onde si ricava

$$\left(n_{a-1}+n_{a-2}\right)d_t^{(a-2)}=n_{a-1}.n_{a-2}.d_t^{(a-2)}+n_{a-1}.d_t^{(a-3)}$$

equazione affatto simile alla (XXXIX), si proverà in modo analogo al precedente non potersi verificare le ipotesi fatte quando non fosse $n_{a-1} = n_{a-2} = 2$, e nel tempo medesimo $d_t^{(a-3)} = 0$, $d_t^{(a-4)} > 0$. Essendo poi $d_t^{(a-3)} = 0$, e per la (XXXVIII)

$$\frac{n_{a-4}-1}{n_{a-4}}\, d_t^{(a-4)} + \frac{d_t^{(a-5)}}{n_{a-4}} = \frac{n_{a-3}-1}{n_{a-3}}\, d_t^{(a-3)} + \frac{d_t^{(a-4)}}{n_{a-3}} = \frac{d_t^{(a-4)}}{n_{a-3}}.$$

per cui sarebbe

$$\left(n_{a-3}+n_{n-4}\right) d_t^{(a-4)} = n_{a-3}.n_{a-4}.d_t^{(a-4)} + n._{a-3}.d_t^{(a-5)}$$

equazione affatto simile alla (XXXIX), si proverà sempre in modo uguale al precedente che non potrebbero verificarsi le fatte ipotesi a meno che non fosse $n_{a-3}=n_{a-4}=2$, $d_t^{(a-5)}=0$ $d_t^{(a-6)}>0$. Essendo ec. talchè si giungerà a provare essere condizioni necessarie onde possa verificarsi la fatta ipotesi che tutte le n_1, n_2, n_3, ec. n_a siano uguali a due, che il numero a delle urne date sia pari, che tutte le $d_t^{(a-1)}$, $d_t^{(a-3)}$ ec. d'''_t d'_t siano uguali allo zero, e che tutte le altre $d_t^{(a)}$, $d_t^{(a-2)}$, ec. d'_t siano maggiori dello zero, ed uguali fra loro in conseguenza delle altre precedenti condizioni, e delle equazioni (XXXVIII).

Per conoscere adesso se ed in caso quale sia il valore della t, che è quanto dire se, ed in caso quanto sia il numero delle permutazioni, le quali avranno ad eseguirsi per giungere al conseguimento delle condizioni accennate, onde al compiersi della successiva permutazione $(t+1)^{esima}$ possa ottenersi la voluta eguaglianza delle

$$\frac{y_{1,t+1}}{n_1}, \quad \frac{y_{2,t+1}}{n_2}, \text{ ec. } \frac{y_{a,t+1}}{n_a}$$

tutte l' una all' altra fra loro, si supponga d' aver compiuta la $(t-1)^{esima}$ permutazione, e d' aver quindi ottenuto

$$\frac{y_{1,t-1}}{n_1} = \pi + d'_{t-1}, \quad \frac{y_{2,t-1}}{n_2} = \pi + d''_{t-1}, \text{ ec.}$$

$$\text{ec. } \frac{y_{a,t-1}}{n_a} = \pi + d^{(a)}_{t-1}$$

ove la π si prende nel senso medesimo della p del §. 27. ed ove nella formula $\pi + d'_{t-1}$ posta ad esprimere il valore della $\frac{y_{1,t-1}}{n_1}$ si è collocata la d'_{t-1} che quì non può ritenersi uguale allo zero stante che pel discorso che son per fare l' urna prima in questa permutazione deve esser la stessa cui all'eseguirsi della successiva permutazione t^{esima} corrisponderà la $\frac{y_{1,t}}{n_1} = p$. Ciò posto, ed applicata convenintemente la formula (XXI) ritenuto sempre che nella fatta ipotesi esser deve $n_1 = n_2 = n_3 = \ldots = n_a = 2$, ed a numero pari si ricaverà

$$\frac{y_{1,t}}{n_1} = \frac{y_{1,t}}{2} = p = \pi + \frac{d'_{t-1} + d^{(a)}_{t-1}}{2}$$

$$\frac{y_{2,t}}{n_2} = \frac{y_{2,t}}{2} = p + d'_t = \pi + \frac{d''_{t-1} + d'_{t-1}}{2}$$

$$\frac{y_{3,t}}{n_3} = \frac{y_{3,t}}{2} = p = \pi + \frac{d'''_{t-1} + d''_{t-1}}{2}$$

. . . .

. . . .

$$\frac{y_{a-1,t}}{n_{a-1}} = \frac{y_{a-1,t}}{2} = p = \pi + \frac{d^{(a-1)}_{t-1} + d^{(a-2)}_{t-1}}{2}$$

$$\frac{y_{a,t}}{n_a} = \frac{y_{a,t}}{2} = p + d'_t = \pi + \frac{d^{(a)}_{t-1} + d^{(a-1)}_{t-1}}{2}$$

equazioni dal confronto delle quali segnatamente dell' ultima colla penultima, di questa coll' antepenultima, ec. si ricaverà

$$d^{(a)}_{t-1}-d^{(a-2)}_{t-1}=d^{(a-3)}_{t-1}-d^{(a-1)}_{t-1}=d^{(a-2)}_{t-1}-d^{(a-4)}_{t-1}=d^{(a-5)}_{t-1}-d^{(a-3)}_{t-1}=\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots=d''_{t-1}-d^{(a)}_{t-1}.$$

Sommando ora delle predette quantità uguali la prima colla terza, colla quinta ec. fino all'ultima inclusivamente ottenendosi il risultato $d^{(a)}_{t-1}-d^{(a)}_{t-1}=0$, il quale in causa delle notate equazioni, e per essere a numero pari, per es. $2r$, esser deve r volte molteplice di ciascuna separatamente presa delle quantità anzidette $d^{(a)}_{t-1}-d^{(a-2)}_{t-1}$, $d^{(a-3)}_{t-1}-d^{(a-1)}_{t-1}$, ec. ec. e deve altresì pareggiare $2rd''_{t}$ ne viene che sarà $d''_{t}=0$, e perciò contro l'ipotesi fatta sin da principio $\frac{y_{1,t}}{n_1}=\frac{y_{2,t}}{n_2}=\ldots$ $\ldots=\frac{y_{a,t}}{n_a}$. Dunque la stessa fatta ipotesi non potrà in veruna guisa verificarsi allora quando avanti la $(t+1)^{esima}$ abbia di necessità avuto luogo la sua antecedente permutazione t^{esima}. Sarà pertanto $t=0$, e perchè la voluta uguaglianza possa verificarsi al compiersi della prima permutazione dovendo le n_1, n_2, n_3, ec. n_a essere tutte uguali a due, e non potendo spezzarsi secondo il supposto verun viglietto in più parti tinte di differenti colori, lo stato originario delle urne date sarà tal quale fu indicato al § 21, e non altrimenti (12).

---

(12) A maggior conferma di quanto asserj sul fine del §. 21, e per far vie meglio comprendere come in conseguenza delle supposizioni ivi fatte l'equazione (XXIV) risultar debba identica all' equazione (V), aggiungerò il riflesso, che il numero (ch' io denoterò mediante la $Y_{z,u}$) dei prodotti di z dimensioni componenti il complesso designato dalla formula

$$(a\,,\,b\,,\,c\,,\,\text{ec. }p)^{z}$$

30. Se in vece delle a urne contenenti i diversi numeri n_1, n_2, ec. n_a di viglietti in assegnato modo diversamente colorati fosse dato un numero a di vasi rispettivamen-

---

intesa nel senso medesimo della (XXII) del § 13. e nella quale sia denotato mediante la u il numero delle a, b, c, ec. p, verrà determinato dall' equazione

$$Y_{z,u} = \frac{(z+u-1)(z+u-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(z+1)}{1\,.\;\;.\;\;2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(u-1)}\,. \tag{a}$$

Difatti un tale complesso formato essendo di tanti prodotti ciascun de' quali o conterrà in effetto, o non conterrà il fattore a, e il numero de' primi essendo d'altronde evidentemente espresso dalla $Y_{z-1,u}$, e il numero de' secondi essendo evidentemente espresso dalla $Y_{z,u-1}$, sarà

$$Y_{z,u} = Y_{z-1,u} + Y_{z,u-1}\,.$$

Replicando per questo caso un discorso affatto simile a quello del §. 10. e quindi osservando che se mediante un' equazione del tutto simile all' equazione (a) determinar si potessero entrambe le $Y_{z-1,u}$, $Y_{z,u-1}$ collocando in detta equazione nel caso primo la $z-1$ in luogo della z, e nel caso secondo la $u-1$ in luogo della u, anche la $Y_{z,u}$ pareggiando la somma delle prefate $Y_{z-1,u}$, $Y_{z,u-1}$ determinar si potrebbe mediante l'equazione medesima lasciando le z,u come si trovano. Osservando poscia che essendo $z=1$ la $Y_{1,u}=u$, e che perciò la $Y_{1,u}$ per tutti i valori di u non <2 resta determinata col mezzo di un' equazione simile all' equazione (a), e che essendo $u=2$, la $Y_{z,2}=z+1$, per cui d'essa pure la $Y_{z,2}$ resta determinata mediante un' equazione simile all' equazione (a), dovrà quindi concludersi che essendo determinate mediante equazioni simili all' equazione (a) entrambe le $Y_{1,3}$ $Y_{2,2}$ lo sarà in pari modo la $Y_{2,3}$, che essendolo entrambe le $Y_{1,4}$, $Y_{2,3}$, la sarà in pari modo la $Y_{2,4}$, ec. ec. fino alla $Y_{2,u}$ inclusive. Dovrà egualmente concludersi che essendo determinate mediante equazioni simili all' equazione (a) entrambe le $Y_{2,3}$, $Y_{3,2}$ lo sarà in pari modo la $Y_{3,3}$, che essendolo entrambe le $Y_{2,4}$, $Y_{3,3}$ lo sarà in pari guisa la $Y_{3,4}$, ec. ec. fino alla $Y_{3,u}$ inclusive. Dovrà eziandio concludersi che essendo determinate mediante equazioni simile all'equazione (a) entrambe le $Y_{3,3}$ $Y_{4,2}$ la sarà pure la $Y_{4,3}$, che essendolo entrambe le $Y_{3,4}$ $Y_{4,3}$ lo sarà in pari modo la $Y_{4,4}$ ec. ec. fino alla $Y_{4,u}$ inclusive. Così proseguendo dote riempiuti di un numero n_1, n_2, ec. n_a di misure di un liquido formato dal miscuglio di varj altri di specie diversa in assegnata dose uniti fra loro, dal fin quì detto rendesi in tal caso manifesto che dopo un finito numero di permutazioni tutte eseguite fra le misure degli accennati liquidi nella stessa conformità delle permutazioni fra i viglietti supposte nel problema delle urne del Sig. La Grange, mai sarà concesso di conseguire una pari dose di uno qualunque fra i liquidi di data specie componenti gli originarj miscuglj distribuita in ciascuna misura dei misti che andranno di mano in mano formandosi, a meno che da principio non si trovasse in ciascuna misura dei misti contenuti nei vasi predetti una pari ugual dose del liquido istesso, oppure che il numero a dei vasi dati non fosse pari, che ciascuno non contenesse se non due sole misure dei preaccenati misti, e che le quantità del liquido di data specie contenute nelle due misure dei misti racchiusi nei vasi primo, terzo, quarto, ec. $(a-1)^{esimo}$ fossero tutte uguali fra loro, e parimenti uguali fra loro, quantunque in porzione diversa dalla precedente, fossero le quantità del liquido istesso contenute nelle due misure dei misti racchiusi in ogn'uno dei vasi secondo, quarto, ec. a^{esimo}.

---

vrà concludersi ugualmente di tutti gli altri valori fino a quello della $Y_{z,u}$ inclusive.

La formula (α) servirà ancora a determinare il numero dei modi tutti coi quali moltiplicando fra loro tutte le u quantità a, b, c, ec. p elevate ogn'una a tutte le possibili diverse compatibili potenze non <1. venga sempre a formarsi un prodotto di z dimensioni.

Di fatti chiamato U il complesso di tutti gli anzidetti prodotti, e $Z_{z,u}$ il numero ricercato, siccome evidentemente ottiensi d'altronde

$$U = abc \ldots . p(a, b, c, \ldots p)^{z-u}, \text{ così dovrà aversi}$$

$$Z_{z,u} = Y_{z-u,u}$$

e quindi per l'equazione (α)

$$(\beta) \qquad Z_{z,u} = \frac{(z-1)(z-2)\ldots\ldots.(z-u+1)}{1. \quad 2 \ldots\ldots\ldots\ldots(u-1)}$$

31. Quanto sia al problema del Sig. Marchese la Place preso in tutta la sua generalità suppongo

$$(a)\qquad \frac{y_{1,t-1}}{n_1}=p+d'_{t-1}\,;\quad \frac{y_{2,t-1}}{n_2}=p+d''_{t-1}\,,\ \text{ec.};$$

$$\frac{y_{a,t-1}}{n_a}=p+d^{(a)}_{t-1}$$

$$(b)\qquad \frac{y_{1,t-1}}{n_1}=q-f'_{t-1}\,;\quad \frac{y_{2,t-1}}{n_2}=q-f''_{t-1}\,,\ \text{ec.}$$

$$\frac{y_{a,t-1}}{n_a}=q-f^{(a)}_{t-1}$$

nelle quali destinate essendo le p, q, ad esprimere una la minima e l' altra la massima fra le quantità $\frac{y_{1,t-1}}{n_1}$, $\frac{y_{2,t-1}}{n_2}$, ec. $\frac{y_{a,t-1}}{n_a}$ una almeno fra le d'_{t-1}, d''_{t-1}, ec. $d^{(a)}_{t-1}$, e così ugualmente un' altra almeno fra le f'_{t-1}, f''_{t-1}, ec. $f^{(a)}_{t-1}$ dovrà rinvenirsi uguale allo zero. Ciò posto sostituendo di mano in mano i precitati valori (a) nelle equazioni (XXXIII, XXXII, XXXV) sarà

$$\frac{y_{2,t}}{n_2}=\frac{1}{n_2+1}\left(n_2 p+n_2 d''_{t-1}+p+d'_{t-1}\right)$$

$$=p+\frac{n_2 d''_{t-1}+d'_{.-1}}{n_2+1}=p+d''_{t}$$

$$\frac{y_{3,t}}{n_3}=\frac{1}{n_3+1}\left(n_3 p+n_3 d'''_{t-1}+p+d''_{t}\right)$$

$$=p+\frac{n_3 d'''_{t-1}+d''t}{n_3+1}=p+d'''_{t}$$

$$\frac{y_{4,t}}{n_4}=\frac{1}{n_4+1}\left(n_4 p+n_4 d'^{v}_{t-1}+p+d''_{t}\right)$$

$$=p+\frac{n_4 d'^{v}_{t-1}+d'''t}{n_4+1}=p+d'^{v}_{t}$$

. . . . : . . . .

$$\frac{y_{a,t}}{n_a}=\frac{1}{n_a+1}\left(n_a p+n_a d^{(a)}_{t-1}+p+d^{(a-1)}_{t}\right)$$

$$=p+\frac{n_a d^{(a)}_{t-1}+d^{(a-1)}_{t}}{n_a+1}=p+d^{(a)}_{t}$$

$$\frac{y_{1,t}}{n_1} = \frac{p+d_t^{(a)}+(n_1-1)(p+d'_{t-1})}{n_1} = p + \frac{(n_1-1)d'_{t-1}+d_t^{(a)}}{n_1} = p+d'_t$$

d' onde è facile lo scorgere, che per essere interi e maggiori di zero tutti i numeri n_1, n_2, n_3, ec. n_a, e per essere le d'_{t-1}, d''_{t-1}, ec. $d^{(a)}_{t-1}$ tutte non minori di zero, non potrà aversi $d''_t = 0$ a meno che non fosse $d'_{t-1} = d''_{t-1} = 0$, non potrà aversi $d'''_t = 0$ a meno che non fosse $d'''_{t-1} = d''_t = 0$, e quindi a meno che non fosse $d'''_{t-1} = d''_{t-1} = d'_{t-1} = 0$, ec. ec.; non potrà aversi $d^{(a)}_t = 0$ a meno che non fosse $d^{(a)}_{t-1} = d^{(a-1)}_{t-1} = \ldots$ $\ldots = d'_{t-1} = 0$, e finalmente non potrà aversi $d'_t = 0$ a meno che non fosse $d^{(a)}_t = 0$, e però $d^{(a)}_{t-1} = 0 = d^{(a-1)}_{t-1} = d^{(a-2)}_{t-1} = \ldots = d'_{t-1}$, e perciò uguali fra loro, ed ogn' una uguale a $\frac{\Sigma y_0}{\Sigma n}$ le $\frac{y_{1,t-1}}{n_1}$, $\frac{y_{2,t-1}}{n_2}$, $\frac{y_{3,t-1}}{n_3}$, ec., $\frac{y_{a,t-1}}{n_a}$. Dunque compiuta la $(t+1)^{esima}$ permutazione non potendo in forza dell' antecedente discorso ugnagliarsi allo zero veruna delle corrispondenti d'_{t+1}, d''_{t+1} ec. $d^{(a)}_{t+1}$, a meno che non fosse $d'_t = 0$, e perciò $d'_{t-1} = d''_{t-1} = \ldots$ $\ldots = d^{(a)}_{t-1} = 0$, la minima delle $\frac{y_{1,t+1}}{n_1}$, $\frac{y_{2,t+1}}{n_2}$, ec. $\frac{y_{a,t+1}}{n_a}$ sarà sempre maggiore della p cui s' uguaglia la minima fra le $\frac{y_{1,t-1}}{n_1}$, $\frac{y_{2,t-1}}{n_2}$, ec. $\frac{y_{a,t-1}}{n_a}$ a meno che queste ultime non fossero tutte uguali fra loro, e tutte per conseguenza uguali a $\frac{\Sigma y_0}{\Sigma n}$.

Mediante un ragionamento perfettamente uguale al già fatto, ed applicato ai valori (b), si proverà, che la massima fra le su-citate $\frac{y_{1,t+1}}{n_1}$, $\frac{y_{2,t+1}}{n_2}$, ec. $\frac{y_{a,t+1}}{n_a}$ sarà sempre minore di q, cui s' uguaglia la massima fra le $\frac{y_{1,t-1}}{n_1}$, $\frac{y_{2,t-1}}{n_2}$, ec. $\frac{y_{a,t-1}}{n_a}$ a meno che queste ultime non fossero tutte uguali fra loro, e tutte per conseguenza uguali a $\frac{\Sigma y_0}{\Sigma n}$.

Facendo ora un discorso simile a quello del §. 28. si proverà che non ostante il modo di permutazione adottato nel problema di cui si tratta molto diverso dal modo di permutazione supposto nel problema del Sig. La Grange, ciò non pertanto dopo un indefinito numero t di permutazioni, o le ragioni tutte delle ottenute $y_{1,t}$, $y_{2,t}$, $y_{3,t}$, ec. $y_{a,t}$ fra loro uguaglieranno le ragioni tutte che corrispondentemente conservan fra loro le n_1, n_2, ec. n_a, o vi potranno tutte simultaneamente differire di una quantità minore di qualsivoglia altra data, talchè dopo l'indefinito precitato numero t di permutazioni o si avrà

$$\frac{y_{1,t}}{n_1} = \frac{y_{2,t}}{n_2} = \frac{y_{3,t}}{n_3} = \ldots . = \frac{y_{a,t}}{n_a}$$

o le quantità predette differiranno simultaneamente l'una dall' altra fra loro di una quantità minore di qualsivoglia assegnata.

32. Per conoscere in quali casi, e dopo quante permutazioni possano uguagliarsi fra loro le sovr' accennate $\frac{y_{1,t}}{n_1}$, $\frac{y_{2,t}}{n_2}$, ec. $\frac{y_{a,t}}{n_a}$, e in quali altri casi non possa mai ottenersi se non il riferito notabilissimo accostamento dell'una all'altra fra loro delle quantità medesime, suppongo che l'uguaglianza di esse s' avveri dopo compiuto un numero t di permutazioni, e che perciò sia

$$\frac{y_{1,t}}{n_1} = \frac{y_{2,t}}{n_2} = \frac{y_{3,t}}{n_3} = \ldots\ldots = \frac{y_{a,t}}{n_a}.$$

In tal caso siccome dalla (XXXII) ottiensi

$$y_{3,t} + \frac{y_{3,t}}{n_3} = y_{3,t-1} + \frac{y_{2,t}}{n_2}$$

$$y_{4,t} + \frac{y_{4,t}}{n_4} = y_{4,t-1} + \frac{y_{3,t}}{n_3}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$y_{a,t} + \frac{y_{a,t}}{n_a} = y_{a,t-1} + \frac{y_{a-1,t}}{n_{a-1}}$$

così nella supposta uguaglianza sarà altresì

$$y_{3,t} = y_{3,t-1}\,;\ y_{4,t} = y_{4,t-1}\,,\ \text{ec.}\ y_{a,t} = y_{a,t-1}\,.$$

Siccome poi dalla (XXXV) ottiensi

$$\frac{n_1}{n_1-1}\, y_{1,t} - \frac{n_1}{n_1-1} \cdot \frac{y_{a,t}}{n_a} = y_{1,t-1}$$

equazione la quale per la supposta eguaglianza delle due

$$\frac{y_{a,t}}{n_a}\,,\ \frac{y_{1,t}}{n_1}$$

cangiasi nell' altra

$$\frac{n_1-1}{n_1-1}\, y_{1,t} = y_{1,t-1}$$

così per tutti i casi, che non fosse $n_1 = 1$, sarà di necessità

$$y_{1,t} = y_{1,t-1}\,.$$

Siccome poi d' altra parte si ottiene dalla (XXXIII)

$$y_{2,t} + \frac{y_{2,t}}{n_2} = y_{2,t-1} + \frac{y_{1,t-1}}{n_1}$$

equazione, che per essere nella ipotesi, e nei casi in cui non abbiasi $n_1 = 1$

$$\frac{y_{1,t-1}}{n_1} = \frac{y_{1,t}}{n_1} = \frac{y_{2,t}}{n_2}$$

si cangia dopo una conveniente riduzione nella seguente

$$y_{2,t} = y_{2,t-1}\,,$$

così rendesi finalmente manifesto che per tutti i casi in cui non fosse $n_1 = 1$ dalla supposta uguaglianza delle $\frac{y_{1,t}}{n_1}$, $\frac{y_{2,t}}{n_2}$, $\frac{y_{3,t}}{n_3}$, ec. $\frac{y_{a,t}}{n_a}$ tutte fra loro, e ciascuna per conseguenza a $\frac{\Sigma y_0}{\Sigma n}$, ne deriverebbe l'uguaglianza di tutte fra loro le

$\frac{y_{1,t-1}}{n_1}$, $\frac{y_{2,t-1}}{n_2}$, ec. $\frac{y_{a,t-1}}{n_a}$; ed in pari modo di tutte fra loro le $\frac{y_{1,t-2}}{n_1}$, $\frac{y_{2,t-2}}{n_2}$, ec. $\frac{y_{a,t-2}}{n_a}$, e così del resto fino a tutte fra loro le $\frac{y_{1,0}}{n_1}$, $\frac{y_{2,0}}{n_2}$, $\frac{y_{3,0}}{n_3}$, ec. $\frac{y_{a,0}}{n_a}$, e di ciascuna a $\frac{\Sigma y_0}{\Sigma n}$, che è quanto dire nel supposto caso doversi verificare la divisata uguaglianza fin dallo stato originario delle *a* urne date ossia avanti di compiere veruna permutazione.

Avverandosi l' equazione (XXXV) per tutti i valori di t non minori dell' unità, quando fosse $n_1 = 1$, si avrà per tutti i valori di $t-1$ non minori dell' unità

$$\frac{y_{1,t-1}}{1} = \frac{y_{a\,t-1}}{n_a};\ \frac{y_{1,t}}{1} = \frac{y_{a,t}}{n_a}.$$

Ma nella supposta uguaglianza delle $\frac{y_{1,t}}{n_1}$, $\frac{y_{2,t}}{n_2}$, ec. $\frac{y_{a,t}}{n_a}$ risultando per tutti i valori di a non < 3

$$\frac{y_{a.t}}{n_a} = \frac{y_{a,t-1}}{n_a}$$

si avrà per tutti i valori di $t-1$ non < 1

$$y_{1,t} = y_{1,t-1}$$

e per tutti i detti valori di $t-1$ non < 1 stante l' equazione (XXXIII), e l' anzidetta supposta uguaglianza sarà altresì

$$y_{2,t} = y_{2,t-1}.$$

Nel precitato caso pertanto di $n_1 = 1$, avendosi per $a=2$ ossia in circostanza di due urne sole dalla (XXXV)

$$\frac{y_{1,1}}{1} = \frac{y_{2,1}}{n_2}$$

che è quanto dire verificandosi generalmente dopo compiuta la prima permutazione l' ugnaglianza anzidetta, dovrà conchiudersi generalmente che sempre quando o nello stato originario, o almeno dopo compiuta la prima permutazione non abbiasi

$$\frac{y_{1,1}}{1} = \frac{y_{2,1}}{n_2} = \frac{y_{3,1}}{n_3} = \ldots\ldots\ldots = \frac{y_{a,1}}{n_a}$$

mai potrà ottenersi, qualunque sia il numero t delle permutazioni

$$\frac{y_{1,t}}{1} = \frac{y_{2,t}}{n_2} = \frac{y_{3,t}}{n_3} = \ldots\ldots\ldots = \frac{y_{a,t}}{n_a}.$$

Perchè poi in detto caso di $n_1 = 1$ e di a non < 3 avverar si possano le equazioni sovr'accennate, dovrà aversi, per ciò che è stato poc' anzi dimostrato

$$y_{3,1} = y_{3,0};\ y_{4,1} = y_{4,0};\ \text{ec. ec. } y_{a,1} = y_{a,0}.$$

Ma pel §. 24. $\Sigma y_1 = \Sigma y_0$; dunque per detto caso sarà

$$y_{1,1} + y_{2,1} = y_{1,0} + y_{2,0}$$

e quindi dovendosi avere

$$\frac{y_{1,1}}{1} = \frac{y_{2,1}}{n_2} = \frac{y_{3,1}}{n_3} = \ldots\ldots = \frac{y_{a,1}}{n_a}$$

sarà

$$\frac{(n_2+1)y_{1,1}}{1} = y_{1,0} + y_{2,0}$$

$$\frac{(n_2+1)y_{3,1}}{n_3} = y_{1,0} + y_{2,0}$$

$$\frac{(n_2+1)y_{4,1}}{n_4} = y_{1,0} + y_{2,0}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{(n_2+1)y_{a,1}}{n_a} = y_{1,0} + y_{2,0}$$

e però ancora lo stato originario delle a urne date dipendente dalle equazioni di condizione

$$\frac{(n_2+1)y_{3,0}}{n_3}=y_{1,0}+y_{2,0}$$

$$\frac{(n_2+1)y_{4,0}}{n_4}=y_{1,0}+y_{2,0}$$

. . . .

$$\frac{(n_2+1)y_{a,0}}{n_a}=y_{1,0}+y_{2,0}.$$

33. Non potendo scindersi in più parti un viglietto per tingerne alcune di un colore, e le altre di colore diverso, a soddisfare alle preindicate equazioni di condizione varranno i soli valori delle n_2, n_3, ec. n_a capaci di verificare le equazioni medesime per modo tale che essendo interi tutti i valori delle $y_{1,0}$, $y_{2,0}$; $y_{3,0}$, ec., $y_{a,0}$ non sia $y_{1,0} > 1$; $y_{2,0} > n_2$, $y_{3,0} > n_3$, ec. $y_{a,0} > n_a$. La qual cosa cade in acconcio di osservare nel problema delle urne contenenti certo definito numero di viglietti in assegnato modo diversamente colorati, a differenza di ciò che dovrà osservarsi in altro consimile problema, in cui dati fossero a vasi contenenti un corrispondente numero 1, n_2, n_3, ec., n_a di misure di diversi liquidi perfettamente miscibili, nei quali basterà che l' unica misura del misto contenuta nel primo vase sia formata di una dose qualunque del dato liquido, che le n_2 misure dell' altro misto contenute in origine nel vaso secondo siano composte esse pure di una dose qualunque del liquido stesso, e che ogn' una delle n_3, n_4, ec. n_a misure dei misti contenuti in origine nei vasi terzo, quarto, ec. a^{esimo} sia composta della stessa dose del liquido medesimo espressa dalla somma delle dosi di esso contenute nei due vasi primo e secondo divisa per n_2+1.

34. Darò fine alla presente Memoria rimarcando la differenza grande che passa nel supporre nell' uno, o nell' altro dei due problemi degli antecedenti §§. 13, 23. alcuna del-

te n_1, n_2, ec. n_a uguale allo zero. Nell' uno la risoluzione addiverrebbe oltremodo intralciata, e potrebbe essere il soggetto di altra Memoria, nell' altro stante il modo col quale si compiono tutte le successive permutazioni rendesi manifesto, che il risultato d' ogn' una quando però sia $n_1 > 0$, sarà identico al risultato che sarebbesi ottenuto quando dal posto loro fossero state previamente levate tutte le urne non contenenti verun viglietto. Che dunque in detta ipotesi potrà sempre risolversi il dato problema mediante le formule accennate al §. 23. sol che dal posto loro si suppongan levate tutte le urne non contenenti viglietto veruno, e che d' altrettante unità suppongasi diminuito il numero a delle urne date riferendo ordinatamente le n_1, n_2, ec. che saran quindi maggiori dello zero, ai rispettivi numeri dei viglietti contenuti nelle urne restanti.

ILLUTSRAZIONE

DI UN ANTICO DOCUMENTO

RELATIVO

ALL' ORIGINARIO RAPPORTO TRA LE ACQUE DELL' ARNO

E QUELLE DELLA CHIANA

DEL CONTE VITTORIO FOSSOMBRONI

MEMORIA

Ricevuta il dì 30. *Maggio* 1824.

§. 1. In seguito di un gran numero di ricerche istoriche e di locali inspezioni sulla giacitura e composizione del terreno, potei nelle mie Memorie Idraulico-Istoriche sulla Val di Chiana pubblicate l'anno 1789. esporre una ipotesi sulle antiche condizioni delle acque in quella provincia.

§. 2. Essa presenta un raro fenomeno geografico, cioè una vasta vallata ove son comprese molte popolate terre e Castella e diverse Città, (e due almeno di queste figurarono fra le antiche Etrusche) la quale è obbligata adesso a condurre le acque di tutti i suoi fiumi e scoli per una direzione precisamente opposta a quella che avevano prima.

§. 3. L'ipotesi che io allora proposi non solo dette luogo a sistemare l'andamento delle buonificazioni, le quali senza occasionali vedute offerte da particolari circostanze vennero in seguito assoggettate ad una marcia armonica e regolare, ma inoltre spiegò tutti i fenomeni rammentati nelle antiche istorie, e specialmente venne quindi a rendersi intelligibile un passo del Libro quinto di Strabone, il quale descrivendo il fiume Arno aveva fino a quel momento presentato penose oscurità, ed eccitato ostinate contradizioni fra gl' interpreti.

§. 4. Che mentre l' acqua d' Arno spagliava anticamente nel Piano di Arezzo, ed ivi diramandosi solo in parte scorreva per la goletta di Chiani nella Val di Chiana, l' altra porzione si dirigesse in senso quasi opposto, e con l' andar del tempo corrosa e rotta la naturale Pescaja o Serra esistente nella gola di Monte, tutte le acque di quel fiume venissero richiamate verso Firenze e quindi paralizzando il corso della Chiana dal Nord al Sud, si producessero estesi impadulimenti, comparve in seguito delle mie sopracitate ricerche una ipotesi così fondata che il celebre M.r Prony per cui la più sublime analisi si prestò sovente a porgere in campagna novelli ajuti alla pratica Idrometria, volle dopo aver riscontrato ocularmente il locale, esporne al suo ritorno in Francia tutte le circostanze con una Memoria pubblicata fra quelle della Scuola Politecnica (Dixième Cahier Tome IV.), ed il Sig. Barone di Humbold aggiunse nell' istesso volume una conferma dell' ipotesi medesima, la quale conferma estrasse egli dal Giornale dei suoi celebratissimi viaggi, ove si trova descritta una simile idraulica anomalia appartenente al gran fiume Orénoque.

§. 5. Si trattava per altro sempre di una ipotesi che quantunque appoggiata a fatti luminosi ed a puntuali testimonianze istoriche, attendeva tuttavia per essere al sicuro da ogni dubbiezza un documento che la confermasse direttamente, e riunisse in un sol punto di vista le autorità degli Scrittori che trovansi riportate a pag. 29. e seg. della mia sopracitata Opera, ed altre che ho in seguito ritrovate.

§. 6. Il tempo è amico della verità e nemico dell' errore, perchè la serie dei successivi avvenimenti porta discredito a questo e rende quella sempre più luminosa. Quindi è che solidamente e per lungo tempo non può supplirsi ai fatti con le parole, al talento con l' intrigo, allo zelo con la simulazione, all' amicizia con l' officiosità, alla Religione con l' ipocrisia. In fatti ancora nel caso attuale i molti lavori eseguiti nella Val di Chiana hanno sovente offerto sotto la superficie di quelle campagne dei riscontri onde convalidare l'ipotesi in questione. Ma il documento che forma l' oggetto della presente Memoria, sembrami pienamente sodisfare a tutte le questioni, che possono farsi in proposito di così fatta catastrofe idraulica, di maniera che ho creduto possa esser grato ai coltivatori dell' idrometria acquistarne la notizia. Cangiamenti così complicati e grandiosi nei fiumi è raro che accadano, ed è poi difficile che le circostanze permettano di tracciarne l' andamento durante il volgere oscuro dei secoli trapassati. E quindi gli esempj di simil natura divengono preziosi per chiunque non ignori, che la storia del passato è grande scuola per regola dell' avvenire.

§. 7. La soppressa Abbadia dei Monaci Benedettini in Arezzo possedeva da lunghissimo tempo la Pescaja e Mulino situato all' estremità del canal Maestro della Chiana, ed inoltre non poche terre, che sono in quei contorni appunto, ove le acque dovettero principiare l' inversione del primitivo loro corso. Dopo la soppressione sopraccennata di quella Abbadia ebbe luogo uno spurgo del suo Archivio, in cui si conservavano ancora i documenti degli antichi possessi di essa. Giacquero qualche tempo negletti gli avanzi di fogli polverosi e di veruna apparente importanza. Ma tanto è difficile il classare e condannare senza pericolo alla distruzione i fogli creduti inutili, che appunto fra quelli sopraindicati si ritrovava in pezzi il documento che ho preso ad illustrare.

§. 8. Io debbo l' acquisto di esso interessante documento al mio dottissimo compatriotta ed amico Cav. Angiolo De Giudici, che valutatane l' importanza lo preservò dalle fiamme alle quali sconosciuto era insieme con altri frammenti d' antiche carte condannato. Ne presento quì una copia in piccole dimensioni tanto da renderne intelligibile la descrizione. L' originale si troverà depositato nell' Archivio della Cattedrale Aretina celebre per i Diplomi di Carlo Magno ed altri insigni documenti che vi si conservano. Nella seconda edizione delle mie Memorie sopra la Val di Chiana oltre ad altre aggiunte sarà inserita la Carta in quistione copiata nella sua naturale grandezza e con le designazioni dei luoghi scritte con i caratteri che in essa si vedono, i quali caratteri dai Periti vengono giudicati del secolo XIII.

§. 9. Non avendo sott' occhio le mie Memorie sopra la Val di Chiana, ovvero le Carte eleganti di quella Provincia modernamente con il corredo di sagaci ed istruttive illustrazioni pubblicate dal Signor Ingegnere Manetti addetto all' idraulica amministrazione di Val di Chiana, e che si trovano vendibili al Negozio Molini in Firenze, è necessario avanti di entrare in materia fermarsi sulla quì annessa figura prima (che è una repetizione leggermente toccata di una delle Piante da me pubblicate nel 1789.) e concepire per mezzo di essa una chiara idea dei rapporti, che legano tra loro le acque dell' Arno, del Tevere e della Chiana.

§. 10. Le lettere A, e B indicano le origini dell' Arno e del Tevere in due opposte spalle dell' istesso giogo d'Appennino. L' appartenere all' istesso giogo stabilì forse per antichissima tradizione che questi due fiumi abbiano una sorgente comune, quantunque le acque di essi scaturiscano effettivamente da due punti per molte miglia distanti tra loro. La tradizione poi andava più avanti, e portava che il Tevere e l' Arno scorrendo separatamente per due opposte falde dell' Appennino andassero a ricongiungersi sotto Orvieto.

§. 11. Mentre ai dì nostri la Chiana corre da Chiusi verso Arezzo a scaricarsi nell' Arno, e questo tutto intiero scorre per Firenze e Pisa al mare, non è facile concepire a prima vista come siasi potuta immaginare questa riunione delle acque del Tevere e dell' Arno sotto Orvieto. Ma riportandoci a quell'epoca in cui, come le località dimostrano, e come tutti gli antichi Scrittori attestano, la Chiana correva da Arezzo verso Chiusi, si apre la strada a fissare un' opinione capace di conciliare fra loro anche le asserzioni che sembrano più disparate.

§. 12. In fatti scendeva allora come adesso l'Arno dalla sua origine in A per le gole delle montagne nel piano d'Arezzo, circondato dai monti E, F, C dimostrativamente accennati nella detta figura prima, ed ivi trovava la Chiana la quale con il proprio alveo e con la direzione del suo corso da Arezzo verso Chiusi presentava l'idea di una continuazione dello stesso fiume Arno, che introducendo nell'alveo della Chiana una parte delle sue acque le portasse a riunirsi effettivamente con quelle del Tevere sotto Orvieto, mentre quella parte delle acque d'Arno che non entrava nella Chiana con violenta e brusca voltata si dirigeva verso Firenze congiungendosi sotto Pisa con il Serchio, ed entrando insieme con esso nel mare, come insegna l'antica geografia, e come continuò ad essere fino almeno all'anno 415. dell'Era nostra allorchè Rutilio Numaziano nei suoi viaggi ne fece la descrizione con i seguenti versi.

„ Alpheae veterem contemplor originis urbem
„ Quam cingunt geminis Arnus et Auser aquis.
„ Conum pyramidis coeuntia Flumina ducunt,
„ Intratur modico frons patefacta solo.
„ Sed proprium retinet communi in gurgite nomen
„ Et pontum solus scilicet Arnus adit. „

§. 13. Ho citata l'antica geografia, perchè il diligentissimo Strabone descrive il Fiume Arno precisamente come nel precedente paragrafo viene rappresentato. Ecco le parole della versione dello Xilandro rivista dal Casaubono = Pisae sitae sunt in medio amnium Arni et Auseris, qua illi concurrunt, alter ab Aretio copiosus descendens sed in tres divisus alveos, alter ab Appennino =.

Oggi mentre noi vediamo il Serchio sboccare in mare per una foce distante e ben separata da quella dell'Arno, e vediamo la Chiana dirigersi da Chiusi verso Arezzo ed ivi scaricarsi nell'Arno, fa duopo una lunga combinazione di antiche notizie ed una diligente indagine delle vestigia che restano tuttora nelle relative territoriali adiacenze, onde riconoscere il sistema delle variazioni occorse in questa parte di geografia. La protrazione del littorale di Pisa ed il conseguente allontanamento del mare da quella Città somministrano elementi abbastanza per dar conto della separazione dell' Arno dal Serchio, ma l' incostanza dei rapporti tra l' Arno e la Chiana esige più complicate contemplazioni.

§. 14. Nella mia sopracitata opera sulla Val di Chiana si trovano le più interessanti osservazioni degl' interpreti del greco geografo, i quali senza poter riscontrare in dettaglio la faccia del luogo, dovettero riguardare come equivoca ed assurda l' asserta diramazione dell' Arno presso ad Arezzo. Ma in essa opera si trova ancora una moltitudine di testimonianze estratte da Cronisti antichi e da contratti occorsi dal duodecimo al decimoquinto secolo e relativi ai terreni limitrofi alla diramazione della quale si tratta, e tutte insieme concorrono a sparger luce sopra l' asserto di Strabone.

§. 15. Per l' oggetto che si ha in vista serve adesso rilevare che l' Arno presso ad Arezzo nel suo tronco H, D, E ha sofferto un gran profondamento del proprio alveo, come indicano fra le altre cose i suoi influenti profondamente incassati nella pianura Aretina, e come ne fa fede una lunga testimonianza forense del secolo decimo secondo dalla quale resulta, che l' Arno tra il ponte a Caliano e la Chiossa cioè nel tronco D, E aveva un mulino la cui pescaja era alta quanto un uomo, e la cresta di essa pescaja era al livello delle ripe del fiume, il quale per conseguenza era incassato non più che a braccia tre di profondità. Chi adesso conosce il locale essendo passato per la strada del Travigante, giudicherà facilmente se quel tronco dell' Arno si è considerabilmente abbassato.

§. 16. Percorrendo il tronco in questione del fiume Arno si riscontra ancora facilmente la causa, onde l' abbassamento di esso debbe essere stato prodotto. In fatti passato appena il ponte a Buriano si compie nel fiume quella brusca ed acuta voltata a destra, per cui le sue acque riunite con quelle della Chiana si precipitano dalla pescaja del mulino di Monte nel punto H dirigendosi verso Firenze. Tale pescaja è serrata in una gola di due ripe ben alte che quasi a perpendicolo da ambe le parti gli sovrastano, onde apparisce manifestamente la corrispondenza tra lo sbassamento, comunque operato siasi, in questa gola, e quello che in conseguenza dovette prodursi nel superiore tronco dell' Arno.

§. 17. Si concepisce adunque come le acque di quel fiume poterono anticamente essere elevate ad un livello molto più alto dell' attuale, e pari a quello della pianura Aretina, come quindi potesse asserire Strabone, che venendo da Arezzo l' Arno si diramasse, mentre una parte di esso poteva per la goletta di Chiani che resta tra le lettere C, D entrare in Val di Chiana, e come finalmente questo ramo sinistro venisse richiamato nel destro per la occorsavi depressione disposto a riceverlo, e le acque dell' Arno principiassero tutte insieme a dirigersi verso Firenze nel modo che ai dì nostri si osserva. E se volesse revocarsi in dubbio che la gola di Monte potesse essere stata giammai così alta da far rigurgitare l'Arno nel piano d' Arezzo e nella goletta di Chiani, non mancano nel superiore tronco dell' Arno altri nodi sassosi i quali avanti che restassero corrosi dalle acque o rotti dall' arte umana, erano sicuramente capaci di tenere in collo le acque, e produrre l' effetto in questione. Ma sopra questo punto speciale dovrò in seguito di questa memoria richiamare più particolarmente l' attenzione del lettore.

§. 18. Il noto passo di Tacito = Ne Clanis solito alveo „ dimotus in amnem Arnum transferretur = stabilì la congettura del non entrare in quell' epoca nell' Arno veruna parte delle acque della Chiana, ma probabilmente era a cognizione del Senato Romano la maniera facilissima di eseguire questo progetto, con escavare ulteriormente la gola di Monte determinando quindi verso Firenze il corso di tutte quelle acque onde si temeva che a danno di Roma fosse il Tevere sopraccaricato. Pisone sostenendo le opposizioni dei Fiorentini che per l' istessa ragione volevano liberare il loro Arno da nuovo carico d' acque, impedì l' esecuzione dell' opera, ma ciò che venne allora negato all' arte, si vede che fu gioco forza concedere in seguito alla natura, la quale ha con la immancabile corrosione operata dalle acque abbassato la gola di Monte, non senza che l' arte istessa l' abbia poi efficacemente secondata, come l' istoria e le tracce tuttora esistenti chiaramente insegnano.

§. 19. Quando il fondo di un ramo di fiume si abbassa, e l' acqua dell' altro ramo è per conseguenza richiamata con retrogado corso al punto della diramazione, intorno ad esso punto si producono allagamenti e ristagni più o meno estesi e durevoli. Così dovette accadere presso alla gola di Monte, ove l' inversione delle acque verso il principale ramo dell' Arno ebbe principio. E di fatto le antiche memorie in quella parte della pianura Aretina rammentano acque stagnanti e laghi, conservandosi tuttora in alcuno di quei posti la denominazione di *acqua morta*, sebbene oggi tutte le acque ivi scorrano senza ostacoli ne rigurgiti, onde quella denominazione appartiene ad uno stato di cose ben diverso dall'attuale. Si trova ancora rammentato un lago di Mugliano, luogo ove adesso non sono che sanissime e fertilissime coltivazioni, di maniera che tutto il tratto della goletta di Chiani, per cui dal piano di Arezzo si entra in Val di Chiana, si riscontra ingombrato dall' acque con le Autorità di molti Scrittori dal duodecimo al decimo quarto secolo.

§. 20. Di questo lago si nominano ancora i Deputati fatti dal Governo di Firenze, che in quei secoli dettero luogo a varie deliberazioni, una specialissima delle quali si trova in questo Archivio di Firenze detto delle Riformazioni, ove l' abilissimo Sotto Direttore Sig. Gonnella si è gentilmente prestato a fare le relative ricerche. Si delibera ivi adunque nel 1388. di incanalare e fare scolare le Chiane verso Arno, *o dove meglio sarà creduto*, parole le quali indicano abbastanza che spontaneamente quelle acque non andavano in Arno, e che non era esclusa la possibilità di trovargli esito altrove. Ciò combina con quanto si legge nell' istoria dell' Adriani il quale in aria di antica tradizione parlando delle Chiane, dice che dalla parte di Arezzo già i Fiorentini gli abbassarono con una profonda fossa l' uscita in Arno, in cui adunque non apparisce che entrasse per l' avanti la Chiana conformemente all' idea presentata dal sopraccitato passo di Cornelio Tacito.

§. 21. Che dopo l' undecimo secolo le acque dell' Arno riunite in un solo alveo si dirigessero tutte come al presente verso Firenze, che restassero per molto tempo le sue acque separate da quelle della Chiana, e che durante questa separazione esistesse nell' intervallo C, D lungo circa miglia cinque tra l' Arno corrente verso Firenze e la Chiana corrente verso Roma una espansione di acque parte stagnanti, parte languidamente correnti senza costante direzione, restò con fondate congetture provato nella citata mia opera pubblicata l' anno 1789. Osservai allora che se fosse potuto trovarsi un documento, il quale autenticasse ciò che indirettamente mi resultava dal complesso delle circostanze e delle congetture, cioè che pel preindicato intervallo C, D ove trovasi appunto la goletta di Chiani, le acque fossero state vedute correre da Tramontana verso Mezzogiorno, un tal documento porrebbe in evidenza tutto il sistema della diramazione dell' Arno e dell' influenza di essa nelle vicende di Val di Chiana.

§. 22. Trascorsi oggi trentacinque anni, con la Pianta di cui nella Fig. 2. presento quì in piccolo una còpia si può convertire la congettura in asserzione, e riempire un vuoto in questa istorica parte d' Idrometria. Essa pianta nel suo originale malamente acquarellato indica con uno scritto del decimoterzo secolo i diversi luoghi, e sono appunto quelli che giacciono nell' intervallo in questione tra l' Arno e la Val di Chiana, intervallo che alla Figura prima è limitato tra le lettere C, D in una lunghezza di circa miglia cinque, ove esiste la goletta di Chiani.

§. 23. Alle descrizioni che sono nell' originale ho supplito in questa piccola copia con lettere indicative per semplicizzarne l' incisione. Il paese quivi rappresentato è compreso a Mezzogiorno dalla strada A B, a Tramontana dall' espansioni d'acque C, N, D in mezzo alle quali vedesi disegnata la barchetta E a Levante della collina nella cui estremità boreale è la chiesa F, ed a Ponente da altre colline che alla loro estremità boreale hanno i castelli G. È notabile che la Chiesa in F esiste tuttora, ed esistono in parte diruti i Castelli in G. Le sue dimensioni sono di circa miglia cinque da Mezzogiorno a Tramontana e due da Levante a Ponente, e lo spazio in essa Pianta rappresentato corrisponde nella direzione presso a poco del meridiano a quello compreso nella Fig. I. tra le lettere C, D.

§. 24. Nel punto A vedesi scritto Olmo, nome che ancor di presente ritiene un villaggio situato nella strada postale tra Arezzo e Perugia, di dove si dirama una strada diretta verso Ponente e che al punto B incontra una chiesa e casamento in faccia ove leggesi Pieve al Toppo, chiesa e casamento che in forma alquanto simile ivi si trovano col nome istesso ancora adesso, e quindi si raccoglie che la strada A B in cui è scritto *strada senensis*, rappresenta l'attuale via chiamata dei Ponti d'Arezzo, e che è al principio della strada nuovamente costruita tra Arezzo e Siena. Adesso non vi è altro ponte considerabile che quello sul Canal Maestro della Chiana il quale è di un arco solo, nel 1769 era di due archi, e corrisponde a quello che di più archi è quì disegnato nel punto H.

§. 25. Tale strada A B separa dalla Val di Chiana che gli resta a Mezzogiorno la goletta di Chiani e l' Arno che gli rimangono a Tramontana. La sola inspezione del modo con cui è disegnata essa strada, somministra per se stessa dei lumi importanti. In fatti le acque in abbondanza espanse dalla parte di Tramontana corrono e passano sotto diversi ponti verso Mezzogiorno con direzione opposta a quella con cui sotto l' unico ponte in H passa ora la Chiana verso Tramontana. Nel punto L della pianura alquanto rilevata in mezzo ad un considerabile allagamento è indicato Mugliano con l' accenno di un castello, che tuttora ivi si conserva in mezzo ad una fertile e florida campagna in cui non resta la minima traccia di allagamenti e di ristagni d' acque, appartenente alla nobilissima famiglia Aretina dei Marchesi Albergotti. E si è già veduto rammentato nelle antiche carte un lago in quei contorni di questo nome, ma che tutte le acque di esso fossero correnti verso Mezzogiorno, se si potè congetturare, non però si ebbe sin quì per appoggiare tal congettura una testimonianza positiva e quale apparisce dal disegno della strada A B. I ponti moltiplicati che vi si vedono spiegano ancora per qual motivo essa conservi il nome di via dei ponti d' Arezzo, sebbene oggi si chiamerebbe la Via del Ponte, essendo uno solo nel punto H quello di considerabile grandezza per cui passano adesso con direzione opposta le acque della Chiana.

§. 26. Dove al basso si riuniscono le falde delle tra loro prossime colline G, F, è il centro della goletta di Chiani, per cui la campagna di Arezzo con continuazione di pianura comunica con la Val di Chiana. In questa goletta si vede disegnata trasversalmente la strada M, N, O la quale in quella medesima posizione esiste tuttora, ugualmente che il ponte N corrispondente al posto del ponte alla nave non ancora ricostruito dopo la rottura del suò arco occorsa circa venti anni sono, e per cui la Chiana oggi continua il suo corso verso Tramontana dopo esser passata sotto il ponte H.

§. 27. Continuando verso Tramontana trovasi oggi dopo il ponte alla nave alla distanza di circa un miglio il ponte a Chiani, per cui la Chiana passata per i ponti H ed N entra nel piano d' Arezzo incassata, e per la pescaja detta de'Monaci va a scaricarsi nell' Arno. Ma quì la nostra Pianta rappresenta tutt' altro che lo stato attuale delle cose. In fatti dalla parte boreale della strada M, N, O non solo non vi si rappresenta una campagna capace come adesso di un alveo profondamente incassato e tutta coltivata ed al sicuro dalle innodazioni, ma al contrario vi si scorge chiaramente disegnata una laguna navigabile distesa sopra quella parte della pianura Aretina lambita dall' Arno, la quale anco ai nostri giorni si offre all' occhio dell' osservatore situato nella goletta di Chiani.

§. 28. Lo spazio occupato da questa laguna è quello stesso in cui (§. 19.) molti antichi documenti rammentano espansioni di acque oltre allo specificatamente nominato lago di Mugliano. Ma conviene avvertire che i citati documenti accennano ivi acqua morta in diversi luoghi che ne conservano tale denominazione, e non parlano di acqua corrente. Al contrario la nostra pianta segna manifestamente sotto il punto N l' acqua che dalla laguna esce a piena gola dirigendosi verso Mezzogiorno per l' alveo N, H, unendosi a quella che esce per il ponte H e correndo insieme con essa in un senso opposto a quello per cui l' acqua si vede oggi sotto questi ponti transitare.

§. 29. Abbiamo adunque un' antica Pianta, la quale rapprenta di fatto ciò che il sistema da me immaginato condusse già a congetturare, cioè che dal piano di Arezzo una copiosa massa d' acqua s' introduceva per la goletta di Chiani e si univa con il fiume Chiana a portar sotto Orvieto tributo al Tevere; e tale Pianta oltre ai suoi manifesti caratteri di antichità fu conservata in un Archivio appartente all' Abbadia la quale possedeva fino dal decimo secolo i terreni, che sono il teatro in cui questo cangiamento di scena venne operato; onde l' autenticità di essa resta ancora per tal riflesso luminosamente confermata.

§. 30. Ma la combinazione di questa Pianta con le cognizioni locali della campagna porta molto più oltre ancora le verificazioni di cui si tratta. In effetto pella pianura Aretina eccettuato l' Arno non discendono torrenti di considerabile portata, e quei torrenti piccoli che la intersecano sono, come ho sopra avvertito, incassati adesso per molte braccia nel terreno. Ma ancor quando corressero nella superficie di esso avendo necessariamente e liberamente il recapito loro nell'Arno, non potrebbero soffrire rigurgiti e formare la laguna C, N, D che è quì chiaramente delineata. Quali sono adunque le acque che allora si radunavano nel piano d' Arezzo ed indi sboccavano in Val di Chiana per i ponti N, H come dimostra la Pianta?

§. 31. Le acque che scendono dalle colline G, ed F adiacenti alla goletta di Chiani non potevano ivi concorrere ed espandersi mentre la stessa le mostra diversamente da quel che oggi si vede, le mostra cioè tutte dirette verso Mezzogiorno e che senza toccare il piano d' Arezzo introduconsi direttamente in Val di Chiana. Nella piccola copia quì annessa (Fig. II.) si scorgono i due torrenti Q, P ed R, S che non può equivocarsi se vadano da Mezzogiorno a Tramontana, o viceversa, mentre si partono dalle colline G ingrossandosi successivamente a misura che si distendono nella pianura verso mezzogiorno.

§. 32. Sebbene io non possa quì entrare in una minuta descrizione di tutte le singolarità maravigliose che s' incontrano nell' esame di questa Pianta, è nondimeno indispensabile per il rapporto immediato con l' oggetto attuale che io mi arresti sopra la seguente osservazione. Nell' anno 1342. si trova un' ordinanza nello Statuto Aretino ad oggetto di liberare dalle acque le terre addette a quella Comunità, e si specifica precisamente „ Quia fossum seu fossatum novum Com„ munis Aretii factum et missum a pontibus Clanium usque „ ad Clanicellas (si avverta che questo fosso si dirigeva dal punto H verso il punto O, e che nel piano d'Arezzo esiste tuttora il fosso che conserva il nome di Chianicella) „ est utile „ ampliari, statutum est quod ipsum fossum remittatur et „ amplietur sicut opus fuerit . . . . pro utilitate poderium „ dicti Communis Aretii . . . ita quod flumen Vingonis et alia „ flumina in illis contratis dirixentur et deriventur in dictam

„ fossam ad hoc ut terrae et possessiones in illis contratis exi-
„ stentes ab aquis praedictorum fluminum non ledantur. „

§. 33. Allorchè nelle mie Memorie sopra la Val di Chiana riportai nel 1789. questa ordinanza dello Statuto osservai doversi quindi congetturare che per l' avanti il Vingone e gli altri prossimi torrenti come il Lota ec. non avevano il loro efflusso verso Tramontana = ivi pag. 89. = questo è un bel „ riscontro istorico che conferma le teorie da me precedente„ mente esposte rispetto alla successiva inalveazione degl' „ influenti nel tronco inversamente diretto del recipiente. Ciò che allora fu da me congetturato, diviene per la nostra Pianta oggi una verità di oculare ispezione. Infatti il torrente Q, P è nell' originale di questa Pianta letteralmente indicato per il torrente Lota, e l' altro R, S per il torrente Vingone, ed ambedue si vedono chiaramente diretti verso mezzogiorno del pari che tutte le altre acque che si partono dalla laguna C, N, D indicata in quella porzione della pianura Aretina aderente alla goletta di Chiani. Attualmente il Lota, il Vingone e tutti gli altri piccoli influenti scendono (come questa antica Pianta dimostra che prima scendevano) dalle colline G, ma non corrono come indica la Pianta medesima rettilineamente verso Mezzogiorno passando sotto i ponti della strada A B. Al contrario essi torrenti hanno adesso il loro alveo curvato e ritorto in senso contrario, e sboccano nell' alveo H, N della Chiana al di là del ponte N verso Tramontana. Se io in conferma della mia opinione avessi nell' anno 1789. voluto immaginare una Pianta, non avrei potuto disegnarla differentemente da questa.

§. 34. Non vi è dunque da far conto che sopra le acque del piano d' Arezzo. Ma i torrenti che in esso esistono non solo, come si è detto, influiscono nell' Arno, ma inoltre è chiaro che debbono sempre inevitabilmente avervi influito, come ne fa fede la disposizione delle montagne dalle quali (eccetto la parte ove scorre l' Arno) la pianura d' Arezzo è circondata, e come comparisce all' occhio idraulico a cui non può sfuggire l' incassatura di quei torrenti graduata correspondentemente all' abbassato fondo dell' Arno che li riceve.

§. 35. Posto ciò, l' esistenza di una laguna nel piano d' Arezzo è garantita da molte testimonianze da me già altrove pubblicate, fra le quali vi è quella di Giulio Obsequente, che dice = multa millia hominum in tumescente pado et sta-
„ gno Arretino obruta = Questo avvenimento si racconta accaduto nel Consolato di Sergio Galba e Marco Scauro, che dai fasti del testo civile corrisponde all' anno di Roma 645. Gli eruditissimi Autori Inglesi dell' Istoria universale asseriscono parlando degli Etruschi, che *Aretium* viene da *Aret* nelle antiche lingue orientali denotante un lago, una peschiera o fiume, o piuttosto una composizione di sì fatte cose: ciò indica in un epoca molto più antica l' esistenza di lagune intorno a quella Città, e su tal particolare si vedrà in seguito qualche altra interessante osservazione.

§. 36. Nè dell' esistenza di queste lagune, nè del corso di quelle acque verso Mezzogiorno resta oggi veruna traccia perchè tutti queï terreni sono floridissimi e ben coltivati, e le acque che gl' irrigano senza inondarli sono dirette al contrario verso Tramontana. L' incassamento dei torrenti nella pianura Aretina non aveva pertanto allora avuto luogo perchè la gola di Monte e gli altri nodi sassosi nel tronco D, E (Fig. I.) dell' Arno che li riceve non erano corrosi e rotti, di maniera che le acque di quel tronco dell' Arno elevandosi al pari della predetta pianura potevano espandersi in essa, come indica la pianta nei punti C, N, D (Fig. II.) e tale espansione di acque non poteva essere smaltita che per due parti, cioè introducendosene una porzione in Val di Chiana unendosi con le acque di essa tributarie del Tevere, come indica la nostra Pianta, e traboccando l' altra per la gola di Monte verso Firenze e Pisa, come descrive Strabone il quale dice che l' Arno arrivava a Pisa da Arezzo abbondante ma non intiero.

§. 37. M.r Prony nel dar conto del mio sistema sulla diramazione dell' Arno chiama quella parte dell' acqua di questo fiume introdotta in Val di Chiana il ramo Teverino dell' Arno. Adottando adunque tale espressiva denominazione è manifesto che l' asserzione di un antico ramo Teverino dell'Arno è oggi appoggiata ad un documento ancor esso antico, che ne pone sotto l' occhio l' origine e l' andamento, e che sulla faccia del luogo si manifestano le cause dell' accaduta catastrofe, mentre esaminando la escavata gola di Monte e gli altri ostacoli sassosi tolti dal tempo e dall' arte umana al corso dell'Arno, si vede come il ramo Teverino di esso ha potuto con retrogrado corso essere richiamato al punto della diramazione, dirigendo come oggi accade fino da Arezzo verso Firenze e Pisa tutte le acque di quel fiume stesso, che prima vi giungeva abbondante di acque ma non intiero come asserisce il Greco Geografo, il quale oltre alla precisione che gli è abituale, si è occupato dell'Arno fino al segno di notare non poche singolarità estranee alla geografia.

§. 38. Rileva egli in fatti che nella confluenza dell' Arno col Serchio sotto Pisa l' acqua si elevava in guisa che un uomo situato in una delle ripe non poteva vederne un altro che fosse nella ripa opposta. La cognizione di questo fenomeno, che la moderna idrometria riconosce inerente all' economia dei movimenti fluviatili, dovette risultare da minute informazioni prese a riguardo dell' Arno, sopra del quale adunque non potè Strabone leggermente asserire che scendeva da Arezzo diviso in più rami, ma dovette egli descrivere ciò che effettivamente aveva luogo allora, ciò che per molto tempo appresso potè sembrare una falsità, ciò che le mie ricerche pubblicate nel 1789. *ont rendu probable*, come scrisse M.r Humboldt in proposito delle analoghe vicissitudini occorse nell' Arno e nell' Orenoque, e ciò finalmente che il documento oggi quì illustrato pone sott' occhio con la maggiore evidenza. Di maniera che la critica idrometrica è venuta al soccorso di quella letteraria, onde stabilire la vera intelligenza di questo antico e celebre Autore.

§. 39. Acciò non resti dubbio relativamente al numero degli antichi rami dell' Arno, è da notarsi che se dietro la supposizione del Cluverio, e del Lami potesse leggersi l'Arno diviso in due rami, si è veduto come senza equivoco debba intendersi. Se poi a norma di quanto credono tutti gli altri interpreti di Strabone, deve leggersi l' Arno diviso in tre rami, in tal caso oltre il già descritto ramo Teverino si vedrà facilmente come corrispondere alla condizione di un antico terzo ramo in quel fiume.

§. 40. Percorrendo l' alveo di esso si trovano oltre la gola di Monte non solo superiormente ma inferiormente ancora alcune pescaje naturali e non manufatte, manifestamente corrose e rotte ed a molte braccia profondate. Serva il nominarne due che cadono sotto gli occhi di chi viaggia per la strada postale tra Arezzo e Pisa. L' Incisa è la prima, l'altra la Gonfolina. Il tronco d' Arno superiore a ciascheduna di esse si vede con il fondo abbassato in proporzione dell' abbassamento della respettiva pescaja e per conseguenza depressi ancora gli alvei dei respettivi influenti. Ciò posto, ripetendo il ragionamento che ha avuto luogo in proposito della gola di Monte è facile accorgersi, che considerando le rispettive adjacenze in quello stato in cui dovettero trovarsi avanti la corrosione o rottura degli ostacoli sopraccennati, si troverà il locale adattato per una divaricazione delle acque d'Arno, onde legittimare il descritto arrivo a Pisa di questo fiume non intiero ma tre volte diramato.

§. 41. Noterò di passaggio che oltre alla inspezione del locale abbondano le antiche tradizioni in appoggio di tale ipotesi, venendo sovente rammentati in diversi punti adjacenti al corso dell' Arno ristagni ed espansioni delle acque di questo fiume, o rigurgiti dei suoi influenti che potevano per conseguenza presentar l'idea di una diramazione di esso. Leggesi nelle Istorie del Boninsegni = Che il nostro piano di Fi-
„ renze suoleva essere quasi tutto pantano fino presso a Fi-
„ renze per l' altezza della pietra Gonfolina presso Signa, la

„ quale fu poi per opera di maestri tagliata e abbassata, e „ sgorgarono l' acque, e diventò piano fruttifero e sano = Questa tradizione fu adottata da Bartolomeo Scala, dal Borghini e dal Lami, ed il Villani aveva già nella sua Cronaca detto l' istesso aggiungendo che *l' Arno aveva in più luoghi rattenute e paduli.*

§. 42. Il Biondo nell' Italia illustrata scrive = supra Flo„ rentiam ad quintum decimum lapidem primum est ad Arnii „ fluenta oppidum Incisa cujus oppidi nomen originem ha„ buisse conjector a succiso obice saxeo cursum Arni solito „ remorari = Inoltre davanti a Figline nel 1311. l' Arno non era come adesso incanalato, essendo che si legge nel Boninsegni che l' Imperatore Enrico VII. si era accampato nell' Isola d' Arno detta il Mezzule. In un codice della Libreria dei Marchesi Niccolini intitolato = Constitutum domini Potestatis Florentiae = leggesi = De cursu fluminis Arni faciendo per di„ strictum et curiam Filinii positis in insula juxta flumen „ Arni devastet et inutilia reddat vagando et discurrendo „ quatuor millia stajora terrae ad granum quibus nullus per„ cipitur fructus, ut ipsum flumen Arni defluat certo et or„ dinato cursu, et fructus percipiatur ex eis provisum est. ec.„

§. 43. All' anno 1361. trovasi un' altra deliberazione in un Archivio dei Capitani di parte Guelfa in Firenze portante, „ Che gli Uffiziali di Torre sieno tenuti di andare alla terra del „ Tartagliese nel comune di Figline, e insieme con sei anti„ chi e buoni uomini di Santa Maria del Tartagliese conferisca„ no ed esaminino delle terre che per lo tempo passato sono „ state occupate per lo fiume Arno e per le piene e ruine „ di detto e nel detto popolo, e già sono otto anni passati „ e più sono state lasciate scoperte per lo detto fiume Arno, „ e da quel tempo in quà sono state cominciate a lavorare ov„ vero sono state in alcun modo occupate, ed esse terre „ confinare e terminare ec. Il simile si faccia nel popolo di „ S. Salvadore a Settimo e nel luogo che si chiama Insula „ nuova e negli altri luoghi ivi appresso ec. ec. =

§. 44. Leggesi nelle Cronache del Villani che il Piano di Pistoja *era anticamente tutto rattenute e paduli*, onde allora lungi dall' aver l' Ombrone un libero scolo nell' Arno, questo nel piano suddetto rigurgitava atteso forse l' ostacolo della non escavata pescaja della Gonfolina ; e Girolamo di Pace da Prato scrisse sulle condizioni del fiume Arno nel 1558, e ne risulta che fino a quell' epoca non era terminato l' incanalamento di esso fiume. Quindi è che sarebbe facile, occorrendo, trovare nel corso dell' Arno un punto, in cui (se non con l' appoggio evidente di un documento quale è quello che si è presentato per dimostrare il ramo Teverino), si riscontrasse la possibilità di un' antica divaricazione delle acque del fiume, la quale in seguito fosse per gli ostacoli tolti al libero corso delle sue acque riunita in un solo canale, e che avesse presentato l' idea di un' altra diramazione di questo fiume.

§. 45. Sì fatte divaricazioni delle acque dell' antico Arno da Arezzo fino a Pontedera potrebbero aver presentato l'idea di una diramazione effettiva ; ma è poi vero che tale non potrebbe propriamente denominarsi subito che l' acqua divergente dall' alveo fosse obbligata a rientrare in esso, e non avesse la possibilità di scaricarsi in mare per un alveo separato, possibilità che non si manifesta (eccetto nel ramo Teverino) in veruna adjacenza dell' Arno da Arezzo fino a Pontedera.

§. 46. Così non è da Pontedera fino al mare, giacchè dalla parte sinistra dell'Arno la giacitura della campagna è tale, che le acque in qualunque modo uscite dall' alveo di quel fiume hanno luogo di scaricarsi separatamente in mare. È a memoria nostra un diversivo che da quella parte si praticava quando si temeva in Pisa la soverchia altezza del pelo d' acqua dell' Arno, e tuttora quella traccia di alveo abbandonato si chiama Arnaccio. E nei viaggi della Toscana del celebre Dottor Targioni Tozzetti trovasi una quantità di documenti relativi al così detto fosso Arnonico, che appunto in quelle adjacenze offriva gli avanzi d' un alveo abbandonato.

§. 47. Sopra queste autorità e sopra l' ispezione del locale non mancano fondamenti per rendere probabile, che verso Pontedera una porzione dell'acqua d'Arno non solo divaricasse come si è visto essere accaduto in tronchi superiori, ma inoltre si scaricasse separatamente dal tronco principale nel mare, e formasse quindi una vera diramazione, tale quale presso a poco M.r Sanson l'ha nella sua Italia antica delineata, e quale il Cluverio, il Lami, il Muratori ed il Targioni l'hanno congetturata e descritta.

§. 48. Il Lami (Hodeporicon Tom. I.) così si esprime = Quell' essere diviso l'Arno in tre alvei appresso Strabone „ è cosa che molto sorprende e apparentemente falsa, se non „ fosse errore del copista ed invece di tre non si avesse a „ leggere due, cioè in due alvei . . . intendendo per un alveo „ dell'Arno quella digressione dell'acque del medesimo fiume „ che si fa alle fornacette sopra Cascina, e chiamasi ancora „ Arnaccio andando a terminare in marazzi e paduli verso la „ marina, che è un buon pensiero dell'eruditissimo Cluverio „. Quanto è facile adattarsi all'opinione dei citati Autori relativamente all'esistenza di questo ramo inferiore dell'Arno, altrettanto è difficile il credere insieme con essi che quella sia l'unica diramazione esistente anticamente nell'Arno, ed obbligare Strabone, come da loro pretendesi, a dire che l'Arno era diviso in due rami mentre tutti i testi di quell' Autore dicono chiaramente in tre.

§. 49. Oltre alla ripugnanza che provasi nell'adottare una lezione che non esiste, è da osservarsi che se Strabone avesse voluto descrivere l'Arno con una sola diramazione formata poche miglia distante dallo sbocco nel mare, cioè circa cento miglia distante da Arezzo, non avrebbe servito a questa idea dicendo che l'Arno scendeva da Arezzo abbondante ma non intiero. La precisione che caratterizza quel Classico Autore lo avrebbe portato a dire, che l'Arno scendeva da Arezzo abbondante (come è di fatto perchè nella pianura Aretina ha già ricevuto tutti i grossi torrenti del Casentino), e giunto presso a Pisa si divideva in due rami.

§. 50. La scoperta del ramo Teverino si accorda con la qualificazione dell' Arno scendente da Arezzo non intiero, e l' altra diramazione verso Pontedera compisce l'idea dell'Arno diviso in tre rami avanti di giungere a Pisa, ed in tal guisa senza variare la lezione del testo greco, e senza alterarne il preciso significato si ritrova l' intelligenza di esso in tutto corrispondente alle condizioni, che la natura aveva in quei tempi imposto al corso del fiume Arno.

§. 51. Se alcuno non vedesse in qual maniera il ramo Teverino avesse acquistato una denominazione diversa da quella del suo tronco principale, chiamandosi il fiume Chiana, si può osservare che ciò è conforme a quanto in altre diramazioni di fiumi è accaduto, e quelle del Reno di Germania e del Pò ne fanno fede. Al che debbe aggiungersi che questo ramo Teverino non dovette ai tempi di Strabone per tutta la sua lunghezza denominarsi Chiana, mentre quel Geografo nomina il fiume Chiana come appartenente in genere alla Toscana e specialmente al territorio di Chiusi più di trenta miglia lontano da Arezzo, dicendo = tum per Etruriam et „ agrum Clusinum Clanis. = E tale denominazione pare che successivamente si estendesse fino ad Arezzo, mentre Plinio Seniore circa cento anni dopo Strabone qualifica la Chiana per un fiume Aretino descrivendo nel lib. 3. il Tevere = infra „ Arretinum Clanim duobus et quadraginta fluviis auctus.

§. 52. Per terminare di togliere ogni dubbiezza la quale non ostante la descritta Pianta restasse tuttora sull'antica esistenza del ramo Teverino dell'Arno, giova rispondere ancora alla difficoltà che (qualunque ne fosse la ragione) potesse alcuno provare nel concepire come l' Arno abbia sofferto nel tronco in questione uno sbassamento tale da corrispondere al complesso dei fenomeni. Ho accennato sopra al §. 15. che un Documento del Secolo decimo secondo porta che l'Arno in un punto ove adesso è per molte braccia incassato, non era allora più profondo di braccia tre, ed ho rilevato che oltre alla gola di Monte in cui si scorge chiaro un considerabile profondamento, nei punti superiori di quell'alveo non mancano nodi e ostacoli sassosi i quali avanti che fossero corrosi e rotti, poterono sostenere l'acqua dell' Arno ad un' altezza anco maggiore del piano d' Arezzo.

§. 53. Ma l'esame di questo piano porta nella questione una luce tale, che non è possibile desiderarla maggiore. I diversi torrenti che l'intersecano e che vanno ad influire nell' Arno sono incassati alla profondità di 20 e 30 braccia, mentre la superficie del piano stesso è orizzontale, e quindi a prima vista si concepisce che lungi dall' esser esso formato con le alluvioni di quei torrenti, ha dovuto un gran corpo d' acque spagliarvi sopra, depositarvi le ghiare che compongono i suoi strati inferiori, e la sabbia e la terra onde son formati gli strati superficiali, e che questo corpo d' acque essendosi poi abbassato sotto la superficie di esso piano, ha obbligato ad incassarsi in esso le acque dei torrenti che lo fendono.

§. 54. Il grosso corpo d' acque che poteva entrare nel piano d'Arezzo non può venire che dall'Arno, il quale adunque ha spagliato nel piano stesso, ed avanti che con le proprie alluvioni lo avesse formato inondava lo spazio che esso piano occupa adesso, come nella prima parte delle sopracitate mie Memorie sulla Val di Chiana annunziai, e come la Pianta di cui offro al pubblico la notizia, ne pone sotto gli occhi una conferma, rappresentando quella parte che essa comprende del piano d' Arezzo coperta dalle acque, le quali si ripete essere ormai evidentemente provato, che erano le acque dell' Arno.

§. 55. Ma appunto la profonda incassatura dei torrenti Aretini somministra giornalmente un riscontro delle ben differenti condizioni di quel territorio nei secoli trappassati. Infatti negli alvei di quei torrenti tra gli strati di ghiare si trovano continuamente ossa fossili e bronzi antichi, che mostrano popolazioni esistenti in quei contorni avanti che i sopradetti strati di ghiara e di terra per l' alluvione dell' Arno vi fossero stati sopra depositati e disposti.

§. 56. Giova quì (non potendo estenderci sopra tutte le prove di quest' antica alluvione dell'Arno) indicare alcuni dei più insigni sopracitati ritrovamenti. Fuori della porta S. Lorentino d' Arezzo fu ritrovata ai tempi di Giorgio Vasari la famosa Chimera che oggi si ammira nella R. Galleria di Firenze. Nel costruire ivi la strada Fiorentina si trovarono al fondo di una fossa coperta molti frantumi di vasi Etruschi e Romani, pezzi di marmo ed ossa umane, e ben si discerneva l' effetto di una inondazione la quale aveva coperto tali frantumi con strati di ghiara e poi di terra finissima.

§. 57. Nelle ripe ghiarose di quei torrenti e specialmente del Castro e del Maspino alla profondità dalle 15. alle 25. braccia si scuoprono ogni volta che le piene producono qualche sfaldamento nelle ripe stesse, ossa fossili ed intieri alberi per lo più querce o cerri. Una tibia d' elefante vi fu trovata, e si conserva nel Museo Rossi in Arezzo, come esistono nell' altro Museo Bacci altre ossa di elefante, di uro, ed è rimarchevole un grande osso di balena parimente trovato sotto gli strati ghiarosi del piano d' Arezzo. La quantità di ossa fossili le quali antichissimamente le acque d' Arno trasportarono intorno ad Arezzo, sembra non si limiti a quelle che ivi trovansi sepolte, ma che ne scorresse ancora una parte lungo il ramo Teverino per la Val di Chiana ed inoltre per la gola di Monte nel sottoposto Val d' Arno. Infatti se ne trovano alcune in Val di Chiana ed una porzione di tibia elefantina di oltre 40. libbre di peso fu scoperta non molti anni sono alle falde di Fonte al Ronco, e nelle adiacenze di Bettole una parte di mandibula di Mastodonte. Nel Val d' Arno poi dopo aperta la gola pietrosa dell' Incisa si è dovuto profondare il superior tronco dell'Arno, e per conseguenza ancora gl' influenti che vi scendono dalle prossime laterali montagne delle quali adunque restano allo scoperto gl' interni strati sottoposti. Quindi più spesso che in Val di Chiana ove tali profondamenti non hanno potuto aver luogo, si trovano in Val d' Arno ossa fossili le quali offrono ai dotti Individui dell' Accademia Valdarnense interessanti oggetti di utili speculazioni.

§. 58. Il Newton della storia naturale, il celebre Sig. Cuvier ha avuto sotto gli occhi il disegno della suddetta porzione di mandibula di Mastodonte la quale ha meritato che egli ne dia conto nella sua grande e classica opera. Questa porzione di mandibula si conserva nel Museo particolare del celebre Sig. Dott. Giuli Pubblico Professore nella Regia Università di Siena. Il ritrovamento di questi singolari resti di antichità è così frequente in ognuno dei profondati torrenti di quella pianura Aretina, che in pochi anni il Magistrato della così detta Fraternità d' Arezzo ne ha raccolta una considerabile quantità senza altra pena che di accordare una piccola remunerazione ai Contadini, i quali allorchè a caso vi si incontrano, invece di romperli, o lasciarli andar male gli recano al Museo del detto Magistrato il qual Museo è posto sotto la direzione dell' abilissimo Sig. Dott. Antonio Fabroni conosciuto specialmente anco oltre ai Monti per le sue chimiche ricerche.

§. 59. Egli in proposito di queste ossa fossili ha rilevato che la gran quantità di esse scoperta e ritrovata prova oggimai che il numero degli animali ai quali le ossa stesse appartenevano è molto grande. Ma con tutto ciò non vi è memoria che mai sia stato trovato tutto intiero uno scheletro nel medesimo posto. Quindi egli congettura che le ossa di questi animali debbono essere state sconvolte e ruzzolate dall' acqua, e da quell'acqua istessa probabilmente la quale sopra tali ossa ha disteso successivamente gli strati ghiarosi e terrosi onde sono esse oggi ricoperte.

§. 60. Se dunque la Pianta oggi descritta ed illustrata pone sotto gli occhi l' esistenza di un' espansione di acque che dal Piano d'Arezzo s' introduceva per la goletta di Chiani in Val di Chiana; se tali acque è provato non potere essere state altre che quelle dell' Arno; se la composizione, degli strati ghiarosi onde la pianura Aretina è composta mostra doversi non ad altre acque che a quelle dell' Arno la deposizione di quelli strati; se questi cuoprono quantità inesauribile di ossa fossili, ed ancora di antichi oggetti di sociale uso e di lusso, convien concludere che l'antico cratere ivi esistente è stato ingombrato dall' Arno, il quale trasportandovi dalle vallate alpestri del Casentino le ghiare, lo ha colmato e coperto poi in superficie (come porta l'andamento naturale delle colmate) di materie le più tenui, e di ottima terra vegetabile.

§. 61. Ne seguì pertanto che il ristagno dell' Arno in quella pianura dovette mantenersi in una più o meno estesa dimensione secondo che minore o maggiore era l'efflusso che potevano indi procurarsi le acque di esso. La disposizione delle montagne le quali sono indicate dalle lettere C, F, E (Fig. I.) intorno al piano d'Arezzo mostra che l'efflusso non poteva operarsi che per due punti, cioè per la gola di Monte e per la goletta di Chiani. La prima di queste gole era in condizione variabile e suscettibile di escavazione perchè oltre al gran salto che fa l'acqua al piede di essa, gli succede inferiormente un alveo di rapidissima declività; l'altra gola è invariabile e permanente, nè poteva essere alterata dalle acque che per essa dal piano d'Arezzo entravano in Val di Chiana, perchè queste acque non avevano salti da fare, e continuavano il loro corso per una campagna pianeggiante. Ecco adunque l'Arno che dopo il ristagno delle sue acque presso ad Arezzo forma due rami, uno per la gola di Monte verso Firenze, l'altro per la goletta di Chiani verso Chiusi. Questo unito con la Chiana (la quale da Strabone è appunto ivi indicata = per agrum Clusinum Clanis =): si scarica nel Tevere e forma il ramo Teverino dell'Arno, e quello conservando la sua denominazione qual fiume reale porta tributo al Mare dopo aver probabilmente presso Pontedera sofferto una seconda diramazione. Ed in tal guisa si trova precisamente lo stato dell' Arno descritto da Strabone, e le parole di lui non hanno più nulla di oscuro nè di assurdo, come potè sospettarsi avanti l'esame delle locali circostanze fisiche ed avanti che la nostro Pianta venisse alla luce.

§. 62. Tutto questo insieme di numerosi fatti collimanti verso la medesima indicazione e perfettamente d' accordo fra loro è tanto imponente, che sembra impossibile il volerne rinnovare l' esame, principiando dal livellare la differenza di alcuni punti nei quali ha avuto luogo respettivamente depressione ed inalzamento. Quando è già dimostrato che una considerabile variazione di livello tra essi punti ha dovuto operarsi, ed ignorasi qual legge seguisse l' inalzamento negli uni, e negli altri l' abbassamento, è inutile indagare con l' istrumento alla mano la quantità di questa variazione che risulta oggi, mentre al complesso dei fatti concatenati fra loro che si offrono all' occhio, tale isolata notizia non porta nè conferma, nè objezione. La livellazione può servire per paragonare le situazioni attuali con altre precedenti delle quali abbiasi cognizione, ma quando manca questa cognizione, è impossibile paragonare il presente con il passato per mezzo della livellazione la quale adunque resta in tal caso affatto inutile.

§. 63. E per venire al concreto del caso nostro attuale si avverta che siccome l'Arno non può dirigere le sue acque verso Firenze altro che per l' unico punto della gola di Monte, traboccando dalla cresta di essa nel sottoposto Val d' Arno, che la cresta di questa gola fosse anticamente più o meno alta non interessa punto la nostra questione, perchè l' acqua la quale necessariamente vi ha sopra strisciato debbe averla più o meno ed in maggiore o minor tempo corrosa, e l' arte umana avere probabilmente più o meno contribuito all' abbassamento prodotto in essa dalla forza delle acque. Nell' istessa guisa subito che l' inalzamento del piano d' Arezzo per le deposizioni delle acque è innegabile, resta inutile per il nostro oggetto conoscerne la quantità, e la livellazione attuale non può indicarla.

§. 64. Il piano d' Arezzo debbe aver cessato di alzarsi quando la gola di Monte è rimasta tanto depressa da dare all' Arno un tale esito, che impedisse alle sue acque d' inondare e colmare ulteriormente quel piano, ma la cresta della gola di Monte ha dovuto continuare a sbassarsi fino a tanto che, come vedesi oggi, con una pescaja murata non è stato ivi stabilito un capo saldo capace di resistere validamente alla corrosione delle acque che dall' alto di essa traboccano.

§. 65. Ora se appena le acque dell' Arno traboccarono in guisa da quella gola di Monte da non poter più ristagnare nel piano d' Arezzo, fosse stato stabilito con una serra o pescaja murata un tal capo saldo, questo si troverebbe molto più alto di quello che oggi si vede, ed il relativo tronco dell' Arno non sarebbe escavato a tanta profondità, ed i suoi influenti Aretini sarebbero meno incassati nel terreno, nè si sarebbero scoperte le ossa fossili di esotici animali, nè tutte le altre memorie che attestano quanto nei remotissimi tempi le condizioni di quelle contrade diversificarono dalle attuali. Al contrario se non fosse stata costruita l' attuale pescaja, e si fosse dato luogo ad un' ulteriore depressione della gola di Monte, si sarebbe molto al di là di quello che oggi riscontrasi, aumentato il profondamento dell' Arno e dei suoi influenti, e le ghiare trasportate dal Casentino invece di formare tutti gli strati del piano d' Arezzo e di accostarsi nel Val d' Arno, sarebbero molto prima di adesso scese a produrre verso Firenze quei riempimenti d' alveo che comparvero al celebre Viviani assai considerabili, e che non darebbono oggi tanta apprensione, se le prescrizioni suggerite da quel grand' Uomo avessero quanto il plauso degli scenziati altrettanto eccitato le amministrative sollecitudini.

§. 66. Nel primo caso la livellazione avrebbe potuto trovare la cresta della gola di Monte forse otto braccia soltanto più bassa della pianura Aretina, e nel caso secondo avrebbe potuto trovarla più bassa ancora di braccia cento, e l' uno e l' altro di questi dati, e tutti gli altri analoghi ad essi non avrebbero nè favorito nè contrariato il sistema in questione. Di maniera che diviene in questo caso inutile occuparsi dell' altezza della pescaja di Monte, come nella sublime analisi accade di certe funzioni arbitrarie che possono indeterminatamente variare mentre restano costanti altre quantità, e tra queste quantità e quelle funzioni si stabilisce per conseguenza esistere una reciproca independenza. Resta adunque dissipata ogni dubbiezza che di buona fede nascesse dall'attuale inferiorità della cresta della peseaja di Monte per rapporto alla pianura Aretina ed alla Val di Chiana, ed è appunto alla dubbiezza di buona fede che è sembrato valesse la pena offrire quì uno schiarimento.

§. 67. Per non lasciar nulla da desiderare per rapporto all'esistenza dell' antico ramo Teverino dell'Arno, è espediente ripetere che esso dovette emanare da un espansione dell' acqua d' Arno nel piano d' Arezzo circoscritto come sopra abbiam veduto dalle montagne E, F, C e dal tronco E, D dell' Arno e dalla porzione D, C dell' antico ramo Teverino dell' Arno medesimo (Fig. Prima). Le ripe altissime degl' incassati torrenti di questa pianura hanno offerto all' osservatore l'interna composizione della medesima, ed è notabile che quindi non solo si riconosce l'opera delle deposizioni fatte ivi dalle acque, ma si possono distinguere due epoche tra loro assai lontane e distinte, in cui le acque dell'Arno vi hanno sopra spagliato.

§. 68. Infatti le ossa fossili di Elefanti, Vri, Mastodonti, e perfino di cetacei si trovano ad una profondità molto maggiore di quella a cui giacciono ivi sepolti i bronzi antichi e gli antichi vasi, del credito dei quali fanno fede classici Autori, fra i quali Marziale.

„ Arretina nimis ne spernas vasa monamus
„ Lautus erat Tuscis Porsenna fictilibus.

Questi si trovano per lo più alla profondità di 5, o 6. braccia sotto la superficie della campagna. Di maniera che gli strati ghiarosi e terrosi che sovrastano ai bronzi ed ai vasi Etruschi appartengono alle prime età della Romana Repubblica, e le acque che con le loro espansioni gli produssero si riconoscono per quelle stesse che nella nostra antica Pianta sono disegnate. Le ossa fossili poi ed i tronchi d' alberi che alla profondità di più di 20. braccia si trovano, presentano l' idea di un' epoca molto più remota, e di rapporti dei quali l' istoria non ci ha conservato le memorie. Sì fatti frammenti di scheletri che non si trovano mai, come sopra ho osservato, riuniti in uno scheletro intiero, mostrano di essere ivi stati trasportati e depositati dalle acque le quali adunque anco in quella antichissima epoca dovettero ingombrare l'ampio Cratere che ora è ripieno dalla pianura Aretina. Quì convien richiamare la citazione da me fatta al §. 35. sull' etimologìa della voce Aretium. Quegli illustri Scrittori Inglesi ricaverebbero dalle scoperte condizioni delle profonde viscere della campagna che circonda Arezzo una conferma dell' etimologìa da loro stabilita, egualmente che da questa etimologìa antichissima, perchè dedotta dalle lingue orientali, ne ricevono illustrazione le sotterranee vestigia di una laguna fino da molti secoli avanti agli Etruschi esistente nelle adiacenze di quella Città.

§. 69. Che le sfaldate rupi delle Montagne scuoprano nelle viscere di esse le vestigia degli avvenimenti geologici occorsi molti secoli avanti, è cosa che si osserva non di rado, ma è bensì raro e rimarchevole assai che ciò si combini sotto la superficie di una estesa pianura come quella d' Arezzo, della quale si sono potute conoscere le condizioni in due antiche epoche per molti secoli distanti tra loro. E tale interessante singolarità egualmente che le variazioni occorse nell' Arno e nella Chiana sono dovute alle vicende alle quali la gola di Monte è stata soggetta. L' analisi e la descrizione di sì fatte vicende rendette probabile un sistema idraulico che oggi è divenuto evidente per il Documento che ho quì preso ad illustrare, il quale adunque interessa la geologìa, l' istoria naturale e l' idraulica. L' importanza di esso fu in Firenze ultimamente riconosciuta dal Sig. Barone di Humboldt investigatore sagacissimo di tutti i rapporti del nostro Globo con la geografia, l' Istoria naturale e l' astronomìa. Io rammento con sodisfazione le di lui amichevoli insinuazioni onde non venisse da me ritardata la pubblicazione di questa Carta, la quale sparge scientifica luce sopra la barbara oscurità di tanti secoli.

§. 70. Conviene adesso per compire l'istoria del ramo Teverino dell' Arno, che si offra quì un succinto ragguaglio sulla maniera, con cui le acque di Val di Chiana si sono adattate all' inversione del loro corso, e come possano indi essere insieme emanati e lumi rischiaranti la scienza delle acque e solidi elementi di prosperità per quella provincia.

§. 71. Si è veduto, che (Fig. I.) tra i punti C , D principiò a farsi correre una parte delle acque della Chiana verso Arno a Tramontana, mentre tutto il resto di essa continuava a correre verso il Tevere a Mezzogiorno. Quel punto di divisione tra le due correnti in senso opposto si slontanò successivamente dall' Arno, e si avvicinò corrispondentemente al Tevere. Il Sig. Prony nella sopracitata sua Memoria non omise di fare attenzione a questa progressiva marcia del punto culminante tra le due correnti, circostanza importante, della quale aveva egli trovata la descrizione nelle mie Memorie del 1789. Nel 1551. tal punto culminante era al così detto Porto dei Pilli, cioè slontanato dall' Arno di circa 8. miglia. Successivamente si trova al Porto di Brolio, e quindi con passo più o meno rapido presso alla Città di Chiusi, ove restò lungo tempo l' acqua della Chiana incerta della sua direzione, ora determinandosi in maggior copia verso l' Arno ed ora verso il Tevere.

§. 72. Nell' anno 1780. restò concordato fra le Corti di Firenze e di Roma, che si costruisce un Argine di separazione presso Chiusi, in virtù del quale non vi fossero più acque d' incerta direzione, e che al di là di detto Argine verso Mezzogiorno si dirigessero tutte verso il Tevere, e verso Tramontana nell' Arno si scaricassero quelle che rimanevano dalla parte opposta dell' argine stesso.

§. 73. È facile accorgersi che principiando dal tronco C, D (Fig. I.) tutti gli altri successivi ad esso, nei quali veniva operata l'inversione delle acque, dovevano produrre nei respettivi influenti laterali e rigurgiti e ristagni, e quindi la bassa campagna adiacente ai tronchi medesimi restar doveva soggetta alle inondazioni delle acque. In tal guisa dalla Goletta di Chiani verso Chiusi progredì quel vasto impadulamento che rese la Val di Chiana presso tanti Scrittori antichi (fra i quali Dante, Fazio degli Uberti ec. ec.) famosa per la frigidezza del suolo , e per l' infezione del clima. Che tali calamitose condizioni non affliggessero quella provincia avanti che per l' inversione delle acque si producesse l' accennato impadulamento, viene con molti documenti istorici comprovato. In fatti fino al secolo XIII. non se ne trova indizio, ed è interessante il riportarne quì una prova col seguente squarcio di una dissertazione sulla Via Cassia, pubblicata già dal celebre letterato Aretino Cav. Lorenzo Guazzesi.

§. 74. Ecco come egli si esprime „ Che la strada di Firen-
„ ze Arezzo e Chiusi per andare a Roma fosse praticata co-
„ munemente ancora nei bassi secoli, me ne porge la sicu-
„ rezza il viaggio che fece per essa il Re Carlo Magno. Da
„ Eginardo, dal Monaco di S. Ipparco, dal Poeta Sassone pres-
„ so il Leibnizio *Rerum Brunsvic*. Tom. II. e da altri Auto-
„ ri riportati da Duchesne nel Tom. II. *De rebus Francorum*,
„ si sa di certo che nell' autunno dell'anno 786. esso partì di
„ Germania per venire in Italia, e che giunto in Firenze vi
„ celebrò il Natale di Cristo; indi volendo portarsi a Roma
„ passò per Arezzo. Abbiamo nell' Ughelli a' Vescovi Aretini
„ la copia di una Bolla di Gentile da Urbino Vescovo nostro
„ nel 1480. in cui si racconta la donazione fatta alla Chiesa
„ Aretina dell' antichissimo Anfiteatro che era fuori della Cit-
„ tà. Vado fissando in quest'anno la di lui venuta in Arezzo,
„ perchè negli altri tre viaggi che fece a Roma si è preva-
„ luto due volte della Via Flaminia ed una della via Aure-
„ lia lungo le spiagge del mare. Il trovarsi nell' ottavo se-
„ colo di Cristo nominato il Duca di Chiusi mi fa giustamen-
„ te supporre che la detta città si mantenesse ancora nel suo
„ splendore, e che non meno conservata dovesse essere quel-
„ la Via Regia per cui si perveniva all' istessa, lo che molto

,, tempo a mio credere continuò. Ed in conferma di questo
,, l'anno 1068. Papa Alessandro II. decidendo una controversia
,, tra il Vescovo di Chiusi ed il suo Clero ci porge con
,, una sua Bolla il sicuro riscontro di questo viaggio, come
,, pure in altro luogo del Documento medesimo riportato e
,, dall' Ughelli e nel Bollario Romano; essendo sicuro che il
,, detto Pontefice tenne sempre la stessa via per Arezzo, trovandosi
,, una Bolla di lui che conferma i privilegj del nostro
,, Vescovo data nel Vescovado Aretino l'anno 1070. La strada
,, della Val di Chiana nelle antiche carte dei nostri archivj
,, trovasi chiamata comunemente la *Via Romea* in segno
,, che per l'istessa si andava a quella Città; e ricordano Malaspina
,, al Cap. 66. della sua cronica scrivendo dei tempi
,, di Arrigo III. dice, che allora la Via di Roma era per Figline
,, ad Arezzo. Nel 1110 poi Arrigo V. Imperatore quando
,, da Firenze andò a trovare il Pontefice Pasquale II. prese
,, parimente la detta strada, come lo addita Donizzone Monaco
,, nella vita della Contessa Matilde. Da Firenze giunse
,, in Arezzo dove per una causa di poco rilievo, al dire di
,, Ottone Frisingense, e dal medesimo Donizzone fece grave
,, danno a quella Città bruciandola e rovinandola. È vero che
,, il detto Scrittore non ci dà il minuto dettaglio del viaggio
,, dell' Imperatore fino a Roma, riportando solamente che vi
,, giunse ai primi dì di Febbrajo, ma da un antico processo
,, di lite che si conserva nel celebre Archivio di questa Canonica,
,, si ricava che nel partire da Arezzo prese la strada
,, del Tegoleto che è appunto quella della Val di Chiana; e
,, l'Abate Urspergense ci dice che da Arezzo giunse ad Acquapendente,
,, cioè verso Bolsena ed il fiume Paglia; nel che
,, non poteva seguitare se non l'antica strada di Chiusi. Finalmente
,, nel 1178. un testimone che si esamina nella famosa
,, lite tra il Vescovo di Siena e di Arezzo (per ciò che
,, si deduce da un antico Ruotolo del nominato Archivio)
,, racconta di aver trovato il Vescovo che ritornava da Roma
,, alla sua residenza verso Sutri e Caprancia; lo stesso cam-

„ mino tenne Papa Gregorio X. quando nel 1273. andò a Fi-
„ renze e si trattenne in Mugello presso il Cardinale Otta-
„ viano degli Ubaldini, e così avrebbe fatto nel suo ritorno
„ da Lione se non finiva i suoi giorni in Arezzo nel 1276,
„ onde a buon conto dal sesto secolo di Roma fino al 1200.
„ tanti di Cristo, si praticava comunemente una tale strada,
„ e ciò che mi fa maggior forza, nei tempi ancora d' inver-
„ no: segno evidente che la pianura della Val di Chiana non
„ era in quei tempi una profonda palude ed uno stagno.

§. 75. Ma dopo la metà del XIII secolo principiò a rendersi impraticabile la bassa pianura di Val di Chiana, e sebbene come sopra abbiamo veduto, avessero luogo per parte del governo di Firenze alcuni parziali provvedimenti contro le inondazioni che seguivano presso ad Arezzo, nondimeno il resto della Valle verso Chiusi rimase circa a due secoli quasi totalmente negletto. Nel 1551. si principiò seriamente a pensare al risanamento di quella provincia, e gli uomini più celebri nella scienza delle acque sono stati più o meno tutti successivamente nel caso di occuparsene. Il più famoso discepolo del Galileo, Evangelista Torricelli gettò i primi semi dallo sviluppo dei quali poteva ottenersi la desiderabile prosperità. Esisteva allora nella longitudinale direzione della Valle da Arezzo verso Chiusi un' informe canale sostenuto all'estremità sua vicino ad Arezzo da una pescaja murata di circa 20. braccia d' altezza, la quale tuttora vedesi, presso al punto D (Fig. I.). Da questa pescaja traboccavano le acque superiori dopo essersi espanse per la pianura di quasi tutta Val di Chiana; e quindi nacque l' idea di bonificare tutto il paese per essicazione rovinando quella Pescaja, e procurando in conseguenza un più rapido corso alle acque rigurgitate e stagnanti.

§. 76. Un sì fatto progetto fu accolto con plauso, ed ancora con forza sostenuto da tutti coloro i quali avevano nella materia in questione quella istessa limitata sagacità, con cui alcuni Medici calcolano l' azione utile dei medicamenti sopra le parti malate del corpo umano senza occuparsi delle contemporanee dannose impressioni di essi sopra le parti sane. Ma il Torricelli che sapeva fare il bilancio tra le une e le altre influenze si oppose all' esecuzione del progetto. La discussione fu lunga e non senza inquietudini per quel grande Uomo, avendo allora il partito opposto acquistato numerosi e validi seguaci, perchè come si osserva in fisica attaccarsi spesso la malattia, e la sanità non mai, così il mal animo e l' errore trovano accoglienza e si diffondono rapidamente, ma la benevolenza e la verità non sono contagiose.

§. 77. Il Torricelli dimostrò che rovinata la pescaja, ed in conseguenza depresso lo sbocco del canale longitudinale, non si sarebbe per questo liberata la pianura dalle inondazioni come supponevasi, perchè a tale uopo era necessario che tutta la pianura stessa diventasse pendente verso Arezzo. Ma la pianura in questione era in quei tempi quasi tutta orizzontale o pendente in un senso opposto verso Chiusi, onde, diceva il Torricelli, sarebbe stato necessario che potesse rendersi declive tutta la Valle togliendone una fetta, che principiando sottilissima verso il Lago di Chiusi venisse successivamente ad ingrossarsi avvicinandosi ad Arezzo. Senza di questo, aggiungeva egli, la rovina della pescaja e la conseguente accennata pendenza del canale avrebbe poco o punto facilitato lo smaltimento delle acque, ed avrebbe altronde prodotto molti gravi inconvenienti.

§. 78. Quindi è che il Torricelli quantunque dichiarasse di non vedere un radicale rimedio per ovviare ai disordini di quelle acque, nondimeno valutò l' utilità di profittare delle deposizioni terrose che i ristagnanti torrenti laterali farebbero avanti di scaricarsi nel canale, onde rialzare qualche porzione della superficie della campagna diminuendone in tal guisa le inondazioni. In una parola invece di bonificare il paese abbassando la superficie delle acque, vide potersi renderne sana qualche parte con elevare la superficie del terreno.

§. 79. Giova quì riportare ciò che io osservai a pag. 193. delle mie Memorie = Quello che fa maraviglia, e che dimo-

,, stra come i più grandi ingegni, felici discopritori delle più
,, recondite verità vi si aggirino talvolta attorno senza veder-
,, le, mi pare che sia questo: il Torricelli aveva insinuato
,, l' utilità delle colmate, aveva conosciuto che la Valle non
,, poteva sanarsi senza toglierle la sua orizzontalità e costituir-
,, la alquanto pendente verso l' Arno; or perchè piuttosto che
,, rappresentare la necessità di levarne una fetta più grossa
,, verso Arezzo che verso Chiusi, lo che egli stesso ricono-
,, sceva impossibile all' atto, non esporre la necessità di to-
,, gliere l' orizzontalità della Valle disponendo a dovere le
,, colmate, e posando sopra la Valle stessa una fetta di terra
,, più grossa verso Chiusi che verso Arezzo, la quale costi-
,, tuisse la nuova superficie della campagna nella desiderata
,, pendenza verso l' Arno? Ciò era ben lontano dall' impossi-
,, bilità, e con questa semplice rettificazione d' idee proba-
,, bilmente non avrebbe riguardato i mali della Valle come
,, *irremediabili*. Forse era la costituzione del locale troppo
,, lontana dal poter far nascere il pensiero di buonificarla a
,, tal segno, e forse fu questa una di quelle rare sonnolenze
,, per cui talvolta i sommi Uomini indennizzano l' umanità
,, della superiorità che hanno sopra di essa. Profittiamo frat-
,, tanto delle circostanze, le quali ci offrono la facilità di giun-
,, gere agevolmente all' istesso fine, a cui il Torricelli, sen-
,, za fermarsi ad indicarne la strada, conobbe per altro che
,, doveva unicamente tendersi per ottenere la generale buoni-
,, ficazione di Val di Chiana. =

§. 80. Nell' anno 1664. si trattennero in Val di Chiana Gio. Domenico Cassini e Vincenzo Viviani in qualità quello di Matematico Pontificio, e questo Granducale. La commissione ad essi affidata era di comporre le discussioni vertenti fra i due Stati sopra il destino da darsi a quella parte delle acque della Chiana che presso Chiusi invadevano ora le terre Pontificie, ora la Toscana. Sebbene la qualità delle loro incombenze non portasse questi due grandi Uomini ad occuparsi della generale buonificazione della Provincia, nondimeno la riunione di essi formò nell' istoria delle Scienze un'epoca da non obliarsi, e che ha meritato d'essere illustrata dall' elegantissima penna del celebre Sig. Senatore Mengotti.

§. 81. Il Matematico Perelli insieme con l'Ingegnere Salvetti visitarono nel 1769. la Val di Chiana, ed allora comparve la prima autentica livellazione dalla Chiusa dei Monaci fino al Callone di Valiano. In seguito di questa fu regolarizzato il longitudinale Canal Maestro, fu ridotto di un solo arco il Ponte H (Fig. II.) onde l' acqua del Canale potesse più facilmente passarvi, e furono eseguite altre operazioni tendenti ad impedire che il canal maestro restasse ingombrato con i depositi dei suoi influenti. In seguito nel 1780. il concordato fatto tra le Corti di Roma e di Firenze tolse come sopra si è accennato alla Val di Chiana l'imbarazzo delle acque d' incerta direzione, mentre con un grande argine di separazione costruito presso alla Città di Chiusi restarono definitivamente distinte le acque tributarie dal Tevere da quelle che d' allora in poi si scaricherebbero nell' Arno.

§. 82. Poco dopo questa epoca principiò la Val di Chiana a perdere l'aspetto di un paese impraticabile, e comparve come non potè comparire al Torricelli, cioè suscettibile di una generale e stabile buonificazione. In fatti legando insieme la teorìa del ramo Teverino dell' Arno con la declività che il Torricelli giudicò essere indispensabile che avesse tutta la Valle a fine di liberarla dalle acque, e con la possibilità di ottenere sì fatta declività, distribuendo le colmate in guisa da imporre sopra tutta la bassa pianura uno strato di terra gradatamente più alto verso Chiusi che verso Arezzo, si venne a formare un sistema generale onde tutte quelle acque fossero regolate in guisa da concorrere insieme al totale buonificamento della Provincia.

§. 83. Io non saprei quì dare un cenno di questo sistema più conciso di quello che trovasi a pag. 280. nell' epilogo delle mie Memorie sopra la Val di Chiana nei termini seguenti = Si è con sentimenti diversi ed effetti varj provve-

„ duto al risanamento di quasi tutta quella porzione della
„ Valle che è tra Arezzo e Chiusi. Giunti poi a seminare il
„ grano quasi per ogni luogo, ove ondeggiavano prima le
„ canne palustri, si è dimandato, cosa faremo delle torbe fin
„ ora benefiche degl' influenti della Chiana, le quali torbe
„ d' ora innanzi sembravano onerose ed imbarazzanti. Diversi
„ sono stati i progetti a seconda dei diversi interessi e delle
„ diverse vedute di ciaschedun proponente; e fra gli altri
„ molte volte è tornato in campo quello di deprimere lo
„ sbocco del Canal Maestro procurando al Canale stesso tanta
„ cadente nel fondo del suo alveo quanta ne conviene ad
„ un fiume che debba ricevere e smaltire acque torbide, con
„ che è stato creduto potersi introdurre i torbidi influenti nel
„ canale stesso per liberarsi dalle cure e dal dispendio delle
„ colmate. Ma che questo partito non sia per produrre ancora
„ tanta felicità, l' abbiamo rilevato abbastanza, e perciò
„ la titubanza intorno al regolamento idraulico della Valle,
„ ed al fato che le sovrasta in seguito, resterebbe in tutto il
„ suo peso. Ma rimontando al principio generale dell' antico
„ corso della Chiana, del suo impaludamento, e del moderno
„ inverso corso di essa, quali altre idee non si presentano,
„ che partiti subitanei temporanei provvedimenti e dubbiose
„ operazioni? In fatti chi trasportava prima le torbe degl' influenti
„ della Chiana? L' acqua d' Arno che animava il corso
„ di essa, ed impediva le deposizioni delle grosse materie
„ sopraccennate. Tornino adunque queste grosse materie torbide
„ a ricercare quella forza che le teneva sollevate, e sia
„ a carico dell' Arno che le abbandonò il trasportarle e dirigerle;
„ ma in qual maniera possiamo aspettarci che sia per
„ accadere questo? Ben facilmente: l' esperienza e la teoria
„ ce ne porgono lusinga. È la natura stessa che inclina a
„ mandare ad effetto tale operazione, e l' arte non ha da far
„ altro che accelerarne il compimento. Il ramo d'Arno che si
„ distendeva per la Val di Chiana riceveva influenti più numerosi
„ e più grossi alquanto lungi dall' antica diramazione che era

,, presso Arezzo; quest'influenti mancando di quella forza che
,, tenea vivo il loro corso verso il Tevere, hanno da depositare
,, le proprie torbe; queste deposizioni han da produrre
,, dei rialzamenti di superficie nella Valle più grandi lontano
,, da Arezzo che vicino; dunque la Valle suddetta fin di presso
,, Chiusi verso Arno ha da invertere la sua pendenza antica,
,, e stabilirsi la cadente verso l'Arno stesso. Per ora la
,, giacitura della Valle è presso che orizzontale, dunque le
,, acque torbe non possono correre lungh'essa liberamente,
,, ancorchè il canale che longitudinalmente la fende, abbia
,, l'alveo alquanto inclinato ma capace soltanto d'ammettere
,, acque depurate dalle grosse materie, o come diconsi
,, chiare; seguano adunque i recinti che l'arte ha immaginati
,, per le deposizioni più regolate dei torbidi torrenti, i quali
,, lateralmente discendono da ambe le parti nel basso della
,, Valle, e per mezzo di questi recinti abbiano frattanto le
,, acque maniera di correre per quella campagna ove prima
,, stagnavano, e tornino per ora all'Arno le acque sole senza
,, le torbe degli antichi influenti di esso. Quando poi queste
,, torbe opportunamente depositate e disposte abbiano costituita
,, l'adequata pendenza della Valle, e stabilita a se medesime
,, una giacitura di campagna naturalmente incapace di
,, trattenerle, corrano ancor esse miste con l'acque dei respettivi
,, torrenti liberamente nel Canal Maestro divenuto
,, un fiume tributario dell'Arno; ed ecco allora ricondotte
,, all'Arno le torbe trasportate dalle acque nel basso tratto della
,, Valle interposto, per esempio, tra Arezzo e Chiusi, e stabilita
,, la natural floridezza di quella provincia.

§. 84. Con queste vedute in fatti si procedeva, avendomi coerentemente alle medesime il Gran Duca Leopoldo di gloriosa memoria destinato a sopraintendere alle bonificazioni di Val di Chiana, motivando nel suo relativo Motuproprio dell' anno 1788. la creazione di tale nuovo impiego dal considerare = *che l'importante articolo delle colmate* (in Val di Chiana) *esige di esser regolato e diretto con vedute uniformi* ec.

Ma le successive politiche vicende rallentando le misure Amministrative impedirono che l'esperienza confermasse la teorìa con la prontezza di un esito decisivo e felice. Questa fortuna era serbata all'epoca ridente, in cui tra i caldi voti e gli applausi l'Augusto Ferdinando III. fu dalla Pace ricondotto nel bel Paese ove sortì la cuna ed il Trono. Abituato egli a percorrere le provincie toscane per la prosperità delle quali la sua presenza è come per i fiori nascenti l'alito ruggiadoso della primavera, non tardò a conoscere l'assidua assistenza che esigevasi dai lavori di Val di Chiana. Instituì adunque una locale Direzione idraulica ed amministrativa destinando alla testa di essa il Sig. Federigo Capei già Presidente del Magistrato del Pò in Piacenza, e conosciuto per lumi, zelo e probità.

§. 85. Allora in pochi anni accadde ciò che da molto tempo si augurava ma non si conseguiva. La livellazione generale della pianura da me nel 1789. riguardata come indispensabile onde conoscere l'altezza degli strati di terra che in ogni punto conveniva imporre a fine di ottenere che la Valle invertesse la sua pendenza, fu abilmente eseguita dal Sig. Ingegnere Manetti, il quale oltre al profilo longitudinale esteso per 45. miglia, e da lui con le sopracitate carte pubblicato nell'anno decorso, ha ancora eseguito molte livellazioni trasversali, onde fatto conto degli antichi capisaldi e della livellazione Salvetti occorsa nel 1769., la precedente giacitura della superficie di tutta la Valle può paragonarsi con quella attuale, e determinarsi quanto manca tuttora a quella finale posizione a cui deve esser portata per mezzo delle colmate.

§. 86. Queste in oggi finalmente si conducono come esige la vera teorìa delle medesime: (la qual teorìa con il corredo di opportuno disegno è stata esposta dal Sig. Ingegner Manetti nella precitata collezione di Carte Idrauliche da lui nell'anno scorso pubblicate, e non con il solo oggetto di rendere coltivabile un suolo frigido ma inoltre con le sopraccennate vedute d' indurre in tutta la Valle quella regolare declività onde essa debbe ripetere la sua perfetta buonificazione.

§. 87. In questi sei ultimi anni il progresso della buonificazione è stato così rapido che già se si eccettuino i laghi di Chiusi e di Montepulciano, i quali per altro si vanno ancor essi ogni dì ristringendo, non esistono più in tutta la vasta pianura che è tra Chiusi ed Arezzo, terreni frigidi e permanentemente inondati e vi sono ottime strade ruotabili; di maniera che se fosse adesso il luogo di darne un esteso ragguaglio, si potrebbe dimostrare che quel territorio non è stato mai così fertile e sano come è al presente. In fatti ancora dai nomi di varj luoghi della pianura si deduce la sua antica condizione in gran parte boschiva, e si sa che vi erano dei cignali, onde non frequente come adesso dovette esser ivi la popolazione, la quale si ricovrava nei molti castelli e villaggi che rovinosi e quasi abbandonati veggonsi adesso nelle alture onde la pianura è costeggiata. Inoltre le vestigia che si sono trovate dell'antica via Cassia si scostano dal centro della Valle e giacciono sulle falde delle colline, dal che si deve indurre ciò che altri riscontri rendono indubitato, cioè che il ramo Teverino dell'Arno passando da Arezzo verso Chiusi lungi dall' essere perfettamente incanalato spagliava lateralmente, ed impediva per conseguenza che una strada ruotabile fendesse longitudinalmente quella pianura nelle sue più basse parti come segue ai nostri giorni.

§. 88. Di maniera che si può in questo momento realizzare ciò che nell'anno 1805. accennai in una mia Memoria inserita nel Tom. XII. della nostra Società, cioè che per andare da Firenze a Roma non è più necessario passare o per la via di Siena la montagna di Radicofani, o per la via di Perugia la montagna di Somma, mentre per il Val d' Arno si entra in Val di Chiana, e percorrendo la medesima sempre in pianura si giunge a Chiusi, ed indi sotto Città della Pieve ed Orvieto, si va a ritrovare la strada Romana verso Viterbo conformemente a quanto si è veduto nel precedente §. 74. che ebbe luogo fino al duodecimo secolo dell' Era nostra. Il Sig. Prony nell' anno 1810. valutò questo progetto così meritevole d'attenzione che ne dette pubblica notizia in Francia per regola degl' Ingegneri incaricati allora delle interne comunicazioni d' Italia. Si combina di più in oggi che dalla Città di Siena si giunge in Val di Chiana per due strade, cioè o per la Via Lauretana a Valiano, o per la strada tre anni sono ultimata in Val di Biena, al Monte San Savino, onde passando da Firenze a Roma per la parte di Siena i viaggiatori combinerebbero la doppia sodisfazione di visitare quella rispettabile ed insigne Città, e di evitare la montagna di Radicofani e le incomode e solitarie adiacenze del Ponte a Centino.

§. 89. Quantunque dalla parte di Chiusi i rialzamenti del suolo prodotti dalle colmate sieno molto sensibili, nondimeno la Valle non ha ancora acquistato tutta la necessaria declività. Conviene adunque nelle parti meridionali di essa continuare a tenere in colmata i torrenti, ed obbligarli a depositare le loro torbe nelle basse terre adiacenti al canale maestro, introducendo in esso le loro acque quanto è possibile chiarificate, procurando in tal guisa di portare la campagna alla conveniente elevazione, ed il canale a quelle condizioni che permettano di costituirlo un fiume capace di ricevere e smaltire non solo acque chiare, ma ancora acque mescolate con grosse materie terrose e ghiarose.

§. 90. Non così accade nella parte boreale della Valle. Quì, come sopra accennammo, i torrenti che influiscono nel canale sono di piccola portata, il rialzamento del terreno deve esser nullo presso l' estremità del Canal Maestro, e gradatamente maggiore nell'allontanarsene e sempre inferiore a quello della parte meridionale verso Chiusi. Di maniera che per tralasciare in quella parte boreale l' uso delle colmate, ed introdurre senza che sieno chiarificate le acque degl' influenti nel canal maestro, non vi era altro ostacolo se non la pendenza di esso minore di quella necessaria per tener vivo il corso delle acque torbide. A togliere un tale ostacolo è stata diretta l'operazione eseguita all'estremità predetta dello stesso canal maestro nella Pescaja detta dei Monaci.

§. 91. Inoltrata in oggi con tanta celerità la buonificazione della provincia, non esistono più quelle cause che dovettero fin quì trattenere dal deprimere un poco quella Pescaja, ed aumentare in tal guisa la pendenza del Canale. Nondimeno invece di abbassare la cresta della Pescaja è stato creduto più conveniente praticare sulla parte destra di essa uno Scaricatore fornito di cateratte la cui soglia inferiore è circa due braccia e mezzo più bassa della cresta della Pescaja. Con questo si è sicuri in ogni caso di riattivare il ritegno totale della Pescaja tenendo chiuse le cateratte, ed al contrario tenendo queste aperte si è già ottenuto nelle mediocri e nelle grandi piene una sensibile salutarissima accelerazione nelle acque che scorrono per il tronco del canale intercetto tra la Pescaja ed il così detto Porto di Brolio, nella lunghezza di circa miglia 12. e gl' influenti del tronco istesso possono direttamente scaricarvisi senza essere stati prima in colmata chiarificati, mentre quel tronco di canale ha sufficiente attitudine a sgombrare ancora le tenui ghiare che quei piccoli influenti ponno introdurvi, ed esso tronco di canale è ridotto alla condizione di fiume influente dell' Arno.

§. 92. Procedendo con l'istesso sistema si porterà alla debita elevazione la Valle tra Brolio e l' argine di separazione, e si andrà corrispondentemente abbassando o la soglia dello Scaricatore o la cresta della Pescaja, e gl'influenti del respettivo tronco meridionale del canal maestro senza aver più bisogno di chiarificarsi in colmata, direttamente vi si introdurranno, ed ancor esso tronco perverrà alla condizione di fiume come è ridotto oggi il tronco boreale esistente tra la Pescaja ed il Porto di Brolio.

§. 93. In tal guisa mentre l' antica Geografia ci mostra un ramo Teverino dell' Arno, e quella dei sei o sette secoli ultimamente trascorsi un vasto padule in Val di Chiana, la

Geografia moderna può in essa Valle tra le due Città di Chiusi ed Arezzo segnare per l' Arno un nuovo fiume influente che traversa in lunghezza di circa quaranta miglia una vasta, e bella campagna Toscana, la quale senza esagerazione può chiamarsi di nuovo acquisto considerando la salubrità del clima, l' ubertà dei prodotti e le facili comunicazioni territoriali onde quelle felici e crescenti Popolazioni sono state recentemente arricchite.

§. 94. Fu preferito l' accennato Scaricatore ad una modica depressione della cresta della Pescaja, non solo perchè in affare così delicato non è mai troppa la circospezione, ma per un altro motivo ancora che ha relazione con i progressi dell'Idrometria. I capi saldi che l' anno 1789. nella seconda parte delle mie Memorie proposi dovessero stabilirsi a convenienti distanze lungo il canal maestro, avevano per oggetto oltre alla regolare manutenzione del canale istesso, di esplorare la cadente del pelo d' acqua nelle piccole, mediocri, e grandi piene. Conosciuto l' andamento di queste tre linee descritte dal pelo d' acqua, subito che fosse seguita una depressione nella Pescaja dovevasi fare il paragone delle tre linee dello stesso pelo d' acqua, e le variazioni che si sarebbero trovate come che dipendenti dall' abbassamento dello sbocco del canale, non avrebbero mancato di offrire interessanti lumi idrometrici.

§. 95. Furono in fatti con zelo ed intelligenza eseguite diverse osservazioni dal Sig. Ingegnere Gugliantini addetto alla Val di Chiana, e dal Sig. Luigi Mazzoni deputato alla manutenzione del canal maestro, ma la mancanza di una amministrativa direzione residente nella Provincia, e le sopraccennate condizioni dei tempi distrassero dall' assiduità necessaria onde accelerarne i lavori, e dilazionarono la depressione della Pescaja.

§. 96. Oggi la costruzione del nostro Scaricatore pone sott' occhio più estese vedute di utilità. In fatti oltre al facilitare mirabilmente un esito pronto alle acque spagliate in occasioni di grandi escrescenze, come in quest' anno stesso si è potuto senza equivoco riscontrare, dà il comodo di fare esperienze più istruttive di quelle che dalla depressione della Pescaja si sarebbero ottenute. Ognuno può convincersene considerando che, in primo luogo, tenute aperte le cateratte viene lo sbocco ad esser depresso come, presso a poco, se depressa fosse la cresta della Pescaja, e quindi il paragone con le osservazioni Gugliantini e Mazzoni può instituirsi. In secondo luogo il giuoco delle cateratte aperte o chiuse dà il comodo ogni volta che insolite circostanze non vi si appongano, di deprimere lo sbocco del Canale, e di rialzarlo ad arbitrio momentaneamente.

§. 97. Per dare un cenno di sì fatte esperienze premetto che esse hanno luogo in quel tratto dell' alveo della Chiana intercetto tra la Pescaja o Callone di Valiano e la Pescaja detta dei Monaci. Questo alveo è lungo 24. miglia con una larghezza ragguagliata di braccia 35. Posto ciò suppongasi una piena nell' alveo della Chiana, e si facciano agli stabiliti capi saldi le osservazioni che indicano la linea del pelo d' acqua, e continuando la piena nell' istesso grado (del che alla superiore Pescaja di Valiano può aversi un gran riscontro che dee riunirsi con l' ispezione dello stato delle acque negl' influenti inferiori) si aprono le cateratte, cioè si deprime lo sbocco del Canale, e con questa depressione di conosciuta quantità si osserva agli stessi capi saldi qual variazione viene ad indursi nella linea del pelo d' acqua, e nella velocità media di essa. Al contrario invertendo l' esperienza si fanno con le cateratte aperte le osservazioni ai Capi saldi, e conosciuta la linea del pelo d'acqua si chiudono le cateratte riscontrando la variazione che quindi nell' accennata linea del pelo d' acqua vien prodotta.

§. 98. Per i coltivatori della scienza delle acque è inutile fermarsi a dar minuto conto di quanto per così fatte esperienze possa venire illustrata l' Idrometria, mentre in tutta l' istoria di questa Scienza è certo che non si trova esempio di esperienze fatte con tanto comodo e con tanta ampiezza di mezzi come sono quelli che offre un alveo così grande e nel tempo stesso suscettibile di essere a volontà momentaneamente alzato e depresso nel suo sbocco.

§. 99. Senza contare le osservazioni che avranno luogo allorchè aumenterà lo sbassamento dello Scaricatore, o della Pescaja, è chiaro che ancor le esperienze ammissibili dallo stato attuale delle cose compariranno di sommo interesse per molti articoli, e specialmente per i seguenti: cioè l'aumento delle velocità nelle acque correnti per la depressione dello sbocco; la lunghezza del tronco superiore in cui si risente tale aumento di velocità; la distanza a cui si estendono i rigurgiti occasionati dalle Pescaje, ed i rapporti tra le velocità medie e la pendenza del pelo nelle acque correnti. Nelle aggiunte alla seconda edizione delle mie Memorie sopra la Val di Chiana si troverà l' enumerazione di tutti gli elementi somministrati da sì fatte esperienze. Vi si troverà ancora la descrizione dello Scaricatore fabbricato con solidità corrispondente all' importanza del suo oggetto.

§. 100. Le massime idrauliche regolatrici di questa grande bonificazione sono oggi stabilite e sanzionate da lunga serie di felici successi. Il sistema amministrativo onde attivare la pratica di quelle massime, dopo l' iniziativa datane dal Gran Duca Leopoldo, (Vedasi il §. 84.) e la Direzione locale modernamente istituita, non lascia più in dubbio la sua utile influenza, mentre in pochi anni si è conseguito ciò che da molto tempo si aveva soltanto in espettativa. Tutte le acque nella parte toscana della Valle obbediscono oggi alla legge impostagli di scaricarsi nell' Arno. Dalla parte di Tramontana si è già ridotto a condizione di fiume capace di trasportare le ghiare dei suoi influenti un lungo tronco del canale che fende longitudinalmente la Valle, mentre il rimanente tronco di esso canale dalla parte di Mezzogiorno non può ricevere per ora altro che acque chiarificate. Ancor questo tronco meridionale per poco tempo che si continuino le colmate cangierà le condizioni di canale in quello di fiume, e l' opera sarà compita. Quel paese allora avrà una prosperità stabile venendo finalmente sottratto all'ambiguo fato o di rendere ogni dì migliori le sue condizioni mediante un assidua assistenza, o di tornar palustre restando negletto. Sebbene adunque siano oggi fuor di luogo a tal uopo scientifiche ed amministrative discussioni, resta sempre al Genio benefico che regge il freno dei toscani destini lusinghiera espettativa di gloria e di plausi, mentre in breve periodo di tempo possono condursi a maturità tutti i frutti del prezioso favore accordato dalla Sovranità largamente alla Scienza.

§. 101. Uno di essi frutti comparisce sino da ora in piena maturità, e consiste nell' ingrandimento che ne ha ricevuto il paese fertile e commerciante nella parte superiore della Toscana. Infatti prescindendo dalla strada Regia che va a Perugia il territorio Aretino era separato dal confine Pontificio per 20. miglia di inospite montagne a Levante, e per circa miglia 40. di paduli impraticabili a Mezzogiorno. Oggi con la nuova strada costruita fino a San Sepolcro, e con le buonificazioni di Val di Chiana questo vuoto di circa novecento miglia quadrate viene abilitato al pari di ogni più colto paese a tutte le pratiche sociali ed ai complicati rapporti di commercio. Quindi è che Arezzo ha cangiato di condizioni, mentre vi mettono foce liberamente le Valli d' Arno, di Biena, di Chiana e di Tevere, i numerosi abitatori delle Città e Terre in esse Valli situate necessariamente vi concorrono, e per conseguenza invece di potere come per il passato esser considerata qual Città di confine, trovasi essa nel centro di una vasta Provincia di recente conquista. Tale conquista non costò nè lacrime, nè sangue, offrendo al contrario un ridente prospetto che consola tutti coloro i quali scevri di passioni oscure sanno felicitarsi dell' altrui felicità.

Ital. T.° XIX. pag. 526.

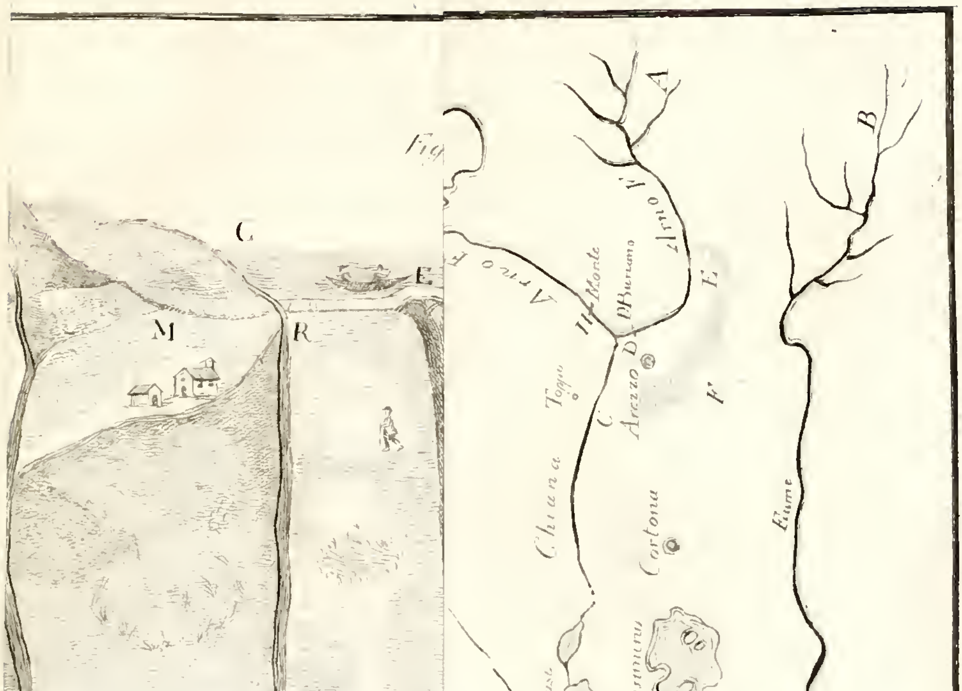


Fig.
G
E
M
R
S
A
B
Arno F.
Arno F.
Monte
P. Buriano
H
D
E
C
Arezzo
Poggio
Chiana
F
Cortona
Fiume
Chiusi
Lago Trasimeno
Chiana
Tevere
Paglia F.
Orvieto
Fiume
Tevere

Tav. VII Mem di Matem Soc Ital T° XIX pag 526

Tramontana

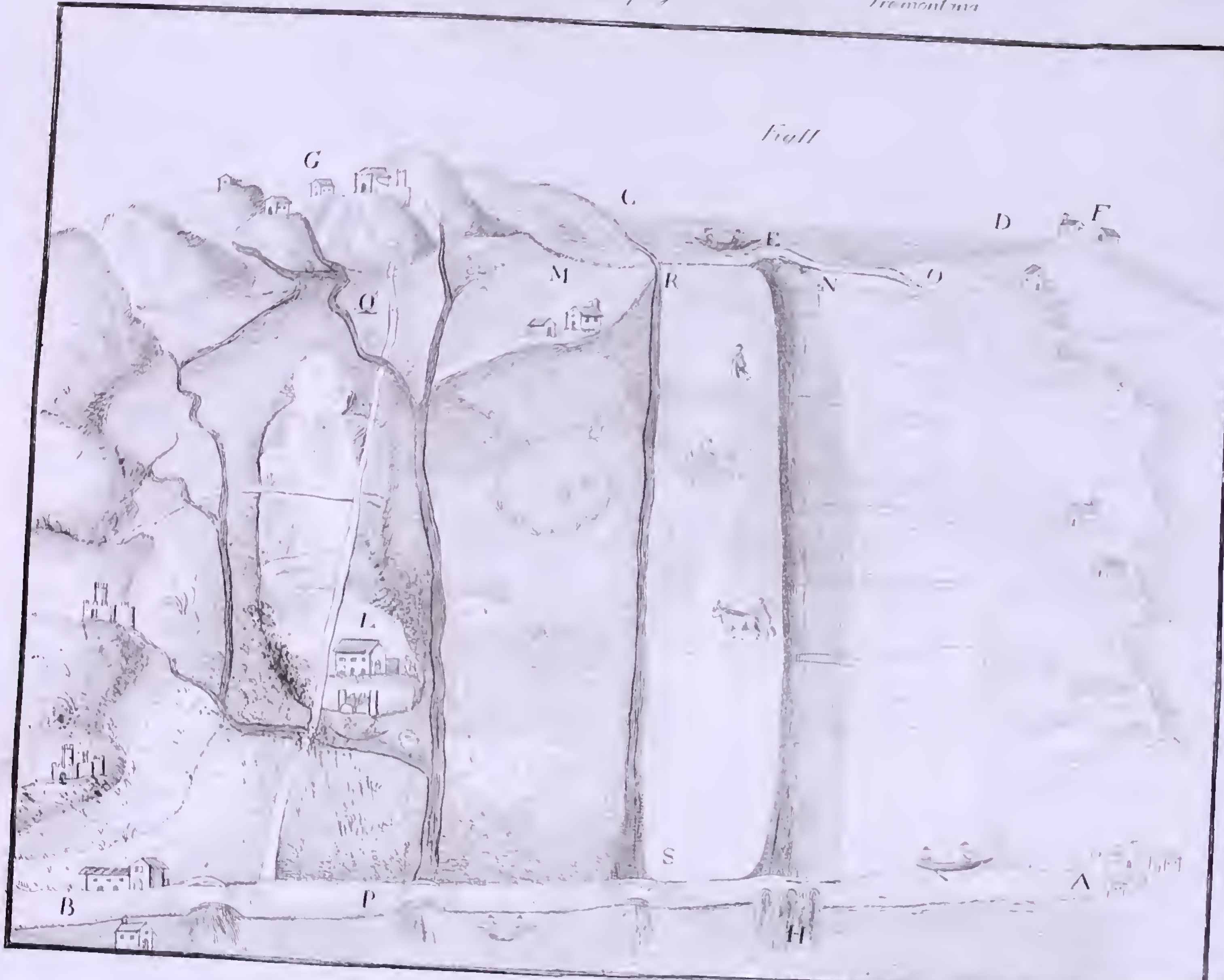
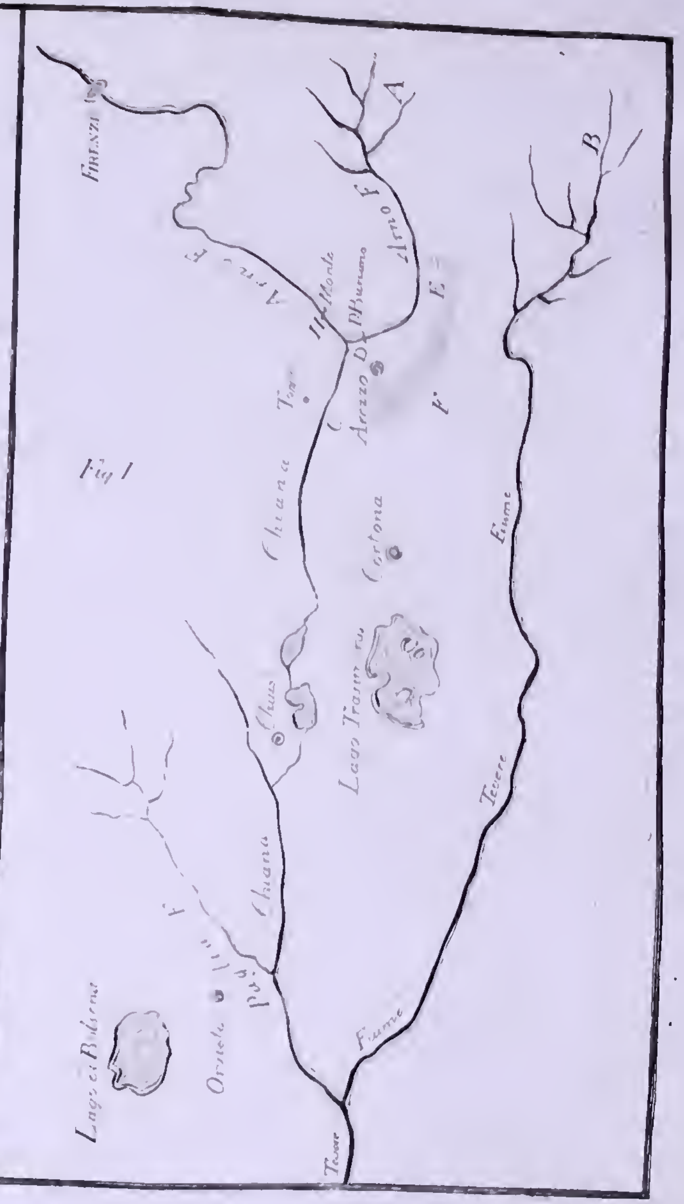


Fig II
G
C
D
F
E
R
N
O
M
Q
L
S
A
B
P
H


Firenze
Arno F
Arno F
A
B
H Monte
P. Buriano
E
D
Arezzo
C
F
Fig I
Chiana
Cortona
Lago Trasimeno
Chiusi
Chiana
Paglia F
Orvieto
Lago di Bolsena
Fiume
Tevere
Fiume
Tevere

Mezzogiorno

SULLA STEREOMETRIA

MEMORIA

DEL SIG. PROFESSOR

ANTONIO MARIA BORDONI

Ricevuta adì 3. *Febbrajo* 1823.

1. Vi sono molti corpi le cui sezioni piane perpendicolari ad una retta individuata hanno le aree funzioni algebraiche razionali intere delle loro distanze da un medesimo punto; e tra essi alcuni ve ne sono pei quali in queste funzioni il maggior esponente della distanza non supera tre: il celebre Torricelli, il Sig. Rossi Amatis, ed il Prof. Brunacci dimostrarono per questi ultimi corpi, come tutti sanno, la singolare ed utile proprietà, che il volume di una qualunque di quelle loro porzioni che sono intercette fra due delle anzidette sezioni, eguaglia il prodotto di una terza parte della distanza di queste medesime sezioni estreme, per la semisomma delle loro aree insieme al doppio di quella della sezione equidistante da esse: io poi dimostrai in altra occasione, che questa proprietà è esclusiva ai soli corpi da essi contemplati; ed ora mi propongo di esporre e dimostrare pei primi dei suddetti corpi, cioè per quelli le cui sezioni hanno le aree funzioni algebraiche razionali intere qualsivogliono delle distanze che hanno i loro piani da un medesimo punto, alcune proprietà analoghe a quelle dimostrate da essi loro pel caso particolare sopra indicato.

Il vantaggio che può trarre sì la teorica che la pratica da queste nuove proprietà, e le singolarità loro insieme a quelle delle considerazioni analitiche che occorrono nella trattazione di esse, mi fanno sperare che non ispiacerà questo mio lavoro.

2. Si immagini la porzione di un corpo intercetta tra due sue sezioni piane parallele una delle quali sia individuata, e l' altra indeterminata, e la cui area sia funzione algebraica razionale ed intera qualsivoglia della sua distanza dalla prima: si chiami x questa distanza che ha il piano di quest' ultima cioè da quello della prima, e si rappresenti la sua area colla funzione

$$f(x)=a+a'x+a''x^2+a'''x^3+\ldots\ldots+\overset{(n)}{a}\,x^n,$$

dove le a, a', a'', a''', . . . $\overset{(n)}{a}$ sono altrettanti costanti, e la n anch' essa costante e numero intero positivo.

3. Incominciaremo a parlare de' valori che debbono avere le $(n+1)$ costanti

$$\mathrm{B},\ \mathrm{A}',\ \mathrm{A}'',\ \mathrm{A}'''.\ .\ .\ .\ .\ \overset{(n)}{\mathrm{A}},$$

perchè il prodotto della x pel polinomio

$$\mathrm{B}f(o)+\mathrm{A}'f\left(\frac{x}{n}\right)+\mathrm{A}''f\left(\frac{2x}{n}\right)+\mathrm{A}'''f\left(\frac{3x}{n}\right)+\ldots+\overset{(n)}{\mathrm{A}}f(x)$$

eguagli il volume di quella porzione del corpo in quistione, che è intercetta fra le sue due sezioni sopra nominate, cioè fra quelle le aree delle quali sono espresse dalle $f(o)$, $f(x)$; vale a dire incominceremo a scoprire quali parti si debbono prendere delle aree

$$f(o),\ f\left(\frac{x}{n}\right),\ f\left(\frac{2x}{n}\right),\ f\left(\frac{3x}{n}\right),\ldots f\left(\frac{n-1}{n}x\right),\ f(x)$$

delle $(n+1)$ sezioni fatte al corpo ed equidistanti l'una dall'altra, affinchè nel prodotto della somma delle parti

$$\mathrm{B}f(o),\ \mathrm{A}'f\left(\frac{x}{n}\right),\ \mathrm{A}''f\left(\frac{2x}{n}\right),\ \mathrm{A}'''f\left(\frac{3x}{n}\right),\ldots\ \overset{(n-1)}{\mathrm{A}}f\left(\frac{n-1}{n}x\right),\overset{(n)}{\mathrm{A}}f(x)$$

delle aree delle medesime per la distanza delle due estreme, che hanno per aree $f(o)$, $f(x)$, si abbia il volume della porzione suddetta del corpo; risultamento che può riescire vantaggioso in varie occasioni tanto della pratica quanto della teorica.

4. Essendo il volume della porzione che abbiamo di mira la primitiva della $f(x)$ che si annulla colla variabile x medesima, e però eguaglia

$$ax+\frac{a'}{2}x^2+\frac{a''}{3}x^3+\frac{a'''}{4}x^4+\ldots\ldots+\frac{a^{(n)}}{n+1}x^{n+1},$$

la presente quistione si ridurrà a determinare i valori delle

$$B,\ A',\ A'',\ A''',\ldots\ldots A^{(n)},$$

che rendono indipendentemente dalla x la quantità

$$x\left(Bf(0)+A'f\left(\frac{x}{n}\right)+A''f\left(\frac{2x}{n}\right)+A'''f\left(\frac{3x}{n}\right)+\ldots\ldots+A^{(n)}f(x)\right)$$

eguale alla

$$x\left(a+\frac{a'}{2}x+\frac{a''}{3}x^2+\frac{a'''}{4}x^3+\ldots\ldots\ldots+\frac{a^{(n)}}{n+1}x^n\right),$$

ovvero che soddisfanno l' equazione

$$Bf(0)+A'f\left(\frac{x}{n}\right)+A''f\left(\frac{2x}{n}\right)+\ldots\ldots+A^{(n)}f(x)$$

$$=a+\frac{a'}{2}x+\frac{a''}{3}x^2+\ldots\ldots\ldots+\frac{a^{(n)}}{n+1}x^n,$$

indipendentemente dalla x medesima.

Sostituendo in questa equazione in luogo delle quantità

$$f(0),\ f\left(\frac{x}{n}\right),\ f\left(\frac{2x}{n}\right),\ f\left(\frac{3x}{n}\right),\ldots\ldots f\left(\frac{n-1}{n}x\right),\ f(x)$$

i loro valori, che sono ordinatamente

$$a,\ a+\frac{a'}{n}x+\frac{a''}{n^2}x^2+\frac{a'''}{n^3}x^3+\ldots\ldots+\frac{a^{(n)}}{n^n}x^n,$$

$$a+\frac{2a'}{n}x+\frac{2^2a''}{n^2}x^2+\frac{2^3a'''}{n^3}x^3+\ldots\ldots+\frac{2^na^{(n)}}{n^n}x^n,$$

$$a+\frac{3a'}{n}x+\frac{3^2a''}{n^2}x^2+\frac{3^3a'''}{n^3}x^3+\ldots\ldots+\frac{3^na^{(n)}}{n^n}x^n,$$

. . . .

. . . .

$$a+\frac{na'}{n}x+\frac{n^2a''}{n^2}x^2+\frac{n^3a'''}{n^3}x^3+\ldots\ldots+\frac{n^na^{(n)}}{n^n}x^n,$$

ed eguagliando tra loro i coefficienti delle simili potenze delle x si ottengono $n+1$ equazioni, che facilmente si riducono alle seguenti

$$(1)\ldots B+A'+A''+A'''+A'^{v}+\ldots+A^{(n)}=1\,,$$

$$(2)\ldots\; A'+2\,.\,A''+3\,.\,A'''+4\,.\,A'^{v}+\ldots+n\,.\,A^{(n)}=\frac{n}{2}\,,$$

$$(3)\ldots\; A'+2^2\,.\,A''+3^2\,.\,A'''+4^2\,.\,A'^{v}+\ldots+n^2\,.\,A^{(n)}=\frac{n^2}{3}$$

$$(4)\ldots\; A'+2^3\,.\,A''+3^3\,.\,A'''+4^3\,.\,A'^{v}+\ldots+n^3\,.\,A^{(n)}=\frac{n^3}{4}$$

$$(5)\ldots\; A'+2^4\,.\,A''+3^4\,.\,A'''+4^4\,.\,A'^{v}+\ldots+n^4\,.\,A^{(n)}=\frac{n^4}{5}$$

. . . .

. . . .

$$(n)\ldots\; A'+2^{n-1}A''+3^{n-1}A'''+4^{n-1}A'^{v}+\ldots+n^{n-1}A^{(n)}=\frac{n^{n-1}}{n}\,,$$

$$(n+1)\ldots A'+2^{n}A''+3^{n}A'''+4^{n}A'^{v}+\ldots+n^{n}A^{(n)}=\frac{n^{n}}{n+1}$$

le quali sciolte rispetto alle B, A', A'', A''', A'^{v}, ... $A^{(n)}$, daranno i valori cercati di queste quantità, cioè quei valori che renderanno l' espressione

$$x\left(Bf(0)+A'f\left(\frac{x}{n}\right)+A''f\left(\frac{2x}{n}\right)+A'''f\left(\frac{3x}{n}\right)+\ldots+A^{(n)}f(x)\right)$$

identica alla

$$ax+\frac{a'}{2}x^2+\frac{a''}{3}x^3+\frac{a'''}{4}x^4+\ldots\ldots+\frac{a^{(n)}}{n+1}\,x^{n+1}\,.$$

5. Prima di intraprendere la soluzione delle $n+1$ equazioni quì sopra esposte, si osservi che in esse non vi sono le a, a', a'', a''', . . . $a^{(n)}$, ciò che insegna che i valori richiesti delle

$$B,\ A',\ A'',\ A''',\ \ldots\ A^{(n)}$$

debbono essere indipendenti dalle prime, cioè che queste ultime avranno gli stessi valori qualunque siano $a, a', a'', a''', \ldots a^{(n)}$

coefficienti che entrano nella funzione $f(x)$: proprietà singolare e sommamente utile.

6. Incominciaremo a determinare le $A', A'', A''', \ldots A^{(n)}$ mediante le equazioni (2), (3), (4), . . . $(n+1)$, e poscia troveremo la B ricorrendo alla (1) che è la prima delle esposte.

Sottraendo i membri della equazione (2) dai corrispondenti della (3) si ha una equazione il cui primo membro è

$$1.2A''+2.3.A'''+3.4A^{\prime v}+\ldots+(n-1)nA^{(n)}\ ;$$

così sottraendo i membri delle (3), (4), (5), ... (n) ordinatamente dai corrispondenti delle (4), (5), . . . $(n+1)$ si hanno delle equazioni i primi membri delle quali sono

$$1.2^2\ .\ A''+2.3^2\ .\ A'''+3.4^2\ .\ A^{\prime v}+\ldots\ldots+(n-1)n^2\ .\ A^{(n)}\ ,$$

$$1.2^3\ .\ A''+2.3^3\ .\ A'''+3.4^3\ .\ A'+\ldots\ldots+(n-1)n^3\ .\ A^{(n)}\ ,$$

. . . .

. . . .

$$1.2^{n-1}A''+2.3^{n-1}A'''+3.4^{n-1}A^{\prime v}+\ldots\ldots+(n-1)n^{n-1}A^{(n)}\ .$$

Similmente, moltiplicando la prima di queste equazioni trovate per *due* e sottraendo i membri della risultante dai corrispondenti della seconda di queste medesime equazioni, se ne ottiene una, il cui primo membro consiste nel polinomio

$$1.2.3A'''+2.3.4A^{\prime v}+\ldots\ldots+(n-2)(n-1)nA^{(n)}:$$

così moltiplicando la seconda, terza, quarta . . . . . penultima per *due*, e sottraendo i membri delle risultanti ordinatamente dai corrispondenti della terza, quarta, . . . ultima si ottengono altre $n-3$ equazioni i primi membri delle quali consistono nei polinomj

$$1.2.3^2\ .\ A'''+2.3.4^2\ .\ A^{\prime v}+\ldots\ldots+(n-2)(n-1)n^2\ .\ A^{(n)}\ ,$$

$$1.2.3^3\ .\ A'''+2.3.4^3\ .\ A^{\prime v}+\ldots\ldots+(n-2)(n-1)n^3\ .\ A^{(n)}\ ,$$

. . . .

. . . .

$$1.2.3^{n-2}A'''+2.3.4^{n-2}A^{\prime v}+\ldots\ldots+(n-2)(n-1)n^{n-2}A^{(n)}\ .$$

In terzo luogo, moltiplicando per *tre* la prima, seconda, terza, . . . penultima di queste ultime equazioni, e sottraendo i membri delle risultanti rispettivamente dai primi delle seconda, terza, quarta, ... ultima, si trovano $n-3$ equazioni i primi membri delle quali risultano

$$1.2.3.4 \;.\; A^{(\text{iv})} + 2.3.4.5 \;.\; A^{(\text{v})} + \ldots . + (n-3)(n-2)(n-1)n \;.\; A^{(n)},$$

$$1.2.3.4^2 \;.\; A^{(\text{iv})} + 2.3.4.5^2 \;.\; A^{(\text{v})} + \ldots . + (n-3)(n-2)(n-1)n^2 \;.\; A^{(n)},$$

$$1.2.3.4^3 \;.\; A^{(\text{iv})} + 2.3.4.5^3 \;.\; A^{(\text{v})} + \ldots . + (n-3)(n-2)(n-1)n^3 \;.\; A^{(n)},$$

. . . .

$$1.2.3.4^{n-3} \; A^{(\text{iv})} + 2.3.4.5^{n-3} \; A^{(\text{v})} + \ldots . + (n-3)(n-2)(n-1)n^{n-3} \; A^{(n)} \,.$$

Così moltiplicando per *quattro* i membri della prima, seconda, terza, . . . penultima di quest' ultimo sistema d'equazioni, e sottraendo i membri delle risultanti dai corrispondenti della seconda, terza, quarta, . . . ultima del medesimo sistema, si hanno $n-4$ equazioni nelle quali non vi sono le A', A'', A''', A^{iv}, ed i loro primi membri sono

$$1.2.3.4.5 \;\; A^{(\text{v})} + 2.3.4.5.6 \;\; A^{(\text{vi})} + \ldots + (n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n \;\; A^{(n)},$$

$$1.2.3.4.5^2 \;\; A^{(\text{v})} + 2.3.4.5.6^2 \;\; A^{(\text{vi})} + \ldots + (n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n^2 \;\; A^{(n)},$$

. . . .

$$1.2.3.4.5^{n-4} \; A^{(\text{v})} + 2.3.4.5.6^{n-4} \; A^{(\text{vi})} + \ldots + (n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n^{n-4} \; A^{(n)} :$$

e moltiplicando queste, dalla prima sino alla penultima, per *cinque* e sottraendo le risultanti correlativamente dalle seconda, terza, . . . ultima, si ottiene un nuovo sistema di $(n-5)$ equazioni nelle quali mancano le A', A'', A''', A^{iv}, A^{v}: e così continuando $(n-1)$ volte, trovasi una equazione nella quale vi è la sola incognita $A^{(n)}$, ed il cui primo membro consiste nel prodotto

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \ldots . (n-2)\,(n-1)nA^{(n)}.$$

7. Esaminando come sono formati i primi membri delle prime equazioni costituenti i sistemi che si sono ottenuti elimi-

nando le A'; A', A''; A', A'', A'''; ec. facilmente si comprenderà che, i primi membri delle prime equazioni dei sistemi penultimo, antepenultimo, ec. saranno

$$1.2.3.5..(n-1)A^{(n-1)}+2.3.4.5\ldots nA^{(n)},$$

$$1.2.3.4..(n-2)A^{(n-2)}+2.3.4\ldots(n-1)A^{(n-1)}+3.4.5\ldots nA^{(n)},$$

$$1.2.3..(n-3)A^{(n-3)}+2.3.4..(n-2)A^{(n-2)}+3.4\ldots(n-1)A^{(n-1)}+4.5\ldots nA^{(n)},$$

$$\text{ec.}\qquad\qquad \text{ec.}\qquad\qquad \text{ec.}$$

in guisa che, denominati P, P', P'', P''', . . . i secondi membri di queste medesime equazioni esse consisteranno nelle seguenti

$$1.2.3.4\ldots nA^{(n)}=P,$$

$$1.2.3.4\ldots(n-1)A^{(n-1)}+2.3.4\ldots nA^{(n)}=P',$$

$$1.2.3.4\ldots(n-2)A^{(n-2)}+2.3.4\ldots(n-1)A^{(n-1)}+3.4\ldots nA^{(n)}=P'',$$

$$1.2.3.4\ldots(n-3)A^{(n-3)}+2.3\;4..(n-2)A^{(n-2)}+3.4..(n-1)A^{(n-1)}+4.5\ldots nA^{(n)}=P''',$$

$$\text{ec.}\qquad\qquad \text{ec.}\qquad\qquad \text{ec.}$$

le quali danno le

$$1.2.3.4.\ldots\ldots(n-1)nA^{(n)}=P,$$

$$1.2.3.4.\ldots\ldots(n-1)\,A^{(n-1)}=P'-P,$$

$$1.2.3.\ldots\ldots(n-2)\,A^{(n-2)}=P''-P'+\frac{1}{2}P,$$

$$1.2.3.\ldots\ldots(n-3)\,A^{(n-3)}=P'''-P''+\frac{1}{2}P'-\frac{1}{2.3}P,$$

$$1.2.\ldots\ldots(n-4)\,A^{(n-4)}=P^{iv}-P'''+\frac{1}{2}P''-\frac{1}{2.3}P'+\frac{1}{2.3.4}P;$$

e però in generale avrassi

$$1.2.3..(n-m)A^{(n-m)}=P^{(m)}-P^{(m-1)}+\frac{1}{2}P^{(m-2)}-\frac{1}{2.3}P^{(m-3)}+\ldots\pm\frac{P}{2.3\ldots m},$$

dove per l'ultimo termine vale il segno + nel caso d'*m* pari e l'altro nel caso di *m* dispari: ed in fine sarà

$$A' = P^{(n-1)} - P^{(n-2)} + \frac{1}{2} P^{(n-3)} - \frac{1}{2.3} P^{(n-4)} + \ldots \pm \frac{P}{2.3.4\,..\,(n-1)}.$$

Quindi le $A', A'', A''', \ldots A^{(n)}$ saranno conosciute, quando si conosceranno le $P, P', P'', P''', \ldots P^{(n-1)}$: vediamo per tanto come si possono determinare queste ultime quantità, che sono i secondi membri delle prime equazioni costituenti i sistemi sopra considerati.

8. Essendo $\frac{n}{2}, \frac{n^2}{3}, \frac{n^3}{4}, \frac{n^4}{5}, \ldots\ldots\ldots \frac{n^n}{n+1}$

gli effettivi secondi membri delle equazioni del primo di detti sistemi, cioè delle (2), (3), (4), ... $(n+1)$, i secondi membri delle $(n-1)$ equazioni costituenti il secondo sistema saranno

$$\frac{n^2}{3} - \frac{n}{2}, \ \frac{n^3}{4} - \frac{n^2}{3}, \ \frac{n^4}{5} - \frac{n^3}{4}, \ \ldots\ldots\ldots \frac{n^n}{n+1} - \frac{n^{n-1}}{n};$$

i secondi membri di quelle che costituiscono il terzo degli stessi sistemi

$$\frac{n^3}{4} - \frac{n^2}{3} - 2\left(\frac{n^2}{3} - \frac{n}{2}\right) = \frac{n^3}{4} - 3\,.\,\frac{n^2}{3} + 2\,.\,\frac{n}{2},$$

$$\frac{n^4}{5} - \frac{n^3}{4} - 2\left(\frac{n^3}{4} - \frac{n^2}{3}\right) = \frac{n^4}{5} - 3\,.\,\frac{n^3}{4} + 2\,.\,\frac{n^2}{3},$$

$$\frac{n^5}{6} - \frac{n^4}{5} - 2\left(\frac{n^4}{5} - \frac{n^3}{4}\right) = \frac{n^5}{6} - 3\,.\,\frac{n^4}{5} + 2\,.\,\frac{n^3}{4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{n^n}{n+1} - \frac{n^{n-1}}{n} - 2\left(\frac{n^{n-1}}{n} - \frac{n^{n-2}}{n-1}\right) = \frac{n^n}{n+1} - 3\,\frac{n^{n-1}}{n} + 2\,\frac{n^{n-2}}{n-1}:$$

quelli del quarto

$$\frac{n^4}{5} - 6\,\frac{n^3}{4} + 11\,\frac{n^2}{3} - 2.3\,\frac{n}{2},$$

$$\frac{n^5}{6} - 6\,\frac{n^4}{5} + 11\,\frac{n^3}{4} - 2.3\,\frac{n^2}{3},$$

ec. ec.

In generale dal quì esposto si comprende che rappresentato il secondo membro della prima equazione dell' x *esimo* sistema con

$$(a) \ldots \frac{n^x}{x+1} - E'_x \frac{n^{x-1}}{x} + E''_x \frac{n^{x-2}}{x-1} - E'''_x \frac{n^{x-3}}{x-2} + \ldots \pm E^{(x-1)}_x \frac{n}{2}.$$

dove le E'_x, E''_x, E'''_x, ec. esprimono quelle funzioni dell'x che sono i coefficienti delle quantità

$$\frac{n^{x-1}}{x},\ \frac{n^{x-2}}{x-1},\ \frac{n^{x-3}}{x-2},\ \text{ec.},$$

il secondo membro della seconda equazione dello stesso x *esimo* sistema d'equazioni sarà

$$(b) \ldots \frac{n^{x+1}}{x+2} - E'_x \frac{n^x}{x+1} + E''_x \frac{n^{x-1}}{x} - E'''_x \frac{n^{x-2}}{x-1} + \ldots \pm E^{(x-1)}_x \frac{n^2}{3},$$

ed il secondo membro della prima equazione del sistema $(x+1)$ *esimo* cioè del seguente rappresentabile da

$$(c) \ldots \frac{n^{x+1}}{x+2} - E'_{x+1} \frac{n^x}{x+1} + E''_{x+1} \frac{n^{x-1}}{x} - E'''_{x+1} \frac{n^{x-2}}{x-1} + \ldots$$

dove i coefficienti E'_{x+1}, E''_{x+1}, E'''_{x+1}, ec. saranno formati coll'$x+1$ come gli E'_x, E''_x, E'''_x, ec. lo sono col semplice x.

Ma stante la legge seguita nel formare i primi membri delle equazioni costituenti i successivi sistemi d'equazioni sopra esposti, dev' essere l'espressione (c) eguale alla (b) meno il prodotto della (a) in x; adunque dovrà essere

$$\frac{n^{x+1}}{x+2} - E'_{x+1} \frac{n^x}{x+1} + E''_{x+1} \frac{n^{x-1}}{x} - E'''_{x+1} \frac{n^{x-2}}{x-1} + \text{ec.}$$

indipendentemente dalle $\frac{n^{x+1}}{x+2}$, $\frac{n^x}{x+1}$, $\frac{n^{x-1}}{x}$, ec. eguale ad

$$\frac{n^{x+1}}{x+2} - E'_x \frac{n^x}{x+1} + E''_x \frac{n^{x-1}}{x} - E'''_x \frac{n^{x-2}}{x-1} + \text{ec.}$$

$$- x \frac{n^x}{x+1} + xE'_x \frac{n^{x-1}}{x} - xE''_x \frac{n^{x-2}}{x-1} + \text{ec.}$$

e per tanto avranno luogo tra le E'_x, E''_x, E'''_x, ec., E'_{x+1}, E''_{x+1}, ec. le equazioni seguenti

$$E'_{x+1} = E'_x + x,\quad E''_{x+1} = E''_x + xE'_x,\quad E'''_{x+1} = E'''_x + xE''_x,\ \text{ec.}$$

le quali somministrano

$$E'_x = \Sigma x,\ E''_x = \Sigma x E'_x,\ E'''_x = \Sigma x E''_x,\ \text{ec.}$$

ovvero $$E'_x = \Sigma x,\ E''_x = \Sigma x \Sigma x,\ E'''_x = \Sigma x \Sigma x \Sigma x,\ \text{ec.}$$

cioè quelle funzioni del numero x che sono i valori dei coefficienti. E'_x, E''_x, E'''_x, ec. Quindi il secondo membro della prima equazione dell' *x esimo* sistema sarà

$$\frac{n^x}{x+1} - \frac{n^{x-1}}{x}\Sigma x + \frac{n^{x-2}}{x-1}\Sigma x\Sigma x - \frac{n^{x-3}}{x-1}\Sigma x\Sigma x\Sigma x + \dots$$

$$\dots\dots \pm \frac{n}{2}\Sigma x\Sigma x\Sigma x \dots \Sigma x\Sigma x,$$

dove per formare il coefficiente d' $\frac{n}{2}$ si debbono eseguire $(x-1)$ integrazioni, le quali danno, determinate che siano opportunemente le costanti, per risultamento finale il semplice prodotto

$$1.2.3.4.\dots(x-2)(x-1).$$

9. Esaminando l' andamento delle operazioni eseguite quì sopra per formare i secondi membri delle equazioni componenti i sistemi loro in considerazione, si comprende facilmente che i coefficienti delle quantità

$$\frac{n^2}{3},\ \frac{n}{2};\ \frac{n^3}{4},\ \frac{n^2}{3},\ \frac{n}{2};\ \frac{n^4}{5},\ \frac{n^3}{4},\ \frac{n^2}{3},\ \frac{n}{2};\ \text{ec.}$$

che entrano a comporre i secondi membri delle prime equazioni dei sistemi medesimi sono eguali ai coefficienti che hanno le

$$a^2,\ a;\ a^3,\ a^2,\ a;\ a^4,\ a^3,\ a^2,\ a;\ \text{ec.}$$

negli sviluppi dei prodotti

$$a(a-1),\ a(a-1)(a-2),\ a(a-1)(a-2)(a-3),\ \text{ec.}$$

e però gli E'_x, E''_x, E'''_x, ec. eguaglieranno i coefficienti che avranno le a^{x-1}, a^{x-2}, a^{x-3}, ec. nello sviluppo del prodotto

$$a(a-1)(a-2)(a-3)\dots(a-x+2)(a-x+1);$$

cioè sarà identica l' equazione seguente

$$a(a-1)(a-2)\dots(a-x+1)=a^{x}-E'_x\,a^{x-1}+E''_x\,a^{x-2}-E'''_x\,a^{x-3}+\text{ec.}$$

da ciò risulta che la E'_x eguaglia la somma dei numeri 1, 2, 3, . . . $(x-1)$; l' E''_x la somma di tutti i prodotti che si possono avere moltiplicando questi medesimi numeri a due a due; l' E'''_x la somma di tutti i prodotti che si hanno moltiplicando gli stessi numeri a tre a tre; ec.; proprietà che somministra un' altra regola facile per costituire gli stessi coefficienti E'_x, E''_x, E'''_x, ec., la quale si poteva desumere dai loro valori trovati altrimenti nel paragrafo precedente.

10. Trovate le funzioni della x, che esprimono le somme delle potenze prime, seconde, terze, ec. dei numeri 1, 2, 3, 4, . . . $(x-2)$, $(x-1)$, col soccorso della notissima proposizione di Newton relativa alle somme delle potenze delle radici di una data equazione, si potranno trovare le funzioni della x medesima rappresentanti le E'_x, E''_x, E'''_x, ec. considerando queste quantità come coefficienti della equazione

$$a^{x-1}-E'_x\,a^{x-2}+E''_x\,a^{x-3}-E'''_x\,a^{x-4}+\dots\pm E_x^{(x-1)}=0:$$

non espongo queste ultime funzioni della x, perchè riescono alquanto complicate, ed anco perchè coll' altro metodo esposto, la loro determinazione riesce più breve di questa, d' altronde comoda, qualora l' n sia individuato, come accadrà appunto nella pratica.

11. Se nella espressione

$$\frac{n^x}{x+1}-E'_x\frac{n^{x-1}}{x}+E''_x\frac{n^{x-2}}{x-1}-E'''_x\frac{n^{x-3}}{x-2}+\dots\pm E_x^{(x-1)}\frac{n}{2}$$

ora interamente conosciuta, si farà x eguale successivamente ad n, $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... si avranno i valori richiesti delle quantità

$$P,\ P',\ P'',\ P''',\ \dots :$$

sono per tanto determinate le n incognite

$$A^{(n)},\ A^{(n-1)},\ A^{(n-2)},\ A^{(n-3)},\ \ldots\ldots A'',\ A';$$

giacchè a ciò non si richiede che le soluzioni delle semplicissime equazioni esposte al fine del paragrafo settimo.

Trovate queste, facilmente colla equazione (1) si potrà avere la B, essendo essa eguale alla unità diminuita della somma delle stesse $A^{(n)}$, $A^{(n-1)}$, $A^{(n-2)}$, ... A'', A'. Quest' ultima medesima incognita, la B, si può anco determinare indipendentemente dalle altre, col combinare le equazioni (1), (2), (3), ... (n) in modo di eliminare le A', A'', A''', ... $A^{(n)}$, eliminazione che riesce facile stante le medesime cose esposte sopra per la determinazione di queste ultime quantità.

12. Esempio. Sia $f(x)=a+a'x+a''x^2+a'''x^3+a^{\text{iv}}x^4$, e si avrà $n=4$, $E'_4=1+2+3=6$, $E''_4=2+3+6=11$, $E'''_4=6$, $E'_3=1+2=3$, $E''_3=2$; ed $E'_2=1$; e però

$$P=\frac{4^4}{5}-6\frac{4^3}{4}+11\frac{4^2}{3}-6\frac{4}{2}=\frac{28}{15},\ P'=\frac{4^3}{4}-3\frac{4^2}{3}+2\frac{4}{2}=4,$$

$$P''=\frac{4^2}{3}-\frac{4}{2}=\frac{10}{3},\ P'''=\frac{4}{2}=2.\ \text{Quindi}$$

$$1.2.3.4\,A^{(4)}=\frac{28}{15},\ 1.2.3\,A^{(3)}=\frac{32}{15},\ 1.2\,A^{(2)}=\frac{4}{15},\ A'=\frac{16}{45};$$

e conseguentemente sarà

$$A^{(4)}=\frac{7}{90},\ A^{(3)}=\frac{32}{90},\ A^{(2)}=\frac{12}{90},\ A^{(1)}=\frac{32}{90},\ B=1-\frac{83}{90}=\frac{7}{90}.$$

Quindi il volume della porzione intercetta fra quelle sezioni di questo corpo, che hanno per aree $f(o)$, $f(x)$ ossia a, ed $a+a'x+a''x^2+a'''x^3+a^{\text{iv}}x^4$, risulterà eguale ad

$$\frac{x}{90}\left(7f(0)+32f\left(\frac{x}{4}\right)+12f\left(\frac{2x}{4}\right)+32f\left(\frac{3x}{4}\right)+7f(x)\right).$$

13. Si ponga nella $f(x)$ in luogo della x il binomio $x-y$, e si ritenga nel risultamento la x come costante e la y variabile; e si denomini $\varphi(y)$ la medesima funzione risultante, la quale sviluppata ed ordinata secondo le potenze crescenti della y si ridurrà ad una della forma

$$a_{,} + a'_{,} y + a''_{,} y^{2} + a'''_{,} y^{3} + \dots + a_{,}^{(n)} y^{n}.$$

Facendo per questa funzione $\varphi(y)$ ciò che si è fatto superiormente per la $f(x)$ si troverebbe che le costanti $\mathrm{B}_{,}$, $\mathrm{A}_{,}$, $\mathrm{A}_{,,}$, $\mathrm{A}_{,,,}$, . . $\mathrm{A}_{(n)}$ che hanno la proprietà di rendere il prodotto

$$y \left(\mathrm{B}_{,} \varphi(0) + \mathrm{A}_{,} \varphi\left(\frac{y}{n}\right) + \mathrm{A}_{,,} \varphi\left(\frac{2y}{n}\right) + \dots \mathrm{A}_{(n)} \varphi(y) \right)$$

eguale ad

$$y \left(a_{,} + \frac{1}{2} a'_{,} y + \frac{1}{3} a''_{,} y^{2} + \frac{1}{4} a'''_{,} y^{3} + \dots + \frac{1}{n} a_{1}^{(n)} y^{n} \right)$$

indipendentemente dalla y sarebbero ordinatamente le stesse B, A', A'', A''', . . . $\mathrm{A}^{(n)}$, siccome è facile a concepirsi per ciò che si è detto al paragrafo quinto; ma d' altronde per essere, nel caso $d'y = x$,

$$\varphi(0) = f(x),\ \varphi\left(\frac{y}{n}\right) = f\left(\frac{n-1}{n} x\right),\ \varphi\left(\frac{2y}{n}\right) = f\left(\frac{n-2}{2} x\right), \dots$$

$$\varphi\left(\frac{n-1}{n} y\right) = f\left(\frac{x}{n}\right),\ \varphi(y) = f(0),\ \text{si ha}$$

$$\mathrm{B}_{,} = \mathrm{A}^{(n)},\ \mathrm{A}_{,} = \mathrm{A}^{(n-1)},\ \mathrm{A}_{,,} = \mathrm{A}^{(n-2)}, \dots \mathrm{A}_{n-1} = \mathrm{A}'',\ \mathrm{A}_{n} = \mathrm{A}';$$

adunque le incognite B, A', A'', A''', . . . sopra cercate eguaglieranno ordinatamente le altre $\mathrm{A}^{(n)}$, $\mathrm{A}^{(n-1)}$, $\mathrm{A}^{(n-2)}$, $\mathrm{A}^{(n-3)}$, . . . delle medesime, vale a dire la B eguaglierà la $\mathrm{A}^{(n)}$, la A' la $\mathrm{A}^{(n-1)}$, la A'' la $\mathrm{A}^{(n-2)}$, ec., dimodochè pel caso d' n dispari rimarranno tutte le quantità B, A', A'', A''', . . . $\mathrm{A}^{(n-2)}$, $\mathrm{A}^{(n-1)}$, $\mathrm{A}^{(n)}$ determinate, quando si conosceranno le sole $\mathrm{A}^{(n)}$, $\mathrm{A}^{(n-1)}$, $\mathrm{A}^{(n-2)}$, . . . $\mathrm{A}^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$; e per quello d' n pari allorchè si conosceranno le $\mathrm{A}^{(n)}$, $\mathrm{A}^{(n-1)}$, $\mathrm{A}^{(n-2)}$, ... $\mathrm{A}^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}$. Un esempio di quest' ultimo caso si può vedere al paragrafo penultimo.

14. Nella quistione sopra trattata si sono supposte indi-

viduate le sezioni fatte al corpo ossia quei punti della retta sulla quale si riportano le x ai quali esse corrispondono, ora passiamo a trattarne una analoga nella quale manchi quest' ultima condizione.

I valori della x corrispondenti alle sezioni intermedie alle $f(o)$, $f(x)$ siano indicati con $a_{,}x$, $a_{,,}x$, $a_{,,,}x$, . . . ; e proponiamci di determinare le B, A', A'', A''', . . . $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$, . . . che rendono la quantità

$$x\left(a+\frac{a'}{2}x+\frac{a''}{3}x^2+\frac{a'''}{4}x^3+\ldots\ldots+\frac{a^{(n)}}{n+1}x^n\right)$$

eguale alla

$$x(\mathrm{B}f(\mathrm{o})+\mathrm{A}'f(a_{,}x)+\mathrm{A}''f(a_{,,}x)+\mathrm{A}'''f(a_{,,,}x)+\ldots);$$

ossia la $a+\frac{a'}{2}x+\frac{a''}{3}x^2+\frac{a'''}{4}x^3+\ldots\ldots+\frac{a^{(n)}}{n+1}x^n$ alla

$$\mathrm{B}f(\mathrm{o})+\mathrm{A}'f(a_{,}x)+\mathrm{A}''f(a_{,,}x)+\ldots\ldots+\mathrm{B}'f(x)$$

indipendentemente dalla x.

15. Ponendo in quest' ultima quantità in luogo delle $f(o)$, $fa_{,}(x)$, $f(a_{,,}x)$, $f(a_{,,,}x)$, . . . i loro valori

$$a,\ a+a'a_{,}x+a''a_{,}^2x^2+a'''a_{,}^3x^3+\ldots+a^{(n)}a_{,}^nx^n,$$

$$a+a'a_{,,}x+a''a_{,,}^2x^2+a'''a_{,,}^3x^3+\ldots+a^{(n)}a_{,,}^nx^n,$$

$$a+a'a_{,,,}x+a''a_{,,,}^2x^2+a'''a_{,,,}^3x^3+\ldots+a^{(n)}a_{,,,}^nx^n,$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$a+a'a_{r}x+a''a_{r}^2x^2+a'''a_{r}^3x^3+\ldots+a^{(n)}a_{r}^nx^n,$$

$$a+a'x\,.\,+a''\,.\,x^2+a'''\,.\,x^3+\ldots+a^{(n)}\,.\,x^n,$$

ed ordinando la risultante secondo le potenze crescenti della x si ha

$$a(\mathrm{B}+\mathrm{A}'+\mathrm{A}''+\mathrm{A}'''+\ldots.+\mathrm{A}^{(r)}+\mathrm{B}')+$$

$$a'(a_{,}\mathrm{A}'+a_{,,}\mathrm{A}''+a_{,,,}\mathrm{A}'''+\ldots.+a_{r}\mathrm{A}^{(r)}+\mathrm{B}')x+$$

$$a''\ (a_{,}^{2}A_{,}+a_{,,}^{2}A''+a_{,,,}^{2}A'''+\ldots\ldots+a_{r}^{2}A^{(r)}+B')x^{2}+$$

$$a'''\ (a_{,}^{3}A'+a_{,,}^{3}A''+a_{,,,}^{3}A'''+\ldots\ldots+a_{r}^{3}A^{(r)}+B')x^{3}+$$

$$a^{\prime v}\ (a_{,}^{4}A'+a_{,,}^{4}A''+a_{,,,}^{4}A'''+\ldots\ldots+a_{r}^{4}A^{(r)}+B')x^{4}+$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$+a^{(n)}(a_{,}^{n}A'+a_{,,}^{n}A''+a_{,,,}^{n}A'''+\ldots\ldots+a_{r}^{n}A^{(r)}+B')x^{n};$$

quindi le quantità B, A', A'', A''', ... $A^{(r)}$, B', $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$, ... a_{r} dovranno soddisfare le equazioni seguenti

(1) ..... $B+A'+\ A''+\ A'''+\ A^{\prime v}+\ldots\ldots+\ A^{(r)}+B'=1$,

(2) ..... $a'\,A'+a_{,,}\,A''+a_{,,,}\,A'''+a_{,v}\,A^{\prime v}+\ldots\ldots+a_{r}\,A^{(r)}+B'=\frac{1}{2}$,

(3) ..... $a_{,}^{2}A'+a_{,,}^{2}A''+a_{,,,}^{2}A'''+a_{,v}^{2}A^{\prime v}+\ldots\ldots+a_{r}^{2}A^{(r)}+B'=\frac{1}{3}$,

(4) ..... $a_{,}^{3}A'+a_{,,}^{3}A''+a_{,,,}^{3}A'''+a_{,v}^{3}A^{\prime v}+\ldots\ldots+a_{r}^{3}A^{(r)}+B'=\frac{1}{4}$,

(5) ..... $a_{,}^{4}A'+a_{,,}^{4}A''+a_{,,,}^{4}A'''+a_{,v}^{4}A^{\prime v}+\ldots\ldots+a_{r}^{4}A^{(r)}+B'=\frac{1}{5}$,

. . . .

. . . .

($n+1$)... $a_{,}^{n}A'+a_{,,}^{n}A''+a_{,,,}^{n}A'''+a_{,v}^{n}A^{\prime v}+\ldots\ldots+a_{r}^{n}A^{(r)}+B'=\frac{1}{n+1}$.

Essendo il numero di queste equazioni eguale ad $n+1$, il numero delle quantità B, A', A'', A''', ... $A^{(r)}$, $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$, ... a_{r}, B' dovrà essere in generale anch' esso non minore di $n+1$; e però nel caso d' n eguale ad 1, 3, 5, 7, ec. cioè numero dispari dovrà esser almeno $r=\frac{n-1}{2}$, giacchè il numero delle $A_{,}$, $a_{,}$, A'', $a_{,,}$, A''', $a_{,,,}$, ... $A^{(r)}$, a_{r} essendo eguale a due volte l' r ossia ad $n-1$, esse insieme alle due B, B' renderanno il numero delle incognite eguale ad $n+1$, cioè allo stesso delle equazioni; nel caso poi di n pari, si potrà ritenere la $r=\frac{n}{2}$, e risulterà evidentemente il numero totale delle incognite eguale ad $n+2$ cioè maggiore di una unità di quello delle equazioni, di maniera che una di esse si potrà ritenere arbitraria.

Dal quì esposto risulta che per esprimere il volume della porzione del corpo intercetta tra le sezioni aventi le aree $f(o)$, $f(x)$ mediante le aree di queste medesime sezioni e di altre intermedie, di queste ne occorreranno in generale un numero non minore di $\frac{n-1}{2}$ nel caso d' n dispari, e non minore di $\frac{n}{2}$ nel caso d' n pari.

Incominciaremo a parlare della determinazione delle

$$\mathrm{B},\ \mathrm{A}',\ a_{\prime},\ \mathrm{A}'',\ a_{\prime\prime},\ \mathrm{A}''',\ a_{\prime\prime\prime},\ \ldots\ \mathrm{A}^{(r)},\ a_{r},\ \mathrm{B}'$$

pel caso d' n numero dispari, e poscia parleremo di esse pel caso d' n pari.

16. Dalle equazioni (2), (3), (4), ... $(n+1)$ esposte nel paragrafo precedente, si elimini la B', e si avranno le $(n-1)$ seguenti

$$a_{\prime}(1-a_{\prime})\mathrm{A}'+a_{\prime\prime}(1-a_{\prime\prime})\mathrm{A}''+a_{\prime\prime\prime}(1-a_{\prime\prime\prime})\mathrm{A}'''+\ldots+a_{r}(1-a_{r})\mathrm{A}^{(r)}=\frac{1}{2.3},$$

$$a_{\prime}^{2}(1-a_{\prime})\mathrm{A}'+a_{\prime\prime}^{2}(1-a_{\prime\prime})\mathrm{A}''+a_{\prime\prime\prime}^{2}(1-a_{\prime\prime\prime})\mathrm{A}'''+\ldots+a_{r}^{2}(1-a_{r})\mathrm{A}^{(r)}=\frac{1}{3.4},$$

$$a_{\prime}^{3}(1-a_{\prime})\mathrm{A}'+a_{\prime\prime}^{3}(1-a_{\prime\prime})\mathrm{A}''+a_{\prime\prime\prime}^{3}(1-a_{\prime\prime\prime})\mathrm{A}'''+\ldots+a_{r}^{3}(1-a_{r})\mathrm{A}^{(r)}=\frac{1}{4.5},$$

. . . .

. . . .

$$a_{\prime}^{n-1}(1-a_{\prime})\mathrm{A}'+a_{\prime\prime}^{n-1}(1-a_{\prime\prime})\mathrm{A}''+a_{\prime\prime\prime}^{n-1}(1-a_{\prime\prime\prime})\mathrm{A}'''+\ldots+a_{r}^{n-1}(1-a_{r})\mathrm{A}^{(r)}=\frac{1}{n(n+1)}:$$

si elimini da queste la A', moltiplicando la prima, seconda, terza, ... penultima per $a_{\prime}$, e sottraendo dalle risultanti ordinatamente la seconda, terza, quarta, . . . ultima, e si avranno le $(n-2)$

$$a_{\prime\prime}(a_{\prime}-a_{\prime\prime})(1-a_{\prime\prime})A''+a_{\prime\prime\prime}(a_{\prime}-a_{\prime\prime\prime})(1-a_{\prime\prime\prime})A'''+\ldots$$
$$\ldots+a_r(a_{\prime}-a_r)(1-a_r)A^{(r)}=\frac{a_{\prime}}{2.3}-\frac{1}{3.4},$$
$$a_{\prime\prime}^2(a_{\prime}-a_{\prime\prime})(1-a_{\prime\prime})A''+a_{\prime\prime\prime}^2(a_{\prime}-a_{\prime\prime\prime})(1-a_{\prime\prime\prime})A'''+\ldots$$
$$\ldots\ldots+a_r^2(a_{\prime}-a_r)(1-a_r)A^{(r)}=\frac{a_{\prime}}{3.4}-\frac{1}{4.5},$$
$$a_{\prime\prime}^3(a_{\prime}-a_{\prime\prime})(1-a_{\prime\prime})A_{\prime\prime}+a_{\prime\prime\prime}^3(a_{\prime}-a_{\prime\prime\prime})(1-a_{\prime\prime\prime})A'''+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+a_r^3(a_{\prime}-a_r)(1-a_r)A^{(r)}=\frac{a_{\prime}}{4.5}-\frac{1}{5.6},$$

. . . .

. . . .

$$a_{\prime\prime}^{n-2}(a_{\prime}-a_{\prime\prime})(1-a_{\prime\prime})A''+a_{\prime\prime\prime}^{n-2}(a_{\prime}-a_{\prime\prime})(1-a_{\prime\prime})A''+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+a_r^{n-2}(a_{\prime}-a_r)(1-a_r)A^{(r)}=\frac{a_{\prime}}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)};$$

così eliminando da queste la A″, dalle nuove risultanti la A‴, la A′ᵛ, e finalmente la $A^{(r-1)}$ si avranno le $(n-r)$ equazioni seguenti

$$a_r(a_{r-1}-a_r)(a_{r-2}-a_r)\ldots.(a_{\prime\prime}-a_r)(a-a_r)(1-a_r)A^{(r)}=D',$$
$$a_r^2(a_{r-1}-a_r)(a_{r-2}-a_r)\ldots.(a_{\prime\prime}-a_r)(a_{\prime}-a_r)(1-a_r)A^{(r)}=D'',$$
$$a_r^3(a_{r-1}-a_r)(a_{r-2}-a_r)\ldots.(a_{\prime\prime}-a_r)(a_{\prime}-a_r)(1-a_r)A^{(r)}=D''',$$

. . . .

$$a_r^{n-r}(a_{r-1}-a_r)(a_{r-2}-a_r)\ldots.(a_{\prime\prime}-a_r)(a_{\prime}-a_r)(1-a_r)A^{(r)}=D^{(n-r)};$$

dove

$$D'=\frac{P^{(r-1)}}{2.3}-\frac{P^{(r-2)}}{3.4}+\frac{P^{(r-3)}}{4.5}-\ldots\mp\frac{P^{(2)}}{(r-1)r}\pm\frac{P^{(1)}}{r(r+1)}\mp\frac{1}{(r+1)(r+2)},$$
$$D''=\frac{P^{(r-1)}}{3.4}-\frac{P^{(r-2)}}{4.5}+\frac{P^{(r-3)}}{5.6}-\ldots\mp\frac{P^{(2)}}{r(r+1)}\pm\frac{P^{(1)}}{(r+1)(r+2)}\mp\frac{1}{(r+2)(r+3)},$$

$$D'' = \frac{P^{(r-1)}}{4.5} - \frac{P^{(r-2)}}{5.6} + \frac{P^{(r-3)}}{6.7} - \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \mp \frac{P^{(2)}}{(r+1)(r+2)} \pm \frac{P^{(1)}}{(r+2)(r+3)} \mp \frac{1}{(r+3)(r+4)},$$

. . . .

$$D^{(n-r)} = \frac{P^{(r-1)}}{(r+2)(r+3)} - \frac{P^{(r-2)}}{(r+3)(r+4)} + \frac{P^{(r-3)}}{(r+4)(r+5)} - \ldots$$

$$\ldots \mp \frac{P^{(2)}}{(n-2)(n-1)} \pm \frac{P^{(1)}}{(n-1)n} \mp \frac{1}{n(n+1)},$$

e le $P^{(r-1)}$, $P^{(r-2)}$, $P^{(r-3)}$, . . . $P^{(2)}$, $P^{(1)}$ che entrano in queste ultime espressioni significano, $P^{(r-1)}$ il prodotto delle $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$, . . . a_{r-1}, $P^{(r-2)}$ la somma dei prodotti che si hanno moltiplicando queste stesse quantità ad $r-2$ ad $r-2$; $P^{(r-3)}$ la somma dei prodotti che hansi moltiplicandole ad $r-3$ ad $r-3$; e finalmente la $P^{(2)}$ la somma dei prodotti che si ottengono moltiplicandole a due a due, e $P^{(1)}$ la loro semplice somma, cioè $a_{,} + a_{,,} + a_{,,,} \ldots + a_{r-1}$.

In fine eliminando la $A^{(r)}$ dalle medesime ultime $n-r$ equazioni trovate risultano le $n-r-1$ ossia r equazioni

$$\frac{S^{(r)}}{2.3} - \frac{S^{(r-1)}}{3.4} + \frac{S^{(r-2)}}{4.5} - \frac{S^{(r-3)}}{5.6} + \ldots$$

$$\ldots \mp \frac{S^{(2)}}{r(r+1)} \pm \frac{S^{(1)}}{(r+1)(r+2)} \mp \frac{1}{(r+2)(r+3)} = 0,$$

$$\frac{S^{(r)}}{3.4} - \frac{S^{(r-1)}}{4.5} + \frac{S^{(r-2)}}{5.6} - \frac{S^{(r-3)}}{6.7} + \ldots$$

$$\ldots \mp \frac{S^{(1)}}{(r+1)(r+2)} \pm \frac{S^{(1)}}{(r+2)(r+3)} \mp \frac{1}{(r+3)(r+4)} = 0;$$

$$\frac{S^{(r)}}{4.5} - \frac{S^{(r-1)}}{5.6} + \frac{S^{(r-2)}}{6.7} - \frac{S^{(r-3)}}{7.8} + \ldots$$

$$\ldots \mp \frac{S^{(2)}}{(r+2)(r+3)} \pm \frac{S^{(1)}}{(r+3)(r+4)} \mp \frac{1}{(r+4)(r+5)} = 0,$$

. . . .

$$\frac{S^{(r)}}{(r+1)(r+2)} - \frac{S^{(r-1)}}{(r+2)(r+3)} + \frac{S^{(r-2)}}{(r+3)(r+4)} - \frac{S^{(r-3)}}{(r+4)(r+5)} + \dots$$
$$\dots \mp \frac{S^{(2)}}{(n-2)(n-1)} \pm \frac{S^{(1)}}{(n-1)n} \mp \frac{1}{n(n+1)} = 0,$$

nelle quali il simbolo $S^{(r)}$ esprime il prodotto delle $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$, ... a_{r-1}, a_{r}; l' $S^{(r-1)}$ la somma dei prodotti che si possono fare moltiplicando le stesse quantità $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$, ... a_{r} ad $r-1$ ad $r-1$; l' $S^{(r-2)}$ la somma di quei prodotti che si possono formare moltiplicando le medesime quantità ad $r-2$ ad $r-2$; in fine $S^{(2)}$ la somma dei prodotti che si avrebbero moltiplicandole a due a due, ed $S^{(1)}$ la semplice loro somma cioè $a_{,}+a_{,,}+a_{,,,}+ \dots + a_{r-1} + a_{r}$.

17. Molte sono le regole che si potrebbero usare per determinare le quantità incognite $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$, ... a_{r} che entrano in queste ultime r equazioni, noi usaremo la seguente: determineremo primieramente con esse le $S^{(r)}$, $S^{(r-1)}$, $S^{(r-2)}$, ... $S^{(2)}$, $S^{(1)}$ funzioni simmetriche delle stesse $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$, ... a_{r}. e poscia dai valori di queste funzioni desumeremo quelli delle medesime quantità incognite. Così varii sono i metodi che si potrebbero seguire onde determinare le funzioni $S^{(r)}$, $S^{(r-1)}$, $S^{(r-2)}$, ... $S^{(2)}$, $S^{(1)}$, noi terremo l' ordinario; vale a dire, elimineremo dalle r equazioni esposte la $S^{(r)}$, dalle $r-1$ risultanti elimineremo la $S^{(r-1)}$, da queste $r-2$ elimineremo la $S^{(r-2)}$, e continueremo sino alla eliminazione delle $S^{(3)}$, $S^{(2)}$, ed avremo una sola equazione nella quale vi sarà la sola funzione $S^{(1)}$.

Onde indicare con facilità le operazioni che faremo per eseguire le anzidette eliminazioni, denominaremo i primi membri delle medesime r esposte equazioni ordinatamente (1), (2), (3), (4), ... (r); i primi membri delle (r—1) risultanti dalla eliminazione della $S^{(r)}$ con ordine (1)', (2)', (3)' (4)', ... (r—1)'; quelli delle equazioni che otterremo eliminando da queste ultime la $S^{(r-1)}$ ordinatamente (1)'', (2)'', (3)'', ... (r—2)''; e così di seguito.

18. Si formino le equazioni

$4(2)-2(1)=0, 5(3)-3(2)=0, 6(4)-4(3)=0, \ldots (r+2)(r)-r(r-1)=0,$ si dividano le risultanti per *due*, e si avranno le

$$-\frac{S^{(r-1)}}{3.4.5}+\frac{2S^{(r-2)}}{4.5.6}-\frac{3S^{(r-3)}}{5.6.7}+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\pm\frac{(r-1)S^{(1)}}{(r+1)(r+2)(r+3)}\mp\frac{r}{(r+2)(r+3)(r+4)}=0,$$

$$-\frac{S^{(r-1)}}{4.5.6}+\frac{2S^{(r-2)}}{5.6.7}-\frac{3S^{(r-3)}}{6.7.8}+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\pm\frac{(r-1)S^{(1)}}{(r+2)(r+3)(r+4)}\mp\frac{r}{(r+3)(r+4)(r+5)}=0,$$

$$-\frac{S^{(r-1)}}{5.6.7}+\frac{2S^{(r-2)}}{6.7.8}-\frac{3S^{(r-3)}}{7.8.9}+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\pm\frac{(r-1)S^{(1)}}{(r+3)(r+4)(r+5)}\mp\frac{r}{(r+4)(r+5)(r+6)}=0,$$

. . . .

$$-\frac{S^{(r-1)}}{(r+1)(r+2)(r+3)}+\frac{2S^{(r-2)}}{(r+2)(r+3)(r+4)}-\frac{3S^{(r-3)}}{(r+3)(r+4)(r+5)}+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\pm\frac{(r-1)S^{(1)}}{(n-2)(n-1)n}\mp\frac{r}{(n-1)n(n+1)}=0,$$

che sono quelle i cui primi membri si sono denominati ordinatamente (1)', (2)', (3)', ... (r—1)': si formino le equazioni $6(2)'-3(1)'=0$, $7(3)'-4(2)'=0$, ... $(r+3)(r-1)'-r(r-2)'=0$, si dividano le risultanti per *tre*, e si avranno le

$$\frac{1.2S^{(r-2)}}{4.5.6.7}-\frac{2.3S^{(r-3)}}{5.6.7.8}+\ldots\pm\frac{(r-2)(r-1)S^{(1)}}{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}\mp\frac{(r-1)r}{(r+2)(r+3)(r+4)\,r+5)}=0,$$

$$\frac{1.2S^{(r-2)}}{5.6.7.8}-\frac{2.3S^{(r-3)}}{6.7.8.9}+\ldots\pm\frac{(r-2)(r-1)S^{(1)}}{(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)}\mp\frac{(r-1)r}{(r+3)(r+4)(r+5)(r+6)}=0,$$

. . . .

$$\frac{1.2S^{(r-2)}}{(r-1)r(r+1)(r+2)}-\frac{2.3S^{(r-3)}}{r(r+1)(r+2)(r+3)}+\ldots\pm\frac{(r-2)(r-1)S^{(1)}}{(n-3)(n-2)(n-1)n}\mp\frac{(r-1)r}{(n-2)(n-1)n(n+1)}=0,$$

che sono quelle i primi membri delle quali si sono chiamati $(1)''$, $(2)''$, $(3)''$, . . . $(r-2)''$: si formino le equazioni $8(2)''-4(1)''=0$, $9(3)''-5(2)''=0$, ... $(r+4)(r-2)''-r(r-3)''=0$, si dividano le risultanti per *quattro* e si otterranno le $(r-3)$ seguenti

$$-\frac{1.2.3S^{(r-3)}}{5.6.7.8\,9}+\ldots\pm\frac{(r-3)(r-2)(r-1)S^{(1)}}{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)}\mp\frac{(r-2)(r-1)r}{(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)(r+6)}=0,$$

$$-\frac{1.2\,3S^{(r-3)}}{6.7.8.9.10}+\ldots\pm\frac{(r-3)(r-2)(r-1)S^{(1)}}{(r+2)(r+3)(r+4)(r+5)(r+6)}\mp\frac{(r-2)(r-1)r}{(r+3)(r+4)(r+5)(r+6)(r+7)}=0,$$

. . . .

$$-\frac{1.2.3.S^{(r-3)}}{(r-2)(r-1)r(r+1)(r+2)}+\ldots\pm\frac{(r-3)(r-2)(r-1)S^{(1)}}{(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n}\mp\frac{(r-2)(r-1)r}{(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)}=0:$$

così formando le

$$10(2)'''-5(1)'''=0,\ 11(3)'''-6(2)'''=0,\ \text{ec.}$$

e dividendo le risultanti per *cinque*, si hanno $r-4$ equazioni nelle quali vi sono le sole $S^{(r-4)}$, $S^{(r-5)}$, . . . $S^{(2)}$, $S^{(1)}$: ec. ec.

Ora si osservi come sono formate le quantità $(1)'$, $(1)''$, $(1)'''$, ec. cioè i primi membri delle prime equazioni dei sistemi d' equazioni registrate quì sopra, e si concepirà facilmente che la prima delle tre equazioni risultanti dalla eliminazione delle $S^{(r)}$, $S^{(r-1)}$, $S^{(r-2)}$, ... $S^{(5)}$, $S^{(4)}$ dev' esser la

$$\frac{1.2\ldots.(r-3)}{(r-1)r\ldots.(n-4)}S^{(3)}-\frac{2.3\ldots.(r-2)}{r(r+1)\ldots.(n-3)}S^{(2)}+\frac{3.4\ldots.(r-1)}{(r+1)(r+2)\ldots.(n-2)}S^{(1)}$$
$$-\frac{4.5\ldots.r}{(r+2)(r+3)\ldots.(n-1)}=0:$$

che la prima delle due che si ottengono eliminando anco la $S^{(3)}$ è

$$\frac{1.2\ldots(r-2)}{r(r+1)\ldots\ldots(n-2)}\,S^{(2)}-\frac{2.3\ldots\ldots(r-1)}{(r+1)(r+2)\ldots(n-1)}\,S^{(1)}+\frac{3.4.\ldots\ldots r}{(r+2)(r+3)\ldots\ldots n}=0:$$

ed infine che la risultante della eliminazione della $S^{(2)}$ da queste ultime sarà la seguente

$$\frac{1.2.3.\ldots(r-1)}{(r+1)(r+2)\ldots\ldots(n-1)n}\,S^{(1)}-\frac{2.3.4.\ldots\ldots r}{(r+2)(r+3)\ldots n(n+1)}=0.$$

19. Denominisi Q la quantità $\frac{2.3.4.\ldots\ldots r}{(r+2)(r+3)\ldots n(n+1)}$ e si avrà

$$\frac{1.2.3.\ldots(r-1)}{(r+1)(r+2)\ldots(n-1)n}\,S^{(1)}=Q:$$

si elimini dalla penultima equazione esposta nel paragrafo precedente la $S^{(1)}$ mediante quest' ultima, e si avrà

$$\frac{1.2.3\ldots(r-2)}{r(r+1)\ldots(n-2)}\,S^{(2)}=nQ-\frac{n+1}{2}Q=\frac{n-1}{2}Q:$$

si eliminino le $S^{(1)}$, $S^{(2)}$ dalla antepenultima equazione esposta nel medesimo paragrafo precedente col soccorso delle due quì trovate, e si avrà

$$\frac{1.2.3\ldots(r-3)}{(r-1)r\ldots(n-4)}\,S^{(3)}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}Q-\frac{n(n-1)}{2}Q+\frac{n(n+1)}{2.3}Q,\ \text{ossia}$$

$$\frac{1.2.3\ldots(r-3)}{(r-1)r\ldots(n-4)}\,S^{(3)}=\frac{(n-2)(n-3)}{2.3}Q.$$

Così eliminando le $S^{(3)}$, $S^{(2)}$, $S^{(1)}$ dalla prima di quelle che si avrebbero mediante la eliminazione delle $S^{(r)}$, $S^{(r-1)}$, ... $S^{(6)}$, $S^{(5)}$ dalle prime del paragrafo antecedente, si trova

$$\frac{1.2.3\ldots(r-4)}{(r-2)(r-1)\ldots(n-6)}\,S^{(4)}=\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{2.3.4}Q.$$

Vale a dire hanno luogo le equazioni seguenti

$$\frac{1.2.3\ldots(r-1)}{(r+1)(r+2)\ldots n}\,S^{(1)}=Q,$$

$$\frac{1.2.3\ldots(r-2)}{r(r+1)\ldots(n-2)}\,S^{(2)}=\frac{n-1}{2}Q,$$

$$\frac{1.2.3\ldots.(r-3)}{(r-1)r\ldots.(n-4)}\ S^{(3)}=\frac{(n-2)(n-3)}{2.3}\ Q,$$

$$\frac{1.2.3\ldots.(r-4)}{(r-2)(r-1)\ldots..(n-6)}\ S^{(4)}=\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{2.3.4}\ Q,$$

$$\frac{1.2.3\ldots.(r-5)}{(r-3)(r-2)\ldots.(n-8)}\ S^{(5)}=\frac{(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)}{2.3.4.5}\ Q,$$

ec. ec.

la legge secondo la quale procedono queste equazioni è sì semplice che io credo inutile il dichiararla.

20. Ponendo nelle ultime equazioni quì esposte in luogo della Q il suo valore, e desumendo dalle risultanti i valori delle $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, ec. si trova

$$S^{(1)}=\frac{r}{2},\ S^{(2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{(r-1)r}{2r+1},\quad S^{(3)}=\frac{1}{2}\ \frac{r(r-1)}{2.3}\cdot\frac{(r-2)(r-1)r}{2r(2r+1)},$$

$$S^{(4)}=\frac{1}{2}\ \frac{r(r-1)(r-2)}{2.3.4}\cdot\frac{(r-3)(r-2)(r-1)r}{(2r-1)2r(2r+1)},$$

$$S^{(5)}=\frac{1}{2}\ \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{2.3.4.5}\cdot\frac{(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r}{(2r-2)(2r-1)2r(2r+1)},$$

$$S^{(6)}=\frac{1}{2}\ \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)}{2.3.4.5.6}\cdot\frac{(r-5)(r-4)(r-3)(r-2)(r-1)r}{(2r-3)(2r-2)(2r-1)2r(2r+1)},$$

. . . .

$$S^{(r-2)}=\frac{1}{2}\frac{r(r-1)(r-2)\ldots5.4}{2.3\ldots(r-2)}\cdot\frac{3.4.5\ldots.(r-1)r}{(r+5)\ldots2r(2r+1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{r(r-1)}{2.3}\cdot\frac{3.4.5\ldots(r-1)r}{(r+5)\ldots2r(2r+1)}.$$

$$S^{(r-1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{2}\cdot\frac{2.3.4\ldots.(r-1)r}{(r+4)\ldots.2r(2r+1)},$$

$$S^{(r)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1.2.3.4\ldots.(r-1)r}{(r+3)\ldots\ldots2r(2r+1)}.$$

21. Essendo $S^{(1)}$ la somma delle quantità $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$, ... a_r; $S^{(2)}$ la somma di tutti i prodotti che si possono fare moltiplicando queste medesime quantità a due a due; $S^{(3)}$ la somma dei loro prodotti che si hanno moltiplicandole a tre a tre;

e finalmente $S^{(r)}$ il loro prodotto $a_{,}\, a_{,,}\, a_{,,,} \ldots a_{r}$; i valori di queste medesime quantità, la ricerca dei quali forma lo scopo attuale, saranno gli r valori della α dati dalla equazione seguente

$$\alpha^{r} - S^{(1)}\alpha^{r-1} + S^{(2)}\alpha^{r-2} - S^{(3)}\alpha^{r-3} + \ldots \mp S^{(r-1)}\alpha \pm S^{(r)} = 0.$$

Si chiamino $\alpha_{,}$, $\alpha_{,,}$, $\alpha_{,,,}, \ldots \alpha_{r}$ le radici di questa equazione, e suppongansi ordinate secondo le rispettive grandezze cioè

$$\alpha_{,} < \alpha_{,,} < \alpha_{,,,} < \ldots < \alpha_{r-1} < \alpha_{r}:$$

occorrendo terremo le $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}, \ldots a_{r}$ ordinatamente eguali alle $\alpha_{,}$, $\alpha_{,,}$, $\alpha_{,,,}, \ldots \alpha_{r}$.

22. Ora che conosciamo i valori delle r incognite $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}, \ldots a_{r}$ passiamo a determinare le altre r; A', A'', A''', ... $A^{(r)}$, non che le due B, B'. Abbiamo veduto sopra che eliminando dalle equazioni (2), (3), (4), ... $(r+1)$ le A', A'', A''', ... $A^{(r-1)}$ si ottiene la

$$a_{r}(a_{r-1} - a_{r})(a_{r-2} - a_{r}) \ldots (a_{,,} - a_{r})(a_{,} - a_{r})(1 - a_{r})A^{(r)} = D';$$

Così eliminando dalle stesse equazioni le quantità

$$A',\ A'',\ A''', \ldots\ldots,\ A^{(r-3)},\ A^{(r-2)},\ A^{(r)};$$

$$A',\ A'',\ A''', \ldots\ldots,\ A^{(r-3)},\ A^{(r-1)},\ A^{(r)};$$

. . . .

$$A',\ A'',\ A'^{v}, \ldots\ldots,\ A^{(r-3)},\ A^{(r-1)},\ A^{(r)};$$

$$A',\ A''',\ A'^{v}, \ldots\ldots,\ A^{(r-3)},\ A^{(r-1)},\ A^{(r)};$$

$$A'',\ A''',\ A'^{v}, \ldots\ldots,\ A^{(r-3)},\ A^{(r-1)},\ A^{(r)};$$

si otterrebbero ordinatamente le seguenti

$$a_{r-1}(a_r - a_{r-1})(a_{r-2} - a_{r-1})\dots$$

$$\dots(a_{\prime\prime} - a_{r-1})(a_\prime - a_{r-1})(1 - a_{r-1})A^{(r-1)} = D_\prime'',$$

$$a_{r-2}(a_r - a_{r-2})(a_{r-1} - a_{r-2})\dots$$

$$\dots(a_{\prime\prime} - a_{r-2})(a_\prime - a_{r-2})(1 - a_{r-2})A^{(r-1)} = D_\prime''',$$

. . . .

$$a_{\prime\prime\prime}(a_r - a_{\prime\prime\prime})(a_{r-1} - a_{\prime\prime\prime})\dots$$

$$\dots(a_{\prime\prime} - a_{\prime\prime\prime})(a_\prime - a_{\prime\prime\prime})(1 - a_{\prime\prime\prime})A''' = D_\prime^{(r-2)},$$

$$a_\prime(a_r - a_{\prime\prime})(a_{r-1} - a_{\prime\prime})\dots$$

$$\dots(a_{\prime\prime} - a_{\prime\prime})(a_\prime - a_\prime)(1 - a_{\prime\prime})A'' = D_\prime^{(r-1)},$$

$$a_\prime(a_r - a_\prime)(a_{r-1} - a_\prime)\dots(a_{\prime\prime\prime} - a_\prime)(a_{\prime\prime} - a_\prime)(1 - a_\prime)A' = D_\prime^{(r)},$$

dove le $D_\prime''$, $D_\prime'''$, . . . $D_\prime^{(r)}$ esprimono le quantità che si hanno cambiando in D' la a_r ordinatamente nelle a_{r-1}, a_{r-2}, . . . $a_\prime$ e reciprocamente queste in a_r.

Ponendo nelle r equazioni quì esposte in luogo delle $a_\prime$, $a_{\prime\prime}$, $a_{\prime\prime\prime}$, . . . a_r i loro valori $\alpha_\prime$, $\alpha_{\prime\prime}$, $\alpha_{\prime\prime\prime}$, . . . α_r, si avranno r altre equazioni di primo grado colle quali facilmente si potranno determinare le A', A'', A''', . . . $A^{(r)}$.

23. Per trovare la B si osservi che eliminando le A', A'', A''', . . . $A^{(r)}$, B' dalle equazioni (1), (2), (3), . . . (r+2) esposte al paragrafo quindicesimo si ottiene la

$$S^{(r)}B = \frac{1}{2}\,S^{(r)} - \frac{S^{(r-1)}}{2.3} + \frac{S^{(r-2)}}{3.4} - \frac{S^{(r-3)}}{4\,5} + \dots$$

$$\dots \mp \frac{S^{(1)}}{r(r+1)} \pm \frac{1}{(r+1)(r+2)},$$

eliminando poi le A', A'', A''', . . . $A^{(r)}$ dalle medesime anzicitate equazioni eccettuata la prima risulta evidentemente

$(a_r - 1)(a_{r-1} - 1)(a_{r-2} - 1) \ldots\ldots (a_{,,} - 1)(a_{,} - 1)B'$ eguale ad

$$\tfrac{1}{2}\,S^{(r)} - \tfrac{1}{3}\,S^{(r-1)} + \tfrac{1}{4}\,S^{(r-2)} - \tfrac{1}{5}\,S^{(r-3)} + \ldots \mp \frac{S^{(1)}}{r+1} \pm \frac{1}{r+2},$$

ossia l'equazione

$$\left(S^{(r)} - S^{(r-1)} + S^{(r-2)} - \ldots\ldots\ldots \mp S^{(1)} \pm 1\right)B' =$$

$$\frac{S^{(r)}}{2} - \frac{S^{(r-1)}}{3} + \frac{S^{(r-2)}}{4} - \frac{S^{(r-3)}}{5} + \ldots \mp \frac{S^{(1)}}{r+1} \pm \frac{1}{r+2}.$$

Con queste due ultime equazioni trovate si vede come in un tratto si possono avere i valori richiesti delle B, B'; anzi esse insegnano anco che i valori di queste due quantità dipendono dalle sole funzioni invariabili $S^{(r)}$, $S^{(r-1)}$, $S^{(r-2)}$, ... $S^{(2)}$, $S^{(1)}$ delle $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$, ... a_r, e non da queste medesime ultime quantità individualmente; dimodochè trovati i valori di queste funzioni invariabili, agevolmente si avranno quelli delle B, B' senza bisogno di conoscere le altre separatamente.

24. Si ponga $\alpha^r - S^{(1)}\alpha^{r-1} + S^{(2)}\alpha^{r-2} - \ldots \mp S^{(r-1)}\alpha \pm S^{(r)} = \Delta(\alpha)$, e si avrà

$$r\alpha^{r-1} - (r-1)S^{(1)}\alpha^{r-2} + (r-2)S^{(2)}\alpha^{r-3} - \ldots\ldots \mp S^{(r-1)} = \left(\frac{d\Delta}{d\alpha}\right);$$

e per tanto le espressioni

$$r a_r^{r-1} - (r-1)S^{(1)} a_r^{r-2} + (r-2)S^{(2)} a_r^{r-3} - \ldots \mp S^{(r-1)},$$

$$r a_{r-1}^{r-1} - (r-1)S^{(1)} a_{r-1}^{r-2} + (r-2)S^{(2)} a_{r-1}^{r-3} - \ldots \mp S^{(r-1)},$$

. . . .

$$r a_{,,}^{r-1} - (r-1)S^{(1)} a_{,,}^{r-2} + (r-2)S^{(2)} a_{,,}^{r-3} - \ldots \mp S^{(r-1)},$$

$$r a_{,}^{r-1} - (r-1)S^{(1)} a_{,}^{r-2} + (r-2)S^{(2)} a_{,}^{r-3} - \ldots \mp S^{(r-1)},$$

saranno i valori della $\left(\frac{d\Delta}{d\alpha}\right)$ corrispondenti all' α eguale ordinatamente alle

$$a_r,\ a_{r-1} \ldots\ a_{,,},\ a_{,}.$$

Ma per essere

$$\Delta(\alpha)=(\alpha-a_{\prime})(\alpha-a_{\prime\prime})(\alpha-a_{\prime\prime\prime})\ldots(\alpha-a_{r-1})(\alpha-a_{r}),$$

i valori della $\left(\frac{d\Delta}{d\alpha}\right)$ corrispondenti agli anzidetti della α sono anco le

$$\begin{aligned}&(a_{r}-a_{\prime})(a_{r}-a_{\prime\prime})(a_{r}-a_{\prime\prime\prime})\ldots\ldots(a_{r}-a_{r-1}),\\&(a_{r-1}-a_{\prime})(a_{r-1}-a_{\prime})(a_{r-1}-a_{\prime\prime\prime})\ldots\ldots(a_{r-1}-a_{r}),\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&(a_{\prime\prime}-a_{\prime})(a_{\prime\prime}-a_{\prime\prime\prime})\ldots\ldots\ldots\ldots(a_{\prime\prime}-a_{r}),\\&(a_{\prime}-a_{\prime\prime})(a_{\prime}-a_{\prime\prime\prime})\ldots\ldots\ldots\ldots(a_{\prime}-a_{r}),\end{aligned}$$

adunque i coefficienti che hanno le $A^{(r)}$, $A^{(r-1)}$, ... A'', A' nelle equazioni esposte al paragrafo ventunesimo equivarranno alle quantità

$$\begin{aligned}&(1-a_{r})\left(ra_{r}^{r}-(r-1)S^{(1)}a_{r}^{r-1}+(r-2)S^{(2)}a_{r}^{r-2}-\ldots\mp S^{(r-1)}a_{r}\right),\\&(1-a_{r-1})\left(ra_{r-1}^{r}-(r-1)S^{(1)}a_{r-1}^{r-1}+(r-2)S^{(2)}a_{r-2}^{r-2}-\ldots\mp S^{(r-1)}a_{r-1}\right),\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&(1-a_{\prime\prime})\left(ra_{\prime\prime}^{r}-(r-1)S^{(1)}a_{\prime\prime}^{r-1}+(r-2)S^{(2)}a_{\prime\prime}^{r-2}-\ldots\mp S^{(r-1)}a_{\prime\prime}\right),\\&(1-a_{\prime})\left(ra_{\prime}^{r}-(r-1)S^{(1)}a_{\prime}^{r-1}+(r-2)S^{(2)}a_{\prime}^{r-2}-\ldots\mp S^{(r-1)}a_{\prime}\right),\end{aligned}$$

nella prima delle quali vi è la sola a_{r}, nella seconda la a_{r-1}, nella terza a_{r-2}, nell' ultima $a_{\prime}$, oltre le funzioni $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, ... $S^{(r-1)}$ che vi sono indistintamente in tutte.

Essendo evidentemente

$$S^{(r)}=a_{r}P^{(r-1)},\ S^{(r-1)}=a_{r}P^{(r-2)}+P^{(r-1)},\ S^{(r-2)}=a_{r}P^{(r-3)}+P^{(r-2)},\ldots$$

$$S^{(3)}=a_{r}P^{(2)}+P^{(3)},\ S^{(2)}=a_{r}P^{(1)}+P^{(2)},\ S^{(1)}=a_{r}+P^{(1)},$$

si ha

$$P^{(r-1)}=\frac{1}{a_r}\,S^{(r)},$$

$$P^{(r-2)}=\frac{1}{a_r}\,S^{(r-1)}-\frac{1}{a^2_r}\,S^{(r)},$$

$$P^{(r-3)}=\frac{1}{a_r}\,S^{(r-2)}-\frac{1}{a^2_r}\,S^{(r-1)}+\frac{1}{a^3_r}\,S^{(r)},$$

$$P^{(r-4)}=\frac{1}{a_r}\,S^{(r-3)}-\frac{1}{a^2_r}\,S^{(r-2)}+\frac{1}{a^3_r}\,S^{(r-1)}-\frac{1}{a^4_r}\,S^{(r)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P^{(1)}=\frac{S^{(2)}}{a_r}-\frac{S^{(3)}}{a^2_r}+\frac{S^{(4)}}{a^3_r}-\frac{S^{(5)}}{a^4_r}+\cdots\cdots\cdots\pm\frac{S^{(r)}}{a^r_r};$$

e però ponendo nella quantità

$$\frac{1}{(r+1)(r+2)}-\frac{P^{(1)}}{r(r+1)}+\frac{P^{(2)}}{(r-1)r}-\frac{P^{(3)}}{(r-2)(r-1)}+\cdots\mp\frac{P^{(r-2)}}{3.4}\pm\frac{P^{(r-1)}}{2.3},$$

che costituisce il secondo membro della prima delle equazioni pocanzi citate, si otterrà la

$$\frac{1}{(r+1)(r-2)}-\frac{S^{(2)}}{r(r+1)}\,a_r^{-1}+\left(\frac{a_r^{-2}}{r(r+1)}+\frac{a_r^{-1}}{(r-1)r}\right)S^{(3)}$$

$$-\left(\frac{a_r^{-3}}{r(r+1)}+\frac{a_r^{-2}}{(r-1)r}+\frac{a_r^{-1}}{(r-2)(r-1)}\right)S^{(4)}+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\pm\left(\frac{a_r^{-r}}{r(r+1)}+\frac{a_r^{-r+1}}{(r-1)r}+\cdots\cdots+\frac{a_r^{-1}}{2.3}\right)S^{(r)},$$

la quale è formata colle sole funzioni $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, ... $S^{(r)}$ e colla quantità suddetta.

Se in quest' ultima espressione si cambiasse quella sola a_r che vi è esplicita successivamente nelle a_{r-1}, a_{r-2}, ... $a_{\prime\prime}$, $a_{\prime}$ si avrebbero le quantità costituenti i secondi membri delle equazioni, seconda, terza, quarta, ec. delle medesime esposte al paragrafo quì sopra citato.

25. Dallo esposto nei due paragrafi precedenti risulta che per conoscere le B, B' basta conoscere le funzioni invariabili $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, ... $S^{(r)}$, e che per conoscere le $A^{(r)}$, $A^{(r-1)}$, ...

A″, A′ si debbono in oltre conoscere ordinatamente le a_r, a^{r-1}, … $a_{\prime\prime}$, $a_{\prime}$, cioè la a_r per la $A^{(r)}$, la a_{r-1} per la $A^{(r-1)}$, in fine la $a_{\prime}$ per conoscere la A′: proprietà singolari ed utili.

25. Passiamo a contemplare la quistione nel caso di n numero pari: in esso terremo $r = \frac{n}{2}$, per cui il numero delle incognite

$$B,\ A',\ A'',\ A''',\ \ldots\ A^{(r)},\ B'$$

$$a_{\prime},\ a_{\prime\prime},\ a_{\prime\prime\prime},\ \ldots\ a_r$$

supererà di una unità quello delle equazioni alle quali esse debbono soddisfare; quindi sarà sciolta la quistione, quando sapremo esprimere $n+1$ di queste incognite colle altre: noi cercheremo i valori di tutte le B, A′, $a_{\prime}$, A″, $a_{\prime\prime}$, A‴, $a_{\prime\prime\prime}$, … $A^{(r)}$, a_r, B′ espressi colla $a_{\prime}$.

27. Ritenute le stesse denominazioni usate pel caso d' n dispari, mediante le stesse operazioni eseguite per quest' ultimo caso si trovano le due equazioni

$$S^{(r)}.B = \frac{S^{(r)}}{2} - \frac{S^{(r-1)}}{2.3} + \frac{S^{(r-2)}}{3.4} - \frac{S^{(r-3)}}{4.5} + \ldots \pm \frac{1}{(r+1)(r+2)},$$

$$\left(S^{(r)} - S^{(r-1)} + S^{(r-2)} - \ldots\ldots \mp S^{(1)} \pm 1\right) B'$$
$$= \frac{1}{2}\,S^{(r)} - \frac{1}{3}\,S^{(r-1)} + \frac{1}{4}\,S^{(r-2)} - \ldots\ldots \pm \frac{1}{r+2}:$$

se ne trovano r analoghe affatto a quelle esposte al paragrafo ventiduesimo; ed anco altre r simili a quelle registrate al paragrafo sedicesimo i cui secondi membri si sono denominati D′, D″, ec.

Eliminando la $A^{(r)}$ da queste ultime r trovansi le

$$\frac{S^{(r)}}{2.3} - \frac{S^{(r-1)}}{3.4} + \frac{S^{(r-2)}}{4.5} - \ldots\ldots\ldots \pm \frac{1}{(r+2)(r+3)} = 0,$$

$$\frac{S^{(r)}}{3.4} - \frac{S^{(r-1)}}{4.5} + \frac{S^{(r-2)}}{5.6} - \ldots\ldots\ldots \pm \frac{1}{(r+3)(r+4)} = 0,$$

. . . .

$$\frac{S^{(r)}}{r(r+1)} - \frac{S^{(r-1)}}{(r+1)(r+2)} + \frac{S^{(r-2)}}{(r+2)(r+3)} - \ldots\ldots \pm \frac{1}{n(n+1)} = 0,$$

il numero delle quali non è r, ma bensì $r-1$, per cui non si possono con esse determinare tutte le $S^{(r)}$, $S^{(r-1)}$, $S^{(r-2)}$, ... $S^{(2)}$, $S^{(1)}$, come si è fatto pel caso di n dispari.

28. Pongasi nelle ultime equazioni trovate nel paragrafo precedente in luogo delle $S^{(r)}$, $S^{(r-1)}$, ... $S^{(2)}$, $S^{(1)}$ i rispettivi loro valori

$$a_r P^{(r-1)},\ a_r P^{(r-2)} + P^{(r-1)},\ \ldots\ a_r P^{(1)} + P^{(2)},\ a_r + P^{(1)},$$

e si avranno le seguenti

$$a_r\left(\frac{P^{(r-1)}}{2.3} - \frac{P^{(r-2)}}{3.4} + \frac{P^{(r-3)}}{4.5} - \ldots\ldots\right)$$
$$-\left(\frac{P^{(r-1)}}{3.4} - \frac{P^{(r-2)}}{4.5} + \frac{P^{(r-3)}}{5.6} - \ldots\ldots\ldots\right) = 0,$$
$$a_r\left(\frac{P^{(r-1)}}{3.4} - \frac{P^{(r-2)}}{4.5} + \frac{P^{(r-3)}}{5.6} - \ldots\ldots\right)$$
$$-\left(\frac{P^{(r-1)}}{4.5} - \frac{P^{(r-2)}}{5.6} + \frac{P^{(r-3)}}{6.7} - \ldots\ldots\ldots\right) = 0,$$

. . . .

$$a_r\left(\frac{P^{(r-1)}}{r(r+1)} - \frac{P^{(r-2)}}{(r+1)(r+2)} + \frac{P^{(r-3)}}{(r+2)(r+3)} - \ldots\ldots\right)$$
$$-\left(\frac{P^{(r-1)}}{(r+1)(r+2)} - \frac{P^{(r-2)}}{(r+2)(r+3)} + \frac{P^{(r-3)}}{(r+3)(r+4)} - \ldots\ldots\right) = 0$$

colle quali si potranno determinare le $P^{(r-1)}$, $P^{(r-2)}$, $P^{(r-3)}$ ... $P^{(2)}$, $P^{(1)}$ che vi sono in esse

Il metodo più semplice che si presenta immediatamente onde determinare i valori di queste $P^{(r-1)}$, $P^{(r-2)}$, ... $P^{(2)}$, $P^{(1)}$, è il seguente: si ponga

$$\frac{P^{(r-1)}}{2.3} - \frac{P^{(r-2)}}{3.4} + \frac{P^{(r-3)}}{4.5} - \ldots \mp \frac{P^{(1)}}{r(r+1)} \pm \frac{1}{(r+1)(r+2)} = \beta,$$

e le $r-1$ equazioni anzi trovate si ridurranno alle

$$\frac{P^{(r-1)}}{3.4}-\frac{P^{(r-2)}}{4.5}+\frac{P^{(r-3)}}{5.6}-\ldots\mp\frac{P^{(1)}}{(r+1)(r+2)}\pm\frac{1}{(r+2)(r+3)}=\beta a_r,$$

$$\frac{P^{(r-1)}}{4.5}-\frac{P^{(r-2)}}{5.6}+\frac{P^{(r-3)}}{6.7}-\ldots\mp\frac{P^{(1)}}{(r+2)(r+3)}\pm\frac{1}{(r+3)(r+4)}=\beta a_r^2,$$

. . . .

$$\frac{P^{(r-1)}}{(r+1)(r+2)}-\frac{P^{(r-2)}}{(r+2)(r+3)}+\frac{P^{(r-3)}}{(r+3)(r+4)}-\ldots\mp\frac{P^{(1)}}{(2r-1)\,2r}\pm\frac{1}{2r\,(2r+1)}=\beta a_r^{r-1},$$

Ora, si combini l' equazione quì sopra stabilita colle prime $r-2$ di queste ultime, e da esse insieme si desumano i valori delle $P^{(r-1)}$, $P^{(r-2)}$, $P^{(r-3)}$, . . . $P^{(2)}$, $P^{(1)}$, ciò che si può conseguire seguendo un metodo analogo a quelli usati sopra per isciogliere equazioni simili a queste; indi si pongano i valori delle $P^{(r-1)}$, $P^{(r-2)}$, . . . $P^{(2)}$, $P^{(1)}$ così determinati, i quali saranno tutti della forma $M\beta+N$, nell' ultima quì esposta e si otterrà una equazione in β di primo grado; e si determini con essa il valore di β medesima atto a soddisfarla: poscia si sostituisca questo valor della β nei valori anzi trovati delle $P^{(r-1)}$, $P^{(r-2)}$, . . . $P^{(2)}$, $P^{(1)}$, e rimarranno queste affatto determinate in n ed a_r.

Finalmente si costituisca l' equazione

$$\beta^{r-1}-P^{(1)}\beta^{r-2}+P^{(2)}\beta^{r-3}-P^{(3)}\beta^{r-4}+\ldots\mp P^{(r-2)}\beta\pm P^{(r-1)}=0,$$

si trovino le sue radici, che saranno i valori richiesti delle $r-1$ quantità $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$, . . . a_{r-1} : fatto ciò si pongano i valori delle $P^{(r-1)}$, $P^{(r-2)}$, . . . $P^{(2)}$, $P^{(1)}$ insieme a quello dato ad arbitrio alla a_r, nelle espressioni

$$a_r P^{(r-1)},\ a_r P^{(r-2)}+P^{(r-1)},\ a_r P^{(r-3)}+P^{(r-2)},\ \ldots .$$

$$\ldots\ldots a_r P^{(1)}+P^{(2)},\ a_r+P^{(1)};$$

e così si avranno quelli delle $S^{(r)}$, $S^{(r-1)}$, $S^{(r-2)}$, . . . $S^{(2)}$, $S^{(1)}$;

quindi anco quelli di tutte le altre quantità richieste: ciò basti pel caso d' n dispari.

29. Riunendo le cose esposte si conclude che la difficoltà principale di sciogliere la quistione che abbiamo avuto di mira dal paragrafo sedicesimo a quest' ultimo, è ridotta alla soluzione di una equazione numerica del grado $\frac{n-1}{2}$ nel caso di n numero dispari, e del grado $\frac{n}{2}-1$ pel caso d' n pari. Or ora faremo vedere come si possa in certa guisa dimezzare tanto questa difficoltà, quanto tutte le altre inerenti alla lunghezza dei calcoli; e per non allongarci di troppo limiteremo queste nuove riflessioni al primo dei casi sopra contemplati, cioè al caso d' n numero dispari.

30. Facendo per la presente quistione considerazioni analoghe a quelle fatte nei paragrafi quinto e dodicesimo per la prima trattata, facilmente si comprende che le quantità $\alpha_{,}, \alpha_{,,}, \alpha_{,,,}, \ldots \alpha_{r-2}, \alpha_{r-1}, \alpha_{r}$ hanno le proprietà seguenti

$$\alpha_{,}+\alpha_{r}=1\,,\ \alpha_{,,}+\alpha_{r-1}=1\,,\ \alpha_{,,,}+\alpha_{r-2}=1\,,\ \text{ec.}$$

cioè che la somma di due qualunque delle radici della equazione costituita nel paragrafo ventisettesimo ed equidistanti dalle estreme, non che le estreme medesime è costantemente eguale alla unità; ed anco che nel caso d' r numero dispari la media di esse radici cioè l' $\alpha_{\left(\frac{r+1}{2}\right)}$ eguaglia una *metà*: come, che le

$$\mathrm{B},\ \mathrm{B}';\ \mathrm{A}',\ \mathrm{A}^{(r)};\ \mathrm{A}'',\ \mathrm{A}^{(r-1)};\ \mathrm{A}''',\ \mathrm{A}^{(r-2)};\ \text{ec.}$$

sono tra loro eguali.

Stante la proprietà delle $\alpha_{,}, \alpha_{,,}, \alpha_{,,,}, \ldots \alpha_{r-2}, \alpha_{r-1}, \alpha_{r}$ qui sopra dichiarata si può ridurre la ricerca di esse alla soluzione di una equazione del grado $\frac{r}{2}$ nel caso d' r pari, e del grado $\frac{r}{2}-1$ nel caso di r medesimo dispari.

Si ponga nella equazione

$$a^r - S^{(1)}a^{r-1} + S^{(2)}a^{r-2} - S^{(3)}a^{r-3} + \ldots \pm S^{(r)} = 0$$

in luogo della a il binomio $y+\frac{1}{2}$, ove l'y esprime una nuova incognita, e si avrà una equazione in y della forma

$$y^r - N'y^{r-2} + N''y^{r-4} - N'''y^{r-6} + \text{ec.} = 0.$$

dove

$$N' = \frac{r(r+1)}{2^3(2r-1)}, N'' = \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{2^7(2r+1)(2r-1)}, N''' = \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)}{3.2^{10}(2r-3)(2r-1)(2r+1)}, \text{ec.}$$

la quale manca di quei termini ove la y avrebbe per esponenti $r-1$, $r-3$, $r-5$, ec.

Questa equazione, in virtù di questa sua proprietà, nel caso d'r pari avrà tutte le radici a due a due eguali ma di segni differenti: nel caso poi d'r dispari mancherà del termine senza la y, per cui avrà per radice lo zero, e divisa per y darà una equazione della forma

$$y^{r-1} - N'y^{r-3} + N''y^{r-5} - N'''y^{r-7} + \text{ec.} = 0$$

le cui radici saranno anch' esse eguali a due a due e di segni differenti: quindi nel primo caso l'equazione in y sarà derivativa del grado $\frac{r}{2} = \frac{n-1}{4}$, e nel caso secondo cioè d'r dispari sarà essa derivativa del grado $\frac{r-1}{2} = \frac{n-3}{4}$; dimodochè la ricerca delle a_{I}, a_{II}, a_{III}, ... a_r dipenderà in sostanza dalla soluzione di una equazione del grado $\frac{n-1}{4}$, ovvero da una del grado $\frac{n-3}{4}$.

Se si introducessero le condizioni $B=B'$, $A'=A^{(r)}$, $A''=A^{(r-1)}$, $A'''=A^{(r-2)}$, ec. insieme a quella di $A^{\left(\frac{r}{2}\right)} = \frac{1}{2}$ pel caso d'r pari, e si cambiassero le incognite a_{I}, a_{II}, a_{III}, ... a_{r-2}, a_{r-1}, a_r nelle

$$\frac{1}{2}-y',\ \frac{1}{2}-y'',\ \frac{1}{2}-y''',\ \ldots\ldots\ \frac{1}{2}+y'',\ \frac{1}{2}+y'',\ \frac{1}{2}+y'$$

e pel caso d' r pari la $a_{\left(\frac{r}{2}\right)}$ in $\frac{1}{2}$, e ciò si facesse immediatamente nelle $(n+1)$ equazioni (1), (2), (3), (4), . . . (n), $(n+1)$ esposte al paragrafo quindicesimo, si avrebbero tante equazioni quante sono le incognite B, A', A'', . . . y', y'', y''', . . dalle quali si potrebbe desumere direttamente la equazione avente per radici le nuove incognite y', y'', y''', ec. cioè l' equazione in y trovata sopra, e ciò si avrebbe senza bisogno di quella in a sopra esposta e dalla quale si è desunta effettivamente: io non mi trattengo ad esporre nè le dette equazioni, nè quest' ultima, perchè il detto sin quì basta per l' attuale quistione: anzi altrettanto farò in altri due casi consimili che si incontrano nei paragrafi seguenti.

31. Prima di lasciare quest' ultima proposizione facciamo di essa l'esempio di $n=3$. Essendo l' n dispari, sarà $r=\frac{n-1}{2}=1$. In questo esempio occorreranno le equazioni seguenti

$$S^{(1)}.B=\frac{1}{2}S^{(1)}-\frac{1}{2.3},\ a-S^{(1)}=0,\ S^{(1)}=\frac{r}{2},\ a_1(1-a_1)A'=\frac{1}{(r+1)(r+2)},$$

le quali danno $S^{(1)}=\frac{1}{2}$, $a_1=\frac{1}{2}$, $B=B'=\frac{1}{6}$, $A'=\frac{2}{3}$,

Quindi il volume della porzione del corpo una cui sezione qualunque ha l' area espressa da $a+a'x+a''x^2+a'''x^3$, intercetta fra le sezioni aventi per aree $f(0)$, $f(x)$, sarà espresso da

$$x\left(\frac{1}{6}f(0)+\frac{2}{3}f\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{6}f(x)\right)$$

e però anco dalla formula

$$\frac{x}{3}\left[\frac{f(0)+f(x)}{2}+2f\left(\frac{x}{2}\right)\right],$$

la quale esprime il teorema che costituisce ciò che di più generale era noto rispetto alla presente materia, e che si è citato al principio di questa medesima memoria.

32. Se si volesse che le quantità B, A', A'', A''', . . . $A^{(r)}$

fossero tutte fra loro eguali e che la $B'=0$, le equazioni a soddisfarsi dalle rimanenti incognite, ed esposte al paragrafo quindicesimo, si ridurrebbero alle seguenti

$$\begin{aligned} nB=1,\ A'\left(a_{,}+a_{,,}+a_{,,,}+\ldots+a_{r-1}+a_{r}\right)&=\frac{1}{2},\\ A'\left(a_{,}^{2}+a_{,,}^{2}+a_{,,,}^{2}+\ldots+a^{2}_{r-1}+a^{2}_{r}\right)&=\frac{1}{3},\\ A'\left(a_{,}^{3}+a_{,,}^{3}+a_{,,,}^{3}+\ldots+a^{3}_{r-1}+a^{3}_{r}\right)&=\frac{1}{4},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ A'\left(a_{,}^{n}+a_{,,}^{n}+a_{,,,}^{n}+\ldots+a^{n}_{r-1}+a^{n}_{r}\right)&=\frac{1}{n+1}; \end{aligned}$$

e però affine di poterle soddisfare generalmente dovrà essere l'$r=n$. La prima delle equazioni quì esposte dà B, e però A', A'', A''', ... $A^{(n)}$ eguali ad $\frac{1}{n}$, e riduce le altre alle

$$\begin{aligned} a_{,}+a_{,,}+a_{,,,}+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_{n}&=\frac{n}{2},\\ a_{,}^{2}+a_{,,}^{2}+a_{,,,}^{2}+\ldots+a^{2}_{n-2}+a^{2}_{n-1}+a^{2}_{n}&=\frac{n}{3},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{,}^{n}+a_{,,}^{n}+a_{,,,}^{n}+\ldots+a^{n}_{n-2}+a^{n}_{n-1}+a^{n}_{n}&=\frac{n}{n+1}, \end{aligned}$$

dimodochè la difficoltà consiste nella determinazione delle n quantità $a_{,},\ a_{,,},\ a_{,,,},\ \ldots\ldots\ a_{n-2},\ a_{n-1},\ a_{n}$ che soddisfanno quest' ultime n equazioni.

33. Si rappresentino i primi membri delle ultime equazioni esposte nel paragrafo precedente coi simboli $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ $P^{(3)}$, ... $P^{(n)}$ ordinatamente, e si ritengano li $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, ... $S^{(n-1)}$, $S^{(n)}$ per indicare la somma $a_{,}+a_{,,}+\ldots+a_{n}$, la somma dei prodotti che si possono fare moltiplicando queste medesime quantità a due a due, a tre a tre, insieme ad n ad n cioè $a_{,}\,a_{,,}\,a_{,,,}\ldots a_{n}$.

Essendo per le equazioni anzi citate

$$P^{(1)}=\frac{n}{2},\ P^{(2)}=\frac{n}{3},\ P^{(3)}=\frac{n}{4},\ldots\ldots P^{(n-1)}=1,\ P^{(n)}=\frac{n}{n+1},$$

mediante le note relazioni tra le $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, ec. e le $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ec. espresse dalle equazioni seguenti

$$\begin{aligned}
P^{(1)} &= S^{(1)},\\
P^{(2)} &= S^{(1)}\,P^{(1)}-2S^{(2)},\\
P^{(3)} &= S^{(1)}\,P^{(2)}-S^{(2)}\,P^{(1)}+3S^{(3)},\\
P^{(4)} &= S^{(1)}\,P^{(3)}-S^{(2)}\,P^{(2)}+S^{(3)}\,P^{(2)}-4S^{(4)}\\
&\text{ec.}\qquad\qquad\qquad\qquad\text{ec.}
\end{aligned}$$

si potranno facilmente determinare le prime cioè $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, ec.: trovati i valori di queste ultime quantità, si formi l'equazione

$$\mu^{n}-S^{(1)}\mu^{n-1}+S^{(2)}\mu^{n-2}-S^{(3)}\mu^{n-3}+\ldots\pm S^{(n)}=0,$$

che le sue radici, cioè gli n valori della μ che la soddisfanno, saranno appunto i richiesti valori delle n incognite

$$a_{\prime},\ a_{\prime\prime},\ a_{\prime\prime\prime},\ \ldots\ a_{n}.$$

34. Siccome le quantità $a_{\prime}$, $a_{\prime\prime}$, $a_{\prime\prime\prime}$, ... a_{n-2}, a_{n-1}, a_{n} hanno fra loro delle proprietà analoghe a quelle delle $a_{\prime}$, $a_{\prime\prime}$, $a_{\prime\prime\prime}$,...a_{r-2}, a_{r-1}, a_{r} di cui si è parlato al paragrafo trentesimo, così nel caso d'n numero dispari una di esse sarà eguale ad una metà, e la somma di due altre equidistanti dalle estreme in grandezza, non che quella di queste ultime due, eguaglierà una unità; nel caso poi d'n pari esse avranno tutte quest' ultima proprietà; e per tanto, se nella equazione

$$\mu^{n}-S^{(1)}\,\mu^{n-1}+S^{(2)}\,\mu^{n-2}-S^{(3)}\,\mu^{n-3}+\ldots\pm S^{(n)}=0$$

si porrà $z+\frac{1}{2}$ in luogo della μ, ove la z esprime una nuova incognita, si avrà una equazione in z derivativa del grado

$\frac{n-1}{2}$ nel caso d'n dispari, e del grado $\frac{n}{2}$ in quello d'n pari.

35. Se si volesse che B eguagliasse la B', e che le A', A'', A''', ... $A^{(r)}$ fossero eguali fra loro come nella proposizione precedente, le equazioni a soddisfarsi sarebbero le

$$\begin{aligned} 2B+rA'=1\,,\ \left(a_{,}+a_{,,}+a_{,,,}+\ldots+a_{r}\right)A'+B&=\tfrac{1}{2}\,,\\ \left(a_{,}^{2}+a_{,,}^{2}+a_{,,,}^{2}+\ldots+a_{r}^{2}\right)A'+B&=\tfrac{1}{3}\,,\\ \left(a_{,}^{3}+a_{,,}^{3}+a_{,,,}^{3}+\ldots+a_{r}^{3}\right)A'+B&=\tfrac{1}{4}\,,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ \left(a_{,}^{n}+a_{,,}^{n}+a_{,,,}^{n}+\ldots+a_{r}^{n}\right)A'+B&=\tfrac{1}{n+1}\,; \end{aligned}$$

e però onde sia possibile in generale la determinazione di tutte le incognite che vi sono in esse, senza che nessuna rimanga arbitraria o indeterminata, dovrà essere $r=n-1$.

Supposto che le $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ec. esprimano le somme delle potenze prima, seconda, terza, ec. di tutte le incognite $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}\ldots a_{n-3}$, a_{n-2}, a_{n-1}, le equazioni quì sopra esposte si potranno scrivere anco come segue

$$\begin{aligned} 2B+(n-1)A'=1\,,\ P^{(1)}A'+B=\tfrac{1}{2}\,,\ P^{(2)}A'+B=\tfrac{1}{3}\,,&\\ P^{(3)}A'+B=\tfrac{1}{4}\,,\ P^{(4)}A'+B=\tfrac{1}{5}\,,&\\ P^{(5)}A'+B=\tfrac{1}{6}\,,\ \ldots\ldots&\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ P^{(n-1)}A'+B=\tfrac{1}{n}\,,\ P^{(n)}A'+B=\tfrac{1}{n+1}\,.& \end{aligned}$$

Queste ultime n danno

$P^{(2)} - P^{(1)} = -\frac{1}{2.3} \cdot \frac{1}{A'}$, $P^{(3)} - P^{(2)} = -\frac{1}{3.4} \cdot \frac{1}{A'}$,

$P^{(4)} - P^{(3)} = -\frac{1}{4.5} \cdot \frac{1}{A'}$, $P^{(5)} - P^{(4)} = -\frac{1}{5.6} \cdot \frac{1}{A'}$,

. . . .

. . . . $P^{(n)} - P^{(n-1)} = -\frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{A'}$; e però

$P^{(2)} = P^{(1)} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{A'}$, $P^{(3)} = P^{(1)} - \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{A'}$, $P^{(4)} = P^{(1)} - \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{A'}$,

$P^{(5)} = P^{(1)} - \frac{4}{12} \cdot \frac{1}{A'}$, ...

. . . . $P^{(n)} = P^{(1)} - \frac{n-1}{2(n+1)} \cdot \frac{1}{A'}$.

Ma dalle due equazioni $2B + (n-1)A' = 1$, $B + A'P^{(1)} = \frac{1}{2}$, si ha evidentemente $P^{(1)} = \frac{n-1}{2}$; adunque determinata che sarà la A' e conseguentemente anco le A'', A''', ... $A^{(n)}$ sue eguali, rimarranno determinate pure le funzioni invariabili $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, $P^{(4)}$, $P^{(5)}$, . . . $P^{(n)}$ delle altre $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$, . . . a_{n-1}, e con esse anco la B, per essere eguale ad $\frac{1}{2} - \frac{n-1}{2} A'$.

36. Per determinare la A', dalla quale attualmente ora dipende interamente la soluzione della proposta quistione, si osservi, che tra le quantità

$P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$, ... $P^{(n)}$ e le $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, ... $P^{(n)}$

hanno luogo le relazioni rappresentate dalle equazioni note

$$P^{(1)} = S^{(1)},$$
$$P^{(2)} = S^{(1)}\ P^{(1)} - 2S^{(2)},$$
$$P^{(3)} = S^{(1)}\ P^{(2)} - S^{(2)}\ P^{(1)} + 3S^{(3)},$$
$$P^{(4)} = S^{(1)}\ P^{(3)} - S^{(2)}\ P^{(2)} + S^{(3)}\ P^{(1)} - 4S^{(4)},$$

. . . .

$$P^{(n-1)}=S^{(1)}P^{(n-2)}-S^{(2)}P^{(n-3)}+S^{(3)}P^{(n-4)}-\ldots\mp S^{(n-2)}P^{(1)}\pm(n-1)S^{(n-1)},$$
$$P^{(n)}=S^{(1)}P^{(n-1)}-S^{(2)}P^{(n-2)}+S^{(3)}P^{(n-3)}-\ldots\mp S^{(n-1)}P^{(2)}\pm S^{(n-1)}P^{(1)}$$

dalle quali eliminando le $(n-1)$ quantità $S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}, \ldots S^{(n-1)}$ si ottiene una equazione, non difficile a concepirsi dal teorico perito benchè essa non vi sia registrata in nessun'opera, tra le sole

$$P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}, P^{(4)}, \ldots . P^{(n-1)}, P^{(n)}$$

nella quale sostituendo per queste medesime quantità i loro valori trovati superiormente, si ha una equazione in A′ mediante la quale si potrà determinare il valore richiesto di questa medesima quantità.

Essendo ora note le $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}, \ldots P^{(n)}$, colle equazioni Newtoniane sopra esposte si determineranno le $S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}, \ldots S^{(n)}$: determinate queste ultime funzioni simmetriche delle incognite $a_{I}, a_{II}, a_{III}, \ldots a_{n-1}$, si costituirà l'equazione

$$\lambda^{n-1}-S^{(1)}\lambda^{n-2}+S^{(2)}\lambda^{n-3}-S^{(3)}\lambda^{n-4}+\ldots\mp S^{(n-2)}\lambda\pm S^{(n-1)}=0$$

se ne troveranno le radici, cioè i valori della λ che la soddisfanno, e questi saranno i valori cercati delle stesse $a_{I}, a_{II}, a_{II}, \ldots . a_{n-2}, a_{n-1}$.

37. Anco quest'ultima equazione ha, nel caso d'$(n-1)$ dispari, una radice eguale ad una metà, e la somma di due altre qualsivogliono fra le equidistanti dalla più grande e più piccola eguale ad una unità, e nel caso d'$(n-1)$ pari, la somma di due qualunque delle medesime equidistanti dalle estreme in grandezza, eguale ad uno; e per conseguenza la trasformata che si avrà ponendo in essa $u+\frac{1}{2}$, ove l'u esprime una nuova incognita, sarà derivativa del grado $\frac{r-3}{2}$ nel primo di questi casi, e del grado $\frac{n-1}{2}$ nel secondo. Non es-

pongo questa trasformata per la stessa ragione per cui non ho esposto l' analoga di cui si è parlato al paragrafo trentesimo, ed anco perchè la sua determinazione non presenta nessuna difficoltà.

38. Se la funzione $f(x)$ in vece di rappresentare, come sin' ad' ora l' area di quelle sezioni di un corpo, la quale ha la distanza x da un punto dato, rappresentasse l' ordinata di una linea piana corrispondente alla ascissa x, l' area del quadrilatero racchiuso dalle due ordinate $f(o)$, $f(n)$ e dalle porzioni della linea e dell' asse delle x intercette fra queste medesime ordinate, avrebbe colle ordinate della linea corrispondenti a quei medesimi valori della x ai quali corrispondevano, nelle quistioni trattate, le sezioni del corpo da noi contemplato, delle relazioni affatto simili a quelle osservate tra le aree di queste sezioni ed il volume della porzione del corpo intercetta tra le due estreme di esse. Anzi, in generale, qualunque sia il significato concreto della $f(x)$, purchè essa sia algebraica, razionale ed intera, avranno luogo delle relazioni analoghe a quelle esposte per la stereometria, tra i valori di questa funzione corrispondenti agli anzidetti della x e la quantità che sarà quella primitiva della $f(x)$, rispetto alla x, che si annullerà colla x medesima.

RIFLESSIONI

SUL MOTO PERMANENTE DELL'ACQUA NE' CANALI ORIZZONTALI

MEMORIA

DEL SIG. PROFESSORE GIORGIO BIDONE

Ricevuta li 14. *Dicembre* 1823.

Il moto permanente dell' acqua in un canale orizzontale può determinarsi ogni qual volta lo sbocco dell' acqua dal canale si fa per una luce di cui si sappia calcolare la portata, e per cui la velocità media dell' efflusso sia funzione nota dell' altezza dell' acqua nel canale. Infatti in questo caso, assai frequente negli sbocchi de' canali orizzontali, è chiaro che paragonando la portata dello sbocco espressa per l' altezza dell' acqua nel canale, alla portata della sezione del canale rappresentata dal prodotto della velocità media nell' area della sezione, si ottiene questa velocità media espressa in funzione dell' altezza dell' acqua nel canale; e così la portata e la velocità media della sezione essendo funzioni note dell' altezza dell' acqua nel canale, sarà determinato il moto che quì si prende a considerare. Perciò quando l' espressione della portata della luce dello sbocco contiene l' altezza dell' acqua nel canale, il moto permanente di questa si determina coi soli principj che servono a calcolare l' efflusso dalle luci, combinati colla condizione della permanenza del moto dell' acqua nel canale.

Se si applica la teorìa del moto lineare e permanente de' liquidi al caso in cui il vaso è un canale aperto al di sopra, col fondo e colla superficie della corrente orizzontali, si arriva a due equazioni, l' una delle quali è relativa all' efflusso dallo sbocco, posto al termine del canale, e l'altra esprime la ragione con cui stanno tra loro le sezioni e le velocità medie: e queste equazioni sono appunto quelle che si ottengono colla teorìa degli efflussi dalle luci, combinata colla condizione della permanenza del moto.

La velocità media dell' efflusso dalla luce dello sbocco essendo diversa secondo la diversa forma e posizione della luce stessa, dovrà cercarsi con metodi adattati a ciascun caso particolare. Così se il piano della luce è verticale, la velocità media si ricaverà dalle formule per gli efflussi laterali. Conosciuta la velocità dell' efflusso dallo sbocco, e posta la condizione del moto stabilito e permanente, la relazione tra le sezioni e le velocità darà la velocità media della sezione del canale. Data pertanto la luce dello sbocco, e la sezione del canale, si avranno in ciascun caso particolare, e nei diversi stati permanenti del canale, le relazioni della portata e della velocità media all' altezza della corrente, e sarà quindi determinato il moto lineare e permanente dell' acqua nel canale.

Prese pertanto le equazioni relative alla portata dello sbocco, ed alla portata della sezione del canale, e supposta costante la sezione di uno stesso canale, si considerano, nelle presenti riflessioni diversi casi particolari, nei quali, data la luce dello sbocco, e dato il profilo della sezione del canale, le relazioni dell' altezza alla velocità media ed alla portata della sezione vengono determinate ed espresse da formule rigorose. Se il profilo della luce dello sbocco, e quello della sezione del canale sono continui per tutti gli stati permanenti che si considerano, queste relazioni si conservano sempre le stesse: nel caso contrario esse variano ne' diversi stati del canale, e può quindi fra questi esserne uno, in cui la velocità media della sezione divenga massima.

Dopo queste considerazioni su diversi casi, ne' quali è data la luce dello sbocco, e la sezione del canale, si passa al problema inverso, in cui, essendo data la luce dello sbocco, si domanda di determinare il profilo della sezione del canale in maniera che la velocità media della corrente abbia e conservi ne' diversi stati permanenti del canale una ragione data all' altezza dell' acqua.

Si esamina in seguito il problema più generale, in cui si cerca il profilo della luce dello sbocco, e quello della sezione del canale, affinchè tanto la velocità media quanto la portata della sezione abbiano rispettivamente una ragione data all' altezza dell' acqua in qualunque stato permanente del canale.

Chiamando Q, H e v la portata, l' altezza e la velocità media della sezione della corrente nel canale, si trovano tra queste quantità, secondo i diversi profili della luce dello sbocco e della sezione del canale; diversi sistemi di relazioni, come per esempio li seguenti, ove per brevità si sono ommessi i coefficienti costanti:

$$v = \frac{1}{\sqrt{H}}; \quad Q = \sqrt{H}:$$

$$v = \sqrt{H}; \quad Q = H\sqrt{H}:$$

$$v = H\sqrt{H}; \quad Q = H^2\sqrt{H}:$$

$$v = \sqrt{H}; \quad Q = H^2\sqrt{H}:$$

$$v = \text{cost.}; \quad Q = H\sqrt{H}:$$

$$v = H; \quad Q = H^2\sqrt{H}:$$

$$v = H^2; \quad Q = H^3\sqrt{H}:$$

$$v = \text{cost.}; \quad Q = H^2\sqrt{H}:$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{H}}; \quad Q = H^3\sqrt{H}:$$

$$v = \frac{1}{H}; \quad Q = H^3\sqrt{H}:$$

$$v = \text{cost.}; \quad Q = H^3\sqrt{H}:$$

$$v = \sqrt{H}; \quad Q = H^3\sqrt{H}:$$

$$v = H; \quad Q = H^3\sqrt{H}:$$

ecc.

Da questi esempj e da altri che quì si tralasciano si vede come ne' canali orizzontali la velocità possa diminuire, o rimaner costante, o crescere, crescendo l'altezza e la portata; e come le ragioni della velocità e della portata all'altezza dipendano dalla forma e posizione della luce dello sbocco, e dal profilo della sezione del canale. Perciò in due canali orizzontali queste ragioni saranno affatto diverse tra loro, se saranno diverse le sezioni e gli sbocchi dei due canali. Che anzi le medesime ragioni varieranno in uno stesso canale da uno stato permanente all'altro, quando non sarà osservata la legge di continuità nel profilo della luce dello sbocco, o in quello della sezione del canale, o nell'uno e nell'altro. Queste stesse conseguenze sono applicabili a que' tratti di un canale inclinato, ne' quali le acque sono e restano rigurgitate, e colla superficie orizzontale, ne' diversi stati permanenti che si considerano. Ma negli altri tratti del medesimo canale inclinato ne' quali agiscono le sole resistenze uniformi provegnenti dal fondo e dalle sponde, e la superficie della corrente è parallela al fondo, e le sezioni sono eguali tra loro, il moto è affatto indipendente dall' efflusso dallo sbocco del canale, e le note equazioni che lo rappresentano, non contengono altra sezione che quella della corrente medesima.

Quindi se in questo caso si riguarda il profilo della sezione del canale come indeterminato, ma continuo, una sola relazione data, quella per esempio tra la velocità media e l'altezza della corrente, basta per determinarne il perimetro e l'area in funzione dell'altezza medesima, e con ciò resta pure determinata in funzione dell'altezza la portata della sezione. Così si trova che si può assegnare alla sezione un profilo tale, che giunta la corrente ad una certa altezza, la velocità media più non prende aumento sensibile per qualunque ulteriore alzamento della corrente; la portata all' opposto cresce assai rapidamente per poco che cresca l'altezza. Le relazioni tra la portata, l'altezza e la velocità della corrente per questi stati permanenti del canale sono così espresse;

$$v = \text{cost.}\,;\ Q = e^{H}\,;$$

ommettendo i coefficienti costanti, ed essendo e la base dei logaritmi iperbolici.

1. Il canale di fondo orizzontale che quì consideriamo, ha una lunghezza indefinita, cosicchè si può all' uopo supporre, che le sezioni ed i tratti del medesimo, sui quali si ragionerà, sono a grandissima distanza e dal principio e dal termine del canale. Le sezioni si suppongono eguali tra loro in tutta la lunghezza del canale, in modo che questo si può intendere generato dallo scorrimento di una di esse parallelamente a se stessa. Qualunque poi sia la figura della sezione, essa si concepisce tale, che il canale è capace di qualsivoglia portata senza che le acque trabocchino. Il canale è alimentato al suo principio da un influsso costante d' acqua, ed il movimento di questa nel canale è sempre considerato ridotto a stato di permanenza.

2. Poste queste cose, risulta dall' osservazione, che qualunque sia la maniera con cui l' acqua sbocca al termine del canale, se si considera un tratto del medesimo, posto a conveniente distanza dallo sbocco, per questo tratto, e per la rimanente parte superiore del canale, la superficie dell' acqua è sensibilmente orizzontale e parallela al fondo. Risulta pure che in qualunque sezione del canale, presa a conveniente distanza dallo sbocco, l' acqua si muove tanto presso al fondo, che alla superficie ed alle sponde, cioè che la sezione è tutta viva: e questa proprietà si mantiene in tutte le sezioni superiori a quella che si considera, ed anche nelle sezioni inferiori ad una distanza più o meno grande dallo sbocco, secondo le particolari circostanze del medesimo. L' osservazione dimostra in fine che ne' tratti posti a conveniente distanza dal principio e dal termine del canale, e ne' quali la superficie si conserva sensibilmente parallela al fondo, il movimento delle molecole acquee si fa secondo linee orizzontali, e parallele tra loro ed all' asse del canale, senza alcun deviamento laterale o verticale.

3. Abbia ora il canale il fondo piano, e le pareti verticali e parallele tra loro, e chiamiamo

L la larghezza del canale;

H l'altezza della corrente in una sezione di un tronco del canale, in cui la superficie è parallela al fondo;

v la velocità media della corrente nella sezione che si considera;

Q la portata del canale in un minuto secondo: sarà

$$Q = H L v. \tag{A}$$

Fra le diverse maniere di sbocco consideriamo in primo luogo la seguente. Si concepisca che il canale, al suo termine, sia attraversato e chiuso da un piano solido e verticale, d'altezza indefinita, e perpendicolare all' asse del canale, e che in questo piano venga aperta una luce rettangola di base orizzontale, e sia

l la larghezza della luce;

a l'altezza della medesima;

b il battente, ossia l'altezza dell' acqua sopra il lato superiore della luce;

D l'altezza del lato inferiore della luce sopra il fondo del canale;

sia inoltre

μ il coefficiente della contrazione della vena fluida, relativo a questa luce;

g la gravità terrestre;

e sia libero l' efflusso dalla luce.

4. Per esprimere generalmente la portata di questa luce, conviene aver riguardo alla velocità colla quale le molecole acquee arrivano al conoide che si forma intorno alla luce, e nel quale esse ricevono e compiono la loro accelerazione. Ora questa velocità dipende dalla ragione più o meno grande dell' area della luce all' area della sezione del canale. Pertanto per tener conto di questa velocità iniziale delle molecole,

noi supporremo che essa, per ciascuna molecola, è eguale alla velocità media

$$v = \frac{Q}{HL}$$

della sezione del canale, a cui è dovuta l' altezza

$$h = \frac{Q^2}{2gH^2L^2}:$$

e così accresceremo il battente effettivo b dell' altezza h, mediante il qual aumento si avrà il dovuto riguardo alla velocità propria dell' acqua nel canale, ossia alla ragione dell' area della luce a quella della sezione del canale. Questa maniera di tener conto della velocietà colla quale le molecole arrivano alla luce, è per se stessa sufficientemente esatta, ed è pure conforme alla teoria del moto lineare de' liquidi.

5. Ciò posto, la portata della luce sarà data dall' equazione

$$\text{(B)} \qquad Q = \tfrac{2}{3}\mu l\sqrt{2g}\left[\left(a+b+\frac{Q^2}{2gH^2L^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(b+\frac{Q^2}{2gH^2L^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Liberando questa equazione dai radicali, si arriva ad una equazione di ottavo grado rispetto all' incognita Q, riducibile al quarto. Se l' equazione così ridotta si potesse risolvere algebraicamente, si avrebbe in ogni caso la portata della luce e del canale espressa per le sole dimensioni dell' una e dell'altro; e paragonando tra loro i due valori di Q, l' uno preso dall' equazione (A), l' altro dall' equazione (B), si ricaverebbe il valore della velocità media v della sezione del canale espresso per l' altezza dell' acqua contenuta nel medesimo. Ma questo valore di v non si può ottenere, poichè non si ha la risoluzione algebraica dell' equazione (B) rispetto alla quantità Q. Perciò riserbandoci di esporre più sotto un metodo assai facile per averne per approssimazione la risoluzione numerica, noi esamineremo alcuni casi, ne' quali l' equazione (B), prendendo una forma più semplice, è risolubile rispetto all' incognita Q.

6. Consideriamo il caso in cui l'area della luce, fornita di battente, è assai piccola rispetto alla sezione del canale, in modo che si può trascurare il termine $\frac{Q^2}{2gH^2L^2}$. Si conosce facilmente quando questo termine si possa trascurare, note che siano le dimensioni e la posizione della luce, e la sezione del canale. In questo caso l'equazione (B) diventa

$$Q=\frac{2}{3}\mu l\sqrt{2g}\left[(a+b)^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}\right].$$

Combinando questa equazione colla (A), e notando che si ha

$$H=D+a+b,$$

e facendo per brevità

$$\alpha=\frac{2\mu l\sqrt{2g}}{3L},$$

α essendo in questo caso una quantità costante, si trova

$$(1)\qquad v=\frac{\alpha}{H}\cdot\left[(H-D)^{\frac{3}{2}}-(H-D-a)^{\frac{3}{2}}\right];$$

$$(2)\qquad Q=\alpha L.\left[(H-D)^{\frac{3}{2}}-(H-D-a)^{\frac{3}{2}}\right],$$

e così riguardando D ed α come costanti, cioè la posizione e le dimensioni della luce come invariabili, qualunque sia lo stato permanente del canale, si avranno la velocità media v, e la portata Q del canale espresse in funzioni note dell' altezza H. Si conosceranno quindi le ragioni colle quali questa velocità e questa portata crescono o calano quando il canale passa da uno stato permanente H ad un altro H'.

7. Per vedere come e quando cresca o cali la velocità media v del canale, si prenda il differenziale di v rispetto ad H dall' equazione (1), e si avrà

$$\frac{dv}{adH} = \frac{\left(\frac{H}{2} + D\right)\sqrt{H - D} - \left(\frac{H}{2} + D + a\right)\sqrt{H - D - a}}{H^2}$$

e facendo $\frac{dv}{dH} = 0$, si ottiene primieramente

$$H = 2\sqrt{\frac{a^2 + 3aD + 3D}{3}},$$

il qual valore è $> D + a$, e corrisponde al massimo di v.

Perciò quando tra H, D ed a si avrà l' equazione precedente, la velocità media v sarà la massima fra quelle che corrispondono ai diversi stati permanenti del canale, pei quali lo sbocco si fa dalla stessa luce. Il battente della luce relativo al valore precedente di H è

$$b = 2\sqrt{\frac{a^2 + 3aD + 3D^2}{3}} - D - a;$$

dal che si vede che per una stessa luce si richiede un maggior battente a misura che il suo lato inferiore è più elevato sopra il fondo del canale, affinchè la velocità media di questo sia la massima fra tutte. Così se D è assai grande rispetto ad a, il valore di H corrispondente al massimo di v è prossimamente

$$H = 2D + a;$$

e

$$b = D.$$

Perciò D ed a essendo dati e costanti, la velocità media del canale crescerà dallo stato permanente in cui è

$$\mathrm{H} = \mathrm{D} + a, \text{ e } b = 0,$$

sino allo stato permanente in cui si ha

$$\mathrm{H} = 2\sqrt{\frac{a^2 + 3a\mathrm{D} + 3\mathrm{D}^2}{3}},$$

e
$$b = 2\sqrt{\frac{a^2 + 3a\mathrm{D} + 3\mathrm{D}^2}{3}} - \mathrm{D} - a,$$

pel quale stato la velocità v sarà massima. Poi l' altezza H continuando a crescere, la velocità media diminuirà; e la legge dell' aumento e della diminuzione della velocità media sarà data dall' equazione (1).

8. L' equazione $\frac{dv}{d\mathrm{H}} = 0$ somministra in secondo luogo $\mathrm{H} = \infty$, il qual valore corrisponde al minimo di v. Facendo dunque H quantità grandissima nelle equazioni (1) e (2) si ottiene

$$v = \frac{3\alpha a}{2\sqrt{\mathrm{H}}}; \quad \mathrm{Q} = \frac{3\alpha a \mathrm{I}\sqrt{\mathrm{H}}}{2}:$$

perciò negli stati permanenti del canale, ne' quali l' altezza dell' acqua è assai grande a confronto delle quantità D ed a, le velocità medie calano in ragione inversa delle radici delle altezze, e le portate crescono come le stesse radici: cioè queste ragioni sono propriamente le estreme alle quali s' avvicinano sempre più le ragioni delle velocità medie e delle portate alle altezze dell' acqua, a misura che queste vanno crescendo.

9. Considerando sempre il medesimo caso di luce assai piccola in paragone della sezione del canale, supponiamo il battente picciolissimo, cioè

$$\mathrm{H} - \mathrm{D} - a = b = \varpi,$$

essendo ϖ quantità piccolissima rispetto ad a. Le equazioni

(1) e (2) daranno in questo caso, trascurando le potenze di ω superiori alla prima,

$$v = \frac{\alpha\sqrt{a}}{D+a}\left[a + \frac{(3D+a)\omega}{2(D+a)}\right];$$

$$Q = \frac{\alpha L\sqrt{a}}{2}\left[2a + 3\omega\right];$$

ossia

$$v = \frac{\alpha\sqrt{a}}{2}\left[3 - \frac{(3D+a)}{H}\right];$$

$$Q = \frac{\alpha I\sqrt{a}}{2}\left[3H-(3D+a)\right].$$

Da queste equazioni, nelle quali non deve mai essere $H < D+a$, si hanno le relazioni delle velocità medie e delle portate alle altezze dell' acqua negli stati permanenti, ne' quali il battente della luce si conserva piccolissimo.

10. Nel caso pertanto dello sbocco contemplato nei tre numeri precedenti, la velocità media della corrente, la quale è rigorosamente rappresentata dall' equazione (1), varia negli stati permanenti estremi in modo che quando a, D ed H sono tali, che il battente è piccolissimo, essa è così espressa

$$v = \frac{\alpha\sqrt{a}}{2}\left[3 - \frac{(3D+a)}{H}\right]:$$

Negli stati permanenti ne' quali H è grandissima rispetto ad a e D, la velocità media è

$$v = \frac{3\alpha a}{2\sqrt{H}}:$$

Negli altri stati permanenti intermedii la velocità media è data dall' equazione (1)

$$v = \frac{\alpha}{H}\left[(H-D)^{\frac{3}{2}} - (H-D-a)^{\frac{3}{2}}\right]:$$

e si avrà un' idea abbastanza precisa e chiara dell' andamento della funzione di H contenuta nel secondo membro di quest'ultima equazione, osservando che essa è sempre tale che si ha

$$v < \frac{3a\sqrt{H - D - \frac{a}{2}}}{2H};$$

$$v > \frac{3a\sqrt{H - D - \frac{5a}{9}}}{2H};$$

come è facile di assicurarsi, ritenendo che nelle precedenti relazioni non deve mai essere $H < D + a$. Questi limiti fra i quali è sempre compresa la velocità media, sono assai vicini tra loro, anche nel caso più disfavorevole, come si può facilmente vedere.

11. Passiamo ora al caso in cui la luce dello sbocco, essendo fornita di battente, non è più assai piccola rispetto alla sezione del canale. In questo caso non si può trascurare la velocità colla quale le molecole arrivano alla luce, e si deve far uso dell' equazione (B). Perciò se in questa equazione mettiamo in vece di Q, $a+b$ e b i loro valori HLv, $H-D$ ed $H-D-a$ avremo

$$\text{(C)} \qquad v = \frac{a}{H}\left(H - D + \frac{v^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(H - D - a + \frac{v^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}};$$

la quale equazione darà la relazione tra v ed H ne' diversi stati permanenti del canale. Differenziandola rispetto a v e ad H, v essendo funzione di H, e facendo $\frac{dv}{dH} = 0$, si ottiene primieramente $H = \infty$: ma quando $H = \infty$, l' area della luce, la quale è invariabile, diventa piccolissima a confronto della sezione del canale, perciò in questo caso si hanno le conseguenze già esposte al n.° 8.

Dall' equazione $\frac{dv}{dH} = 0$ si ha ancora quest' altra

$$\frac{v^2}{2g} = \frac{3(2D+a) \pm \sqrt{9H^2 - 3a^2}}{6}:$$

Sostituendo questo valore di v nell' equazione (C) si avrà una equazione determinata in H, dalla quale, posta la risoluzione analitica delle equazioni, si ricaverebbe il valore di questa quantità espresso per D ed a, e si avrebbe il valore di H, che rende massima la velocità v.

12. Quanto si è detto sin quì, si può comprendere nelle seguenti considerazioni, qualunque sia la grandezza della luce dello sbocco a paragone della sezione dell' acqua nel canale. La portata della luce è in ogni caso data dall' equazione

$$\text{(B)} \quad Q = \frac{2}{3}\mu l\sqrt{2g}\left[\left(a+b+\frac{Q^2}{2gH^2L^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(b+\frac{Q^2}{2gH^2L^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]:$$

Si scrivano ora queste due altre equazioni

$$P = \mu al\sqrt{2g} \cdot \sqrt{b + \frac{a}{2} + \frac{P^2}{2gH^2L^2}};$$

$$R = \mu al\sqrt{2g} \cdot \sqrt{b + \frac{4a}{9} + \frac{R^2}{2gH^2L^2}}.$$

Dalla teoria degli efflussi, come pure dal calcolo diretto, paragonando tra loro le espressioni precedenti, facilmente si vede essere

$$Q < P; \ Q > R:$$

e facendo

$$v' = \frac{P}{HL}; \qquad v'' = \frac{R}{HL};$$

essendo la velocità media vera

$$v = \frac{Q}{HL},$$

si avrà

$$v = \frac{2\mu l\sqrt{2g}}{3\mathrm{HL}} \cdot \left[\left(a+b+\frac{v^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(b+\frac{v^2}{2g}\right)^{\frac{3}{2}}\right],$$

$$v' = \frac{\mu a l\sqrt{2g}}{\mathrm{HL}} \cdot \sqrt{b+\frac{a}{2}+\frac{v'^2}{2g}};$$

$$v'' = \frac{\mu a l\sqrt{2g}}{\mathrm{HL}} \cdot \sqrt{b+\frac{4a}{9}+\frac{v''^2}{2g}};$$

e sarà

$$v < v';\ v > v''.$$

Risolvendo le due ultime equazioni rispetto alle quantità v' e v'', ed osservando che si ha $\mathrm{H} = \mathrm{D} + a + b$, si ottiene

$$v' = \frac{\mu a l\sqrt{2g}}{\mathrm{L}} \cdot \frac{\sqrt{\mathrm{H}-\mathrm{D}-\frac{a}{2}}}{\sqrt{\mathrm{H}^2-\frac{\mu^2 a^2 l^2}{\mathrm{L}^2}}};$$

$$v'' = \frac{\mu a l\sqrt{2g}}{\mathrm{L}} \cdot \frac{\sqrt{\mathrm{H}-\mathrm{D}-\frac{5a}{9}}}{\sqrt{\mathrm{H}^2-\frac{\mu^2 a^2 l^2}{\mathrm{L}^2}}},$$

Nelle quali equazioni vuolsi notare che non può mai essere $\mathrm{H} < \mathrm{D}+a$, poichè nella luce che quì si considera e che serve di sbocco al canale, le quantità D ed a sono date e costanti, e le relazioni che si cercano sono unicamente relative alle successive variazioni del battente b da $b = 0$ sino a $b = \infty$, cioè rimanendo b quantità sempre positiva:

13. Dai valori di v' e di v'' si vede che quando H è grandissima a paragone di D e di a, si ha

$$v' = v'' = \frac{\mu a l\sqrt{2g}}{\mathrm{L}\sqrt{\mathrm{H}}};$$

e perciò sarà anche

$$v = \frac{\mu a l \sqrt{2g}}{L\sqrt{H}}.$$

Chiamando H' il valore di H che rende v' massimo, si trova

$$H' = D + \frac{a}{2} + \sqrt{\left(D + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{\mu^2 a^2 l^2}{L^2}}:$$

e siccome non può mai essere $H < D + a$, si dovrà avere

$$D =, \text{ oppure } > a\left(\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\mu^2 l^2}{L^2}} - \frac{1}{4}\right);$$

e quando l' una o l' altra di queste condizioni sarà soddisfatta, v' avrà un valor massimo

$$V' = \frac{\mu a l \sqrt{2g}}{L\sqrt{2H'}}.$$

Nell' istesso modo chiamando H'' il valore di H che rende v'' massimo, si troverà

$$H'' = D + \frac{5a}{9} + \sqrt{\left(D + \frac{5a}{9}\right)^2 - \frac{\mu^2 a^2 l^2}{L^2}};$$

e dovrà essere

$$D =, \text{ oppure } > a\left[\sqrt{\frac{16}{81} + \frac{\mu^2 l^2}{L^2}} - \frac{5}{9}\right];$$

posta l' una o l' altra di queste condizioni, il valor massimo di v'' sarà

$$V'' = \frac{\mu a l \sqrt{2g}}{L\sqrt{2H''}}.$$

14. Da queste considerazioni fatte sulle quantità v' e v'', fra le quali per uno stesso valore di H è sempre compresa la velocità media v della corrente, si può conchiudere, che siccome esse quantità hanno un massimo quando esistono certe relazioni tra D ed a; così avrà pure un massimo la velocità v, quando esisteranno analoghe relazioni tra D ed a. Ma il valore di H che renderà v massimo non sarà sempre compreso tra i valori di H' ed H'', che rendono rispettivamente massime le

quantità v' e v'', dipendendo ciò dalle relazioni che esisteranno tra D ed a.

Così nel caso di luce assai piccola a confronto della sezione del canale si è trovato (n.° 7.) che il valore di H che rende massima la velocità v, è

$$H = 2\sqrt{\frac{a^2+3aD+3D^2}{3}}:$$

In questo stesso caso, trascurando nelle espressioni di v' e di v'' la quantità $\frac{\mu al}{L}$, i valori di H che rendono rispettivamente v' e v'' massimi, sono

$$H' = 2D + a;\; H'' = 2D + \frac{10a}{9}.$$

Ora si trova che è bensì, qualunque sia la relazione tra D ed a,

$$2\sqrt{\frac{a^2+3aD+3D^2}{3}} > 2D + a;$$

ma non è

$$2\sqrt{\frac{a^2+3aD+3D^2}{3}} < 2D + \frac{10a}{9}$$

se non quando $D > \frac{3a}{9}$.

Ciò non ostante si scorge che il valore di H, che rende v massimo, sarà in generale assai poco diverso dall' uno o dall' altro dei valori di H′ e H″ del n.° 13. Se poi non esistono tra D ed a relazioni analoghe alle sovra espresse, allora la velocità media v diminuirà sempre, crescendo l' altezza dell' acqua nel canale.

15. L' efflusso dalla luce sin quì considerata non sia più libero, ma si faccia tutto in acqua stagnante, e di superficie invariabile, come sarebbe quella di un ampio lago; e sia k l' altezza della superficie dell' acqua stagnante sopra il lato superiore della luce, e b l' altezza della superficie dell'acqua nel canale sopra quella dell' acqua stagnante, in modo che

ritenendo le altre denominazioni precedentemente adoperate, si abbia

$$H = D + a + k + b,$$

e non possa mai essere

$$H < D + a + k,$$

D, *a* e *k* essendo quantità costanti. Per le cose precedenti, qualunque sia la grandezza della luce rispetto alla sezione del canale, la portata della luce, e quella del canale, eguali tra loro, saranno date dalle equazioni

$$Q = \mu al. \sqrt{2g\left(b + \frac{Q^2}{2gH^2L^2}\right)};$$

$$Q = H L v;$$

dalle quali si ricava

$$v = \mu al\sqrt{2g}.\frac{\sqrt{H-D-k-a}}{\sqrt{H^2L^2-\mu^2a^2l^2}}.$$

Questo valore di v è della stessa forma di quelli di v' e di v'' esaminati al n.° 12: Perciò quando H sarà grandissimo a paragone di D, *k* ed *a*, si avrà

$$v = \frac{\mu a\sqrt{2g}}{l\sqrt{H}}.$$

La velocità media v sarà massima, allorchè

$$H = D + a + k + \sqrt{(D+a+k)^2 - \frac{\mu^2a^2l^2}{L^2}}.$$

E se la luce è assai piccola rispetto alla sezione del canale, la massima velocità media corrisponderà allo stato permanente in cui è

$$H = 2\,(D + a + k).$$

16. Ritenendo lo sbocco ora considerato, supponiamo che ad una conveniente distanza dal medesimo si chiuda la sezione del canale con un piano solido, in cui sia intagliata una luce, dalla quale l'efflusso si faccia anch'esso tutto nell'acqua; e così mediante questa luce l'acqua passi dal tronco supe-

riore del canale nel tronco compreso tra questa luce e lo sbocco. Conservando le denominazioni precedenti circa lo sbocco e l' ultimo tronco del canale, chiamiamo D', a', k', b' ed H' le analoghe quantità relative alla luce ed al tronco superiore del canale, cosicchè si abbia

$$H' = D' + a' + k' + b'.$$

Queste quantità, come pure le corrispondenti relative allo sbocco, sono costanti quando lo stato del canale è permanente; ma le quantità b, k' e b', e quindi H ed H' variano da uno stato permanente ad un altro.

Chiamiamo E^2 l'area della luce dello sbocco, ed E'^2 quella dell' altra luce, comprendendo in queste espressioni la contrazione della vena fluida; e consideriamo il caso in cui queste luci sono assai piccole a paragone delle sezioni dell' uno e dell' altro tronco del canale.

Essendo Q la portata del canale e di ciascuna delle luci; v la velocità media del tronco del canale compreso tra le due luci; v' la velocità media del tronco superiore, si avrà

$$Q = E^2\sqrt{2gb} = E'^2\sqrt{2gb'};$$
$$Q = HLv \qquad = H'L'v';$$
$$v = \frac{E^2\sqrt{2gb}}{HL}; \quad v' = \frac{E'^2\sqrt{2gb'}}{H'L'};$$

e facendo $D + a + k = M$, essendo M quantità costante in qualunque stato permanente del canale, sarà

$$b = H - M; \quad b' = H' - H;$$

e poichè $E^2\sqrt{b} = E'^2\sqrt{b'}$, si troverà

$$H = \frac{E'^4H' + E^4M}{E'^4 + E^4}:$$

e quindi

$$H - M = \frac{E'^4(H' - M)}{E'^4 + E^4}; \qquad H' - H = \frac{E^4(H' - M)}{E'^4 + E^4};$$

e finalmente

$$v = \frac{E^2E'^2\sqrt{E'^4 + E^4}.\sqrt{2g(H' - M)}}{L(E'^4H' + E^4M)};$$

$$v' = \frac{E^2E'^2\sqrt{2g(H'-M)}}{H'L.\sqrt{E'^4+E^4}}.$$

Se ora si cerca il valore di H' affinchè v e v' siano massimi, si trova che v è massimo quando

$$H' = 2M + \frac{E^4}{E'^4}M ;$$

e che v' è massimo quando

$$H' = 2M :$$

perciò quando la velocità media è massima nel tronco superiore, non lo è nel tronco successivo.

17. Oltre lo sbocco, supposto invariabile, e la luce ora considerata, si concepisca un'altra luce posta attraverso il canale ed a superiore e conveniente distanza da quella già esistente, in modo che il canale sia diviso in tre tronchi: indichiamo colle stesse lettere segnate con due accenti le quantità relative alla nuova luce ed al tronco superiore del canale; e siano le luci costituite in modo che l' efflusso da ciascuna di esse si faccia tutto nell' acqua: fatte le opportune riduzioni, ed espressa la velocità media di ciascun tronco per l' altezza H'' del tronco superiore avremo

$$v = \frac{E^2E'^2E''^2.P^4.\sqrt{2g(H''-M)}}{L[E'^4E''^4H''+E^4(E'^4+E''^4)M]};$$

$$v' = \frac{E^2E'^2E''^2.P^4.\sqrt{2g(H''-M)}}{L[E''^4(E'^4+E^4)H''+E^4E'^4M]};$$

$$v'' = \frac{E^2E'^2E''^2.\sqrt{2g(H''-M)}}{P^4.H''L};$$

ove $P^4 = \sqrt{E^4E'^4 + E^4E''^4 + E'^4E''^4}$, ed $M = D + a + k$. Affinchè v, v' e v'' sieno rispettivamente massimi, dovrà essere

$$\text{per } v \;\ldots\; H'' = 2M + \frac{E^4(E'^4+E''^4)M}{E'^4E''^4};$$

$$\text{per } v' \;\ldots\; H'' = 2M + \frac{E^4E'^4M}{E''^4(E^4+E'^4)}:$$

$$\text{per } v'' \ldots H'' = 2M.$$

Dal che si vede che per avere nel tronco superiore la massima velocità v'', si richiede un' altezza d'acqua H'' minore di quella che è necessaria per render massima la velocità media negli altri successivi tronchi del canale. Così pure per render massima la velocità v' del secondo tronco, si richiede un' altezza H'' minore di quella che rende massima la velocità v dell' ultimo tronco. Si vede ancora che l' altezza $H'' = 2M$ che rende massima la velocità v'' del tronco superiore non dipende se non dalla quantità $D + a + k$ relativa allo sbocco. Ma affinchè il valore $H'' = 2M$ soddisfaccia alla condizione che l'altezza di ciascuna luce rimanga tutta sotto la superficie dell' acqua contenuta nel successivo tronco del canale, si deve osservare che le altezze dell' acqua nei tre tronchi sono

$$H'' = 2M;$$

$$H' = 2M - \frac{E^4E'^4M}{P^8};$$

$$H = 2M - \frac{F'^4E''^4M}{P^8};$$

e che perciò dovrà essere

$$H > M, \text{ ed anche } > D' + a'$$

$$H' > H, \text{ ed anche } > D'' + a'';$$

cioè dovranno venir soddisfatte le condizioni seguenti

$$M > \frac{D' + a'}{2 - \frac{E'^4E''^4}{P^8}}; \quad E''^2 > E^2; \quad M > \frac{D'' + a''}{2 - \frac{E'^4E^4}{P^8}}.$$

18. Consideriamo finalmente il caso in cui lo sbocco è formato da uno stramazzo, ossia da una luce rettangola e verticale, la cui larghezza può essere eguale a quella del canale, o minore della medesima, ma la cui altezza è indefinita in modo che non vi è mai battente sopra l'altezza effettiva dell' acqua che sbocca. In questo caso la superficie della corrente

all' avvicinarsi allo sbocco s' incurva e s' abbassa più o meno secondo la larghezza della luce e l' altezza della medesima occupata dall' acqua. Ma la portata (1) della luce è in ogni caso eguale a quella che si ottiene dalla formula ordinaria per le luci rettangole e verticali, nella quale si faccia zero il battente, e si prenda per l' altezza della luce quella a cui ascende l' acqua nel ramo verticale di un tubo munito di un ramo orizzontale, la cui apertura è immersa nell' acqua che passa dalla luce e ne è direttamente imboccata, contando quest' altezza dalla base ossia dal lato inferiore della luce.

L' acqua poi nel ramo verticale di questo tubo s' alza in ogni caso sensibilmente allo stesso piano della superficie dell' acqua nel canale, presa a conveniente distanza dalla luce, cioè al di sopra della chiamata sensibile dello sbocco, la quale superficie può aversi per orizzontale per tutta la rimanente parte superiore del canale. Questa osservazione e questa regola si possono estendere a tutte le luci senza battente stabilite attraverso a canali orizzontali assai lunghi.

Ciò posto sia l la larghezza della luce, ed a l'altezza alla quale salirebbe l' acqua nel ramo verticale del tubo; la portata, supposto libero l' efflusso, sarà

$$Q = \frac{2}{3} \mu a l \sqrt{2ag}:$$

e per le sezioni del canale prese a conveniente distanza dallo sbocco, e tali che le altezze loro siano sensibilmente eguali tra loro, si avrà

$$Q = H L v,$$

H essendo l' altezza di queste sezioni, e v la loro velocità media: inoltre essendo D l' altezza dello stramazzo, ossia del lato inferiore della luce sopra il fondo del canale, si avrà per ciò che precede,

---

(1) Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino Tom. XXVIII. pag. 285. Classe di Scienze fisiche e matematiche.

$$D + a = H;$$

e quindi

$$v = \frac{2\mu l\sqrt{2g}\,(H - D)^{\frac{3}{2}}}{3HL};$$

$$Q = \frac{2}{3}\,\mu l\sqrt{2g}.(H - D)^{\frac{3}{2}}.$$

Queste equazioni esprimono la legge, con cui la velocità media e la portata del canale variano da uno stato permanente all'altro. La velocità v è minima quando $H = D$, e cresce crescendo H, cosicchè quando H è assai grande a confronto di D, si ha

$$v = \frac{2\mu l\sqrt{2gH}}{3L}; \qquad Q = \frac{2\mu l H\sqrt{2gH}}{3}.$$

Perciò negli stati permanenti, ne' quali l'altezza della corrente è assai grande rispetto alla quantità D, le velocità medie sono proporzionali alle radici delle altezze, ed i quadrati delle portate sono come i cubi delle medesime altezze.

Se $D = 0$, queste relazioni sono vere qualunque sia l'altezza dell'acqua nel canale. E siccome nella precedente espressione di v relativa a questo caso, la ragione $\frac{l}{L}$ può avere qualunque valore compreso tra lo zero e l'unità, ne segue che l'equazione tra la velocità media e la radice dell'altezza sussiste anche quando le velocità medie sono per quanto si voglia piccole. Questa relazione tra le velocità medie e le radici delle altezze, la quale è conforme alla nota regola generalmente proposta dal celebre Domenico Guglielmini, si deduce pure dalla teoria del moto uniforme dell'acqua negli alvei inclinati, nel quale si ha riguardo alla resistenza: ma in questa teoria il moto della corrente deve essere assai rapido per poterne ottenere una simile relazione (1). Laddove nel caso del canale orizzontale e dello sbocco da noi contemplato la velocità dell' acqua nel canale può essere picciolissima, e la relazione tra questa e l' altezza è indipendente dalla legge della resistenza.

19. Sin quì abbiamo considerato la luce, che serve di sbocco al canale, di figura rettangola. Sia ora questa luce un triangolo isoscele verticale, indefinitamente aperto all' insù co' suoi due lati, e col vertice posto sul fondo ed alla metà della larghezza del canale. Dal vertice s' alzi una verticale, e sia *m* l' angolo che essa fa col lato del triangolo, e consideriamo l' efflusso da questo triangolo senza battente ed a libera caduta.

Chiamando H l' altezza dell' acqua nel canale, presa a conveniente distanza dallo sbocco, e dove la superficie della corrente è sensibilmente orrizzontale, la portata della luce, per ciò che si è osservato al n.° 18. sarà

$$Q = \frac{8\mu}{15} . \ \text{tang}. m . \sqrt{2g} . H^2 \sqrt{H} ;$$

e questo valore varrà da $H = 0$ sino ad $H = \frac{L}{2 \, tang. m}$, come si può facilmente vedere, L essendo la larghezza del canale. Si ha ancora

$$Q = HLv :$$

pertanto

$$v = \frac{8\mu . \text{tang} \ m \sqrt{2g} . H \sqrt{H}}{15L} .$$

Perciò con questo sbocco, ne' diversi stati permanenti del canale compresi tra $H = 0$ ed $H = \frac{L}{2 \, tang. m}$, i quadrati delle velocità medie sono come i cubi delle altezze dell'acqua, ed i quadrati delle portate sono come le quinte potenze delle medesime altezze.

---

(1) Elementi di Meccanica e d'Idraulica di Giuseppe Venturoli. Milano 1818. vol. 2.° n.° 332.

20. Consideriamo ora il caso in cui la sezione del canale è un triangolo isoscele col vertice in giù, e la luce per cui l'acqua sbocca, è parimente un triangolo isoscele col vertice in giù e posto sul fondo del canale, come nel caso del precedente n.° 19, e del qual triangolo conserveremo le denominazioni ivi adoperate. Chiamando n l'angolo che fa la verticale condotta dal vertice della sezione del canale col lato della sezione medesima, sia $n > m$. Per un' altezza H dell'acqua nel canale, presa a conveniente distanza dalla luce, la portata di questa è

$$Q = \frac{8}{15}\mu \,\mathrm{tang}.m.\sqrt{2g}.H^2\sqrt{H};$$

e la portata del canale essendo

$$Q = H^2 v.\,tang.\,n,$$

si ricava

$$v = \frac{8\mu\,\mathrm{tang}.m.\sqrt{2g}\,\sqrt{H}}{15\,\mathrm{tang}.n}.$$

Pertanto in tutti gli stati permanenti del canale le velocità medie sono tra loro come le radici delle altezze, ed i quadrati delle portate sono tra loro come le medesime altezze innalzate alla quinta potenza.

21. Le relazioni tra le velocità medie, le portate e le altezze dell'acqua nel canale possono esprimersi analiticamente in un modo assai semplice e generale, qualunque sia la figura della sezione del canale, e quella della luce per cui l'acqua sbocca. Ed affinchè l'efflusso dello sbocco sia unicamente dovuto alla pressione, facciamo terminare il canale in una vasca assai ampia di figura qualunque che per maggiore semplicità supporremo rettangola. Il fondo di questa vasca sia sullo stesso piano orizzontale del fondo del canale; e si concepisca che nella parete della vasca, la quale sarebbe incontrata dall' asse del canale prolungato, venga aperta una luce vertica-

le, il cui profilo sia una curva simmetrica rispetto al suo asse verticale, e la cui apertura cominci dal fondo stesso della vasca. Parimente il profilo della sezione del canale sia una curva qualunque simmetrica rispetto alla verticale, che divide per metà la sezione.

Ciò posto, ridotto il movimento in istato di permanenza, supponiamo che la superficie dell' acqua sia e si conservi, ne' diversi stati permanenti, allo stesso livello di quella della vasca, l' una e l' altra essendo orizzontali: e siccome la sezione della vasca può farsi grandissima rispetto alla luce aperta nella sua parete, l' efflusso dalla luce sarà dovuto alla sola pressione.

Sia H l' altezza dell' acqua sopra il fondo del canale e della vasca, ed

$$y = f . x$$

l' equazione del profilo della luce, essendo f una funzione qualunque delle ascisse x, prese sull' asse verticale del profilo, coll' origine sul piano orizzontale del fondo del canale e della vasca, supposto fisso ed invariabile nella sua posizione. L' efflusso essendo libero, e la luce senza battente, la portata sarà

$$Q = 2\mu\sqrt{2g} . \int y dx \sqrt{H - x},$$

l' integrale dovendo prendersi da $x = 0$ sino ad $x = H$. Nell' istesso modo sia

$$Y = F . H$$

l' equazione del profilo della sezione del canale, simmetrico intorno all' asse delle H, l' origine delle quali è sul fondo del canale. Chiamando v la velocità media della corrente, la portata del canale sarà

$$Q = 2v . \int Y dH,$$

l' integrale essendo preso da $H = 0$ sino ad $H = H$. Da questi valori di Q si deduce

$$(F) \qquad v = \mu \sqrt{2g} . \frac{\int y dx \sqrt{H - x}}{\int Y dH},$$

i limiti degli integrali essendo $x=0$, $x=\mathrm{H}$, ed $\mathrm{H}=0$, $\mathrm{H}=\mathrm{H}$. Date le equazioni dei profili della luce dello sbocco, e della sezione del canale, gli integrali contenuti nella equazione (F) saranno funzioni determinate di H, e perciò questa equazione darà la relazione tra la velocità media della corrente e l'altezza dell'acqua nei diversi stati permanenti del canale.

22. Ma quì, data la luce dello sbocco, noi ci serviremo dell'equazione (F) per determinare il profilo della sezione del canale in modo che esista una relazione data tra la velocità media e l'altezza della corrente. Poichè si conosce la luce dello sbocco, la portata

$$\mathrm{Q}=2\mu\sqrt{2g}.\int y\,dx\sqrt{\mathrm{H}-x}$$

sarà una funzione nota di H, che chiameremo $\Psi.\mathrm{H}$, cosicchè sia

$$\mathrm{Q}=\Psi.\mathrm{H}.$$

Se adesso deve essere $v=\varphi.\mathrm{H}$, essendo φ una funzione data di H, l'equazione (F) diventerà

$$v=\varphi.\mathrm{H}=\frac{\Psi.\mathrm{H}}{2\int \mathrm{Y}d\mathrm{H}}.$$

Da questa equazione, ricavato il valore di $\int \mathrm{Y}d\mathrm{H}$, e presone il differenziale rispetto ad H, si ottiene

$$\mathrm{Y}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\varphi}\cdot\frac{d\Psi}{d\mathrm{H}}-\frac{\Psi}{\varphi^2}\cdot\frac{d\varphi}{d\mathrm{H}}\right];$$

e questa sarà la cercata equazione del profilo della sezione del canale.

Sia, per primo esempio, la luce dello sbocco un rettangolo verticale della larghezza $2l$, indefinitamente aperto all'insu, cosicchè sia $y=l$, e si domandi il profilo della sezione del canale, affinchè la velocità media della corrente sia costante ed $=\mathrm{V}$ in qualunque stato permanente del canale. Si avrà

$$\mathrm{Q}=\Psi.\mathrm{H}=\frac{4\mu l\sqrt{2g}.\mathrm{H}\sqrt{\mathrm{H}}}{3};$$

$$v = \varphi.\mathrm{H} = \mathrm{V} = \mathrm{cost}.$$

e quindi

$$\mathrm{Y} = \frac{\mu l \sqrt{2g}.\sqrt{\mathrm{H}}}{\mathrm{V}}.$$

Questà equazione che è quella di una parabola col vertice in giù, darà il profilo della sezione del canale, mediante il quale in qualunque stato permanente del medesimo la velocità media rimarrà costante. È chiaro che questa velocità sarà sempre la stessa, qualunque sia H, purchè maggiore dello zero; poichè si vede che quando $\mathrm{H} = 0$, la portata del canale e della luce svaniscono, e più non sussiste l' equazione (F), non potendo esservi velocità dove non vi è corrente.

Quindi nel caso presente la velocità media v è una tale funzione di H, che essa non ha valore alcuno quando $\mathrm{H}=0$, ed ha un valore costante ed $= \mathrm{V}$ quando $\mathrm{H} > 0$, qualunque sia il valore di H. Si trovano non rari esempj di funzioni di simile natura nell'analisi e nelle sue applicazioni alla Fisica.

Per secondo esempio sia la luce dello sbocco un triangolo isoscele col vertice in giù; sarà l' equazione del suo profilo

$$y = x.\mathrm{tang}.m,$$

essendo m l' angolo formato dalla verticale, che passa pel vertice, col lato del triangolo. Si avrà quindi

$$\mathrm{Q} = \Psi.\mathrm{H} = \frac{8}{15}\mu\mathrm{tang}.m.\sqrt{2g}.\mathrm{H}^2\sqrt{\mathrm{H}};$$

$$v = \varphi.\mathrm{H} = \frac{4\mu\mathrm{tang}.m\sqrt{2g}.\mathrm{H}^2\sqrt{\mathrm{H}}}{15\int \mathrm{Y}d\mathrm{H}}.$$

Se ora si vuole che questa velocità media sia sempre proporzionale all' altezza H, si farà

$$v = \varphi.\mathrm{H} = \mathrm{BH},$$

essendo B un coefficiente dato e costante. Da questi valori si otterrà

$$\mathrm{Y} = \frac{2\mu\mathrm{tang}.m\sqrt{2g}\sqrt{\mathrm{H}}}{5.\mathrm{B}}.$$

per l' equazione del profilo della sezione del canale, il quale è una parabola col vertice in giù.

Se in questo stesso caso della luce triangolare si cerca qual debba essere il profilo della sezione del canale, affinchè la velocità media della corrente sia costante ed $= \mathrm{V}$, si troverà per l' equazione del cercato profilo

$$\mathrm{Y} = \frac{2\mu \,\mathrm{tang}.m \sqrt{2g}.\mathrm{H}\sqrt{\mathrm{H}}}{3\mathrm{V}}.$$

Sia, per terzo esempio,

$$y = \mathrm{A}x^2$$

l' equazione del profilo della luce dello sbocco, essendo A una quantità data e costante, e si cerchi il profilo della sezione del canale, affinchè la velocità media di questa sia espressa dall' equazione

$$v = \mathrm{BH}^n,$$

ove B è un coefficiente dato e costante, ed n è un esponente costante indeterminato. Si avrà

$$\mathrm{Q} = \Psi.\mathrm{H} = \frac{32\mathrm{A}\mu\sqrt{2g}\,\mathrm{H}^3\sqrt{\mathrm{H}}}{105};$$

$$v = \varphi.\mathrm{H} = \mathrm{BH}^n;$$

e quindi

$$\mathrm{Y} = \frac{8(7-2n).\mathrm{A}\mu\sqrt{2g}.\mathrm{H}^{\frac{5}{2}-n}}{105.\mathrm{B}}$$

sarà la cercata equazione del profilo della sezione del canale.

Da questa espressione di Y si vede che l' esponente n può avere qualunque valore negativo, e tutti i valori positivi non maggiori di $\frac{5}{2}$ senza che il valore di Y diventi infinito quando è $\mathrm{H} = 0$: perciò per tutti questi valori il fondo del canale avrà una larghezza finita.

Posti pertanto per n i valori $-\frac{1}{2}$; -1; -2; ec. si avranno le equazioni

$$v = \frac{B}{\sqrt{H}}\,;\quad Y = \frac{64.A\mu\sqrt{2g}.H^3}{105.B}:$$

$$v = \frac{B}{H}\,;\quad Y = \frac{24.A\,\mu\sqrt{2g}.H^3\sqrt{H}}{35.\,B}.$$

$$v = \frac{B}{H^2}\,;\quad Y = \frac{88.A.\mu\sqrt{2g}.H^4\sqrt{H}}{105.B}\,;$$

ecc.

E prendendo per *n* i valori positivi $0\,;\frac{1}{2}\,;\ 1\,;\frac{3}{2}\,;\ 2\,;\frac{5}{2}$, si hanno le equazioni

$$v = B = \text{cost.}\,;\quad Y = \frac{56.A.\mu\sqrt{2g}.H^2\sqrt{H}}{105.B}:$$

$$v = B\sqrt{H};\qquad Y = \frac{24.A.\mu\sqrt{2g}.H^2}{35.B}:$$

$$v = BH\,;\qquad Y = \frac{40.A\mu\sqrt{2g}.H\sqrt{H}}{105.B}:$$

$$v = BH\sqrt{H};\qquad Y = \frac{32.A.\mu\sqrt{2g}.H}{105.B}:$$

$$v = BH^2;\qquad Y = \frac{8.A\mu\sqrt{2g}\,\sqrt{H}}{35.B}:$$

$$v = BH^2\sqrt{H}\,;\qquad Y = \frac{16.\,A\mu\sqrt{2g}}{105.B}.$$

Per tutti questi valori la portata del canale è sempre data dall' equazione

$$Q = \frac{32.A\mu\sqrt{2g}.H^3\sqrt{H}}{105}.$$

23. Questi esempj bastano per dimostrare come nei canali orizzontali le relazioni della velocità media e della portata all' altezza siano diverse ne' diversi canali secondo i profili delle sezioni de' canali, e quelli delle aperture che servono di sbocco alle acque. Si vede ancora che per un medesimo canale queste relazioni possono rimanere le stesse tra certi limiti dell' altezza dell' acqua, e poi essere diverse quando

l' altezza non è più compresa tra quei limiti. E queste variazioni possono moltiplicarsi indefinitamente in un medesimo canale, poichè esse dipendono dai profili della sezione del canale, e della luce dello sbocco, i quali possono avere una forma qualunque soggetta o no alla legge di continuità.

Così se la sezione è un rettangolo verticale, e la luce dello sbocco è pure un rettangolo verticale, la cui larghezza è l, ed a l' altezza, ed il cui lato inferiore è sul fondo stesso del canale, si è veduto (n.° 18) che essendo libero lo sbocco, si ha da $\mathrm{H} = 0$ sino ad $\mathrm{H} = a$,

$$v = \frac{2\mu l \sqrt{2g\mathrm{H}}}{3\mathrm{L}};$$

ove H è l' altezza, ed L la larghezza della sezione dell' acqua nel canale. Quando poi l' altezza H cresce, e forma un battente $b = \mathrm{H} - a$ sopra il lato superiore della luce dello sbocco, si ha (n.° 6)

$$v = \frac{2\mu l \sqrt{2g}.\left[\mathrm{H}^{\frac{3}{2}} - (\mathrm{H}-a)^{\frac{3}{2}}\right]}{3\mathrm{HL}}$$

e finalmente quando H è grandissimo rispetto ad a, si ha (n.° 8)

$$v = \frac{\mu a l \sqrt{2g}}{\mathrm{L}\sqrt{\mathrm{H}}}.$$

Dalle quali espressioni si vede che ne' diversi stati permanenti del canale la ragione della velocità media all' altezza segue in questo caso leggi assai diverse tra loro.

Sia, per altro esempio, la luce dello sbocco un rettangolo verticale della larghezza l, col lato inferiore sul fondo del canale, ed indefinitamente aperto all' insù. La sezione del canale sia un trapezio, la cui larghezza, o base minore, posta sul fondo, si dica L, l' altezza H', ed n' l' angolo del suo lato colla verticale. Sopra questo trapezio ne esista un altro, la cui base inferiore e minore sia $\mathrm{L} + 2\mathrm{H}'\mathrm{tang}.n' + 2\lambda$, essendo λ una quantità data, H'' ne sia l' altezza, ed n'' l' angolo del suo lato colla verticale. È facile il vedere, che quando l' altezza dell' acqua nel canale è compresa tra H$=$o ed H$=$H', si ha per la velocità media della corrente nel canale

$$v = \frac{2\mu l\sqrt{2g}.\sqrt{\text{H}}}{3[\text{L}+\text{H}\,\text{tang}.n']}.$$

Quando poi l'altezza dell'acqua sarà compresa tra H$=$H', ed H$=$H'', si avrà

$$v = \frac{2\mu l\sqrt{2g}(\text{H}'+h)^{\frac{3}{2}}}{3[\text{H}'(\text{L}+\text{H}'\text{tang}.n')+h(\text{L}+2\text{H}'\text{tang}.n'+h\,\text{tang}.n''+2\lambda)]},$$

e questa equazione varrà da $h=$o sino ad $h=$H''.

24. In generale sia la luce dello sbocco indefinitamente aperta all'insù, e formata da una serie di curve diverse l'una dall'altra, le quali, per maggiore semplicità, supporremo simmetriche rispetto ad un asse comune verticale, che divide per metà la luce; e siano le equazioni di queste curve

$$y'=f'.x';\ y''=f''.x'';\ y'''=f'''.x''',\ \ldots.$$

f', f'', f'''.... essendo funzioni date delle rispettive ascisse x', x'', x''.... prese sull'asse verticale; e sia H l'altezza qualunque dell' acqua nel canale. Inoltre per la prima curva le ascisse x' comincino dal fondo del canale, al cui piano comincia pure l' apertura dello sbocco, ed il valore di y' valga da $x'=$o sino ad $x'=h'$; per la seconda curva sia $x''=$o quando $x'=h'$, e valga il valore di y'' da $x''=$o sino ad $x''=h''$; per la terza curva sia $x'''=$o quando $x''=h''$, ed il valore di y''' valga da $x'''=$o sino ad $x'''=h'''$; e così di seguito. Sarà la portata della luce

$$\text{Q}=2\mu\sqrt{2g}\left[\int_0^{h'} y'dx'\sqrt{\text{H}-x'}+\int_0^{h''} y''dx''\sqrt{\text{H}-h'-x''}\right.$$
$$\left.+\int_0^{h'''} y'''dx'''\sqrt{\text{H}-h'-h''-x'''}+\ldots\ldots\right];$$

ove $\int_0^{h'}$ indica l' integrale preso da $x'=$o sino ad $x'=h'$.

Similmente il profilo della sezione del canale sia formato dalla serie delle curve

$$Y'=F'.z'; \; Y''=F''.z''; \; Y'''=F'''.z'''; \ldots .$$

cosicchè per la prima curva, principiando le z' dal fondo, l'ordinata Y' valga da $z'=0$ sino a $z'=H'$; per la seconda curva, essendo $z''=0$ quando $z'=H'$, l'ordinata Y'' valga da $z''=0$ sino a $z''=H''$, e così di seguito, H', H'', ... essendo le rispettive altezze delle curve, simmetriche rispetto all'asse verticale delle z che divide per metà la sezione del canale. Si avrà per la portata della sezione

$$Q = 2v. \left[\int_0^{H'} Y'dz' + \int_0^{H''} Y''dz'' + \int_0^{H'''} Y'''dz''' + \ldots \right].$$

E quindi

$$(G) \quad v = \frac{\mu\sqrt{2g}\left[\int_0^{h'} y'dx'\sqrt{H-x'} + \int_0^{h''} y''dx''\sqrt{H-h'-x''} + \ldots\right]}{\int_0^{H'} Y'dz' + \int_0^{H''} Y''dz'' + \ldots}.$$

E siccome l'altezza totale H della corrente è data, si saprà in ogni caso sino a che curva ed a che ascissa della medesima arriverà la superficie dell'acqua nel profilo della luce e nel profilo della sezione, e perciò sarà noto il numero degli integrali che si dovranno prendere nell'espressione di v, e saranno determinati i limiti degli integrali estremi.

25. Nel dedurre l'equazione (F) (n.° 21.) la quale dà il valore della velocità media della corrente nel canale in funzioni dell'altezza H, noi abbiamo supposto che in qualunque stato permanente la superficie dell'acqua nel canale si componga allo stesso livello della superficie dell'acqua nella vasca ove termina il canale, e nella cui parete è aperto lo sbocco. L'eguaglianza di questi due livelli può essere vera o assai prossima al vero, quando la corrente nel canale non ha velocità molto grande. Ma quando questa è considerabile, l'osservazione mostra che il livello dell'acqua nella vasca si tiene più alto del livello della superficie della corrente nel canale. Siccome però la differenza di questi livelli è in gene-

rale una funzione della velocità stessa della corrente nel canale, è chiaro che quando sia nota questa funzione, si otterrà facilmente una equazione analoga alla (F), la quale servirà alle stesse determinazioni per le quali si è adoperata quest' ultima.

Infatti sia H l'altezza della corrente nel canale, ed $H+h$ l'altezza dell'acqua nella vasca, sarà $H+h$ l'altezza dalla quale dipende l'efflusso dalla luce dello sbocco. Perciò ritenendo le altre denominazioni del n.° 21, si avrà

$$Q = 2\mu\sqrt{2g}.\int y dx\sqrt{H+h-x},$$

l'integrale dovendo prendersi da $x=0$ sino ad $x=H+h$, la portata del canale sarà

$$Q = 2v\int Y dH,$$

i limiti di questo integrale essendo $H=0$, $H=H$. Quindi ne viene

$$v = \frac{\mu\sqrt{2g}.\int y dx\sqrt{H+h-x}}{\int Y dH}.$$

Ora qualunque sia il valore di h in funzione di v, l'integrale $\int y dx\sqrt{H+h-x}$, in cui questa funzione è costante, si potrà sempre ottenere, data la y in x. Sia dunque

$$\int_0^{H+h} y dx\sqrt{H+h-x} = \Psi(H+h),$$

essendo Ψ una funzione nota di $H+h$; sarà

$$v = \frac{\mu\sqrt{2g}.\Psi(H+h)}{\int Y dH}.$$

Ma è $h=\Pi.v$, Π essendo una funzione data; pertanto

$$v = \frac{\mu\sqrt{2g}\Psi(H+\Pi.v)}{\int Y dH}.$$

Se adesso si cerca qual debba essere il profilo $Y=F.H$ della sezione del canale, affinchè la velocità media v sia eguale ad una data funzione $\varphi.H$ dell'altezza dell'acqua nel canale, si avrà l'equazione

$$v = \varphi.\mathrm{H} = \frac{\mu\sqrt{2g}.\Psi(\mathrm{H}+\Pi\, v)}{\int \mathrm{Y}d\mathrm{H}}.$$

ossia, poichè $\Pi.v = \Pi(\varphi\mathrm{H}) = \Theta.\mathrm{H}$, essendo Θ una funzione nota, sarà

$$v = \varphi.\mathrm{H} = \frac{\mu\sqrt{2g}.\Psi(\mathrm{H}+\Theta.\mathrm{H})}{\int \mathrm{Y}d\mathrm{H}};$$

cioè

$$\int \mathrm{Y}d\mathrm{H} = \frac{\mu\sqrt{2g}\Psi(\mathrm{H}+\Theta.\mathrm{H})}{\varphi.\mathrm{H}};$$

la quale espressione differenziata rispetto ad H, darà il cercato profilo $\mathrm{Y} = \mathrm{F}.\mathrm{H}$ affinchè sia $v = \varphi.\mathrm{H}$. Per modo d'esempio sia $y = l$ l'equazione del profilo della luce dello sbocco, l essendo costante; e prendasi $h = \Pi.v = mv^2$, funzione conforme alla teoria ed indicata dalle osservazioni, m essendo un coefficiente costante; e sia finalmente $\varphi.\mathrm{H} = v = p\sqrt{\mathrm{H}}$, ove p è un coefficiente costante: si troverà pel profilo della sezione del canale l'equazione

$$\mathrm{Y} = \frac{2\mu l\sqrt{2g}.(1+mp^2)^{\frac{3}{2}}}{3p};$$

Cioè la sezione sarà un rettangolo la cui larghezza sarà doppia di questo valore di Y. Se si trascura l'altezza h rispetto ad H; cioè se si fa $m = 0$, la sezione del canale sarà ancora un rettangolo la cui larghezza sarà $\frac{4\mu l\sqrt{2g}}{3p}$.

Conservando lo stesso profilo della luce dello sbocco, e l'istesso valore di h in v, si cerchi il profilo della sezione del canale, affinchè la velocità media della corrente sia sempre costante ed $=$ V: si arriverà all'equazione

$$\int \mathrm{Y}d\mathrm{H} = \frac{2\mu l\sqrt{2g}.(\mathrm{H}+m\mathrm{V}^2)^{\frac{3}{2}}}{3\mathrm{V}},$$

dalla quale si ricava

$$Y = \frac{\mu l \sqrt{2g} \cdot \sqrt{H + mV^2}}{V} ,$$

equazione di una parabola, il cui vertice è all' ingiù e sotto il piano del fondo del canale, e la cui ordinata, quando $H = 0$, cioè al fondo del canale, è $= \mu l \sqrt{2gm}$. Se $m = 0$, si avrà la parabola trovata al n.° 22.

26. Ciò che si è detto sin quì sui canali orizzontali, è visibilmente applicabile a que' tratti dei canali inclinati, nei quali le acque, nei diversi stati permanenti che si considerano, rimangono rigurgitate, e colla superficie superiore sensibilmente orizzontale.

Infatti sia ω l' angolo che fa la direzione del fondo del canale coll' orizzonte, e supponiamo che si chiuda il canale con un piano solido verticale, in cui sia praticata un' apertura rettangola e verticale. Si chiami l la larghezza di questa apertura, e sia $l < L$, essendo L la larghezza del canale, il quale si suppone di sponde verticali e parallele tra loro. Siccome l' apertura per cui deve passare tutta la portata del canale, è minore della sezione del medesimo, la corrente soffrirà un rigurgito, il quale si estenderà all' insù per un certo tratto, costante per uno stesso stato permanente del canale, e variabile da uno stato all' altro. Inoltre la superficie dell' acqua nel tratto del rigurgito si comporrà in un piano sensibilmente orizzontale, al quale si accosterà sempre più a misura che l' area dell' apertura sarà più piccola a paragone della sezione naturale della corrente.

Ciò posto, chiamando a l' altezza della superficie orizzontale dell' acqua sopra il lato inferiore dell'apertura, il quale coincide col fondo stesso del canale al sito ove essa apertura è stabilita, sarà la portata dell' apertura, ridotto il moto a stato di permanenza, e supposto libero l'efflusso,

$$Q = \tfrac{2}{3} \mu l \sqrt{2g} \cdot a \sqrt{a} .$$

Se ora si considera una sezione del canale presa nel tratto in

Tomo XIX. 76

cui le acque sono rigurgitate, e posta alla distanza orizzontale E dall'apertura, e si chiama H l'altezza dell'acqua in questa sezione, si vedrà essere

$$H + E\ \text{tang.}\,\omega = a\,;$$

e perciò

$$Q = \tfrac{2}{3}\,\mu l\sqrt{2g}.\,(H + E.\ \text{tang.}\omega)^{\frac{3}{2}}\,.$$

Ma si ha pure, nella sezione che si considera,

$$Q = HLv\,:$$

Pertanto l' equazione

$$v = \frac{2\mu l\sqrt{2g}\,[H + E.\text{tang.}\omega]^{\frac{3}{2}}}{3HL}\,.$$

esprimerà la relazione tra la velocità media e l'altezza dell' acqua nella sezione posta alla distanza E dall'apertura. Questa relazione però non sussisterà più quando sarà $H = 0$, e quando, nello stato permanente che si considererà, quella sezione non sarà più compresa nel tratto per cui si estende il rigurgito. Si vede ancora che nella stessa sezione la velocità media sarà minima, quando si avrà

$$H = 2E.\ \text{tang.}\omega\,;$$

purchè per questo valore di H la sezione rimanga nel tratto occupato dal rigurgito.

27. Nelle applicazioni dell'equazione

$$(F) \qquad v = \mu\sqrt{2g}\,.\,\frac{\int y\,dx\sqrt{H - x}}{\int Y\,dH}$$

esposte al n.° 22. ci siamo limitati alla ricerca del profilo della sezione del canale, affinchè la velocità media della corrente sia eguale ad una funzione data dell' altezza dell'acqua, supponendo dato il profilo della luce dello sbocco, che è quanto dire, supponendo data la portata del canale in funzione dell'altezza dell' acqua.

Ma si può proporre una ricerca più generale, quale è quella di determinare i profili della sezione del canale, e della luce dello sbocco, affinchè la velocità media, e la portata della sezione siano, ne' diversi stati permanenti del canale, rispettivamente eguali a funzioni date dell'attezza dell'acqua. A questa ricerca più non serve l'equazione (F). Infatti nel formare questa equazione (n.° 21.) si è preso per piano invariabile e fisso il piano orizzontale che passa pel fondo del canale: le ascisse delle curve che rappresentano i profili della luce dello sbocco, e della sezione del canale, hanno la loro origine su questo piano, e crescono positivamente dal basso all'alto verso la superficie della corrente, il cui piano, sempre parallelo a quello del fondo, è più o meno distante dal medesimo secondo le varie altezze dell'acqua nel canale.

La pressione poi cui è dovuta la velocità dell' efflusso dalla luce dello sbocco, ha necessariamente l' origine alla superficie suprema dell'acqua, e cresce positivamente dall'alto al basso verso il fondo del canale. Quindi è che, quantunque le equazioni dei profili della luce dello sbocco e della sezione del canale abbiano l' origine sul piano fisso del fondo, e per ascisse le altezze dell'acqua sopra questo piano, e perciò le ordinate y ed Y siano funzioni delle altezze H; tuttavia nell' equazione del profilo della luce dello sbocco si è dovuto introdurre la variabile ausiliare x, la quale, presa sull'asse delle ascisse H, serve unicamente ad esprimere la velocità $\sqrt{2g(\mathrm{H}-x)}$ di un elemento qualunque $2ydx$ della luce posto all' altezza x dal fondo, ossia alla profondità $\mathrm{H}-x$ sotto la superficie dell' acqua: data poi la funzione y in x, e fatta l' integrazione del termine $\int ydx\sqrt{\mathrm{H}-x}$ da $x=0$ sino ad $x=\mathrm{H}$, la variabile x sparisce, e l' integrale si riduce ad una funzione determinata dell' altezza H.

Ora se si osserva che nell'integrare il termine $\int ydx\sqrt{\mathrm{H}-x}$ si deve riguardare H come costante sinchè non è fatta l' integrazione, e che questa non può eseguirsi se non è data la

y in x; se si osserva inoltre che lo stesso integrale rappresenta la portata della luce e del canale, e che perciò quando questa portata è data in funzione di H, converrebbe differenziare $\int y dx \sqrt{H-x}$ rispetto ad H per liberare l' ordinata y dal segno integrale, ed averne il valore in funzione di H; se si osserva finalmente che mediante questa differenziazione non verrebbe eliminato il segno integrale, il quale si riferisce alla variabile x, di cui y è funzione sinchè non è eseguita l' integrazione; si vedrà che l' equazione (F) non può servire alla determinazione dei profili della luce dello sbocco e della sezione del canale, affinchè la portata e la velocità media della corrente siano rispettivamente eguali a funzioni date dell' altezza H.

28. Per ottenere pertanto espressioni generali della portata e della velocità media della sezione del canale, atte a somministrare la proposta determinazione, è d' uopo che la pressione, e le coordinate dei profili della luce dello sbocco e della sezione del canale abbiano la stessa origine. Ora l' origine della pressione è necessariamente alla superficie superiore dell' acqua, e non si può prendere altrove: perciò il piano di questa superficie sarà l' origine comune della pressione e delle coordinate dei profili dei quali si tratta.

Preso adunque questo piano per fisso ed invariabile, la pressione e le altezze dell' acqua cresceranno dall' alto al basso, cioè dalla superficie al fondo, e noi le prenderemo positive in questa direzione. Ciò posto, e ritenuto quanto si è detto al n.° 21. circa il canale ed il modo con cui è stabilita la luce del suo sbocco, siano

$$y = f.\,H\,, \qquad Y = F.\,H\,,$$

le equazioni dei profili della luce dello sbocco e della sezione del canale supposti simmetrici rispetto all' asse verticale che divide per metà la sezione del canale e l' apertura dello sbocco. La portata della luce dello sbocco sarà

$$Q = 2\mu\sqrt{2g}.\int y dH\sqrt{H};$$

e quella della sezione del canale

$$Q = 2v\int Y dH;$$

le quali eguagliate tra loro danno

$$v = \mu\sqrt{2g}\cdot\frac{\int y dH\sqrt{H}}{\int Y dH};$$

i limiti degli integrali in queste equazioni sono $H=0$, $H=H$.

Il piano della superficie superiore dell'acqua essendo fisso ed invariabile, converrà intendere che il fondo del canale è mobile, e che quando la profondità dell'acqua cresce, esso s'abbassi parallelamente a se stesso, restando fisso ed invariabile il piano della superficie suprema della corrente.

Si voglia ora che, qualunque sia la profondità H sotto la superficie della corrente, si abbia costantemente

$$v = \phi.H,\ Q = \Psi.H,$$

ϕ e Ψ essendo funzioni date di H. Si sostituiscano questi valori nelle precedenti espressioni di v e di Q, e si avrà

$$\int y dH\sqrt{H} = \frac{\Psi.H}{2\mu\sqrt{2g}};\qquad \int Y dH = \frac{\Psi.H}{2\phi.H}:$$

e differenziando rispetto ad H, si troveranno le equazioni dei profili della luce dello sbocco, e della sezione del canale così espresse,

$$y = f.H = \frac{1}{2\mu\sqrt{2gH}}\cdot\frac{d\Psi.H}{dH};$$

$$Y = F.H = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\phi H}\cdot\frac{d\Psi.H}{dH} - \frac{\Psi.H}{(\phi.H)^2}\cdot\frac{d\phi.H}{dH}\right];$$

e questi valori di y ed Y soddisfaranno alle proposte condizioni.

Sia per esempio.

$$v = \phi.H = AH,\ Q = \Psi.H = BH^2,$$

A e B essendo coefficienti costanti; si troverà

$$y = \frac{B\sqrt{H}}{\mu\sqrt{2g}};\quad Y = \frac{B}{2A}.$$

Cioè il profilo della luce dello sbocco sarà una parabola col vertice alla superficie suprema dell' acqua, e prolungata all' ingiù co' suoi due rami sino al piano del fondo del canale. Il profilo poi della sezione del canale sarà un rettangolo della larghezza $\frac{B}{A}$. Dal che si vede che se il fondo è fisso ed invariabile di posizione, come in realtà lo è generalmente per tutti i canali, e si voglia che le proposte relazioni

$$v = AH, \; Q = BH^2,$$

si osservino costantemente ne' diversi stati permanenti di un canale di fondo orizzontale, la sezione di questo canale dovrà essere un rettangolo della larghezza $\frac{B}{A}$: la luce poi dello sbocco sarà una parabola del parametro $\frac{B^2}{2\mu^2 g}$, la posizione della quale dovrà essere variabile in modo che il vertice della medesima sia sempre alla superficie suprema dell' acqua, ed i suoi due rami diretti all' ingiù, vadano a terminare sul piano del fondo del canale. E così crescendo o calando l' acqua nel canale, si dovrà alzare od abbassare il piano della parabola in modo che il vertice di questa rimanga sempre sulla superficie superiore dell' acqua, e l' altezza dello spazio parabolico, che costituisce l' area della luce dello sbocco, sia in ogni caso eguale all' altezza dell' acqua nel canale.

Sia, per altro esempio,

$$v = \varphi . H = A\sqrt{H}; \qquad Q = \Psi . H = BH\sqrt{H}:$$

si troverà

$$y = \frac{3B}{4\mu\sqrt{2g}}; \qquad Y = \frac{B}{2A}:$$

Cioè tanto la luce dello sbocco, quanto la sezione del canale saranno figure rettangole indefinitamente aperte. Perciò in questo caso le proposte relazioni si osserveranno sempre, sia che si prenda per piano fisso quello della superficie della corrente, e per piano mobile il fondo; sia che si prenda il fondo fisso, e mobile la superficie, come si è fatto al n.° 18.

29. I metodi sin quì esposti per ottenere relazioni date tra la portata, la velocità media e l' altezza della corrente sono unicamente applicabili ai canali orizzontali: poichè nelle equazioni del movimento dell' acqua in questi canali contenendosi necessariamente l' area della luce dello sbocco, e quella della sezione della corrente nel canale, si possono riguardare come indeterminati i profili di queste aree, e determinarli quindi in modo che vengano soddisfatte le date relazioni tra la portata, l' altezza e la velocità media della corrente.

Ma se il canale è inclinato, di sezione costante e colla superficie della corrente parallela al fondo, le equazioni del moto permanente dell' acqua, avuto riguardo alla nota legge delle resistenze uniformi opposte al moto dal fondo e dalle sponde del canale, sono indipendenti dallo sbocco, e non contengono altra sezione e perimetro che quelli della corrente nel canale. Da ciò ne segue che nel caso in cui il profilo della sezione del canale inclinato è una curva continua, una sola condizione è necessaria, e basta per determinare l'area ed il perimetro della sezione. Cioè se si vuole che l' area della sezione conservi sempre una relazione data all' altezza della corrente, il profilo, e perciò anche il perimetro della medesima sarà determinato: oppure se si vuole che il perimetro soddisfaccia sempre ad una data condizione, la curva del profilo sarà determinata, e quindi anche l' area della sezione. Pertanto non si possono, pei canali inclinati, proporre e risolvere insieme i due problemi distinti, come pei canali orizzontali, di soddisfare cioè a due relazioni qualunque date tra la portata, la velocità media e l' altezza della corrente.

30. Le equazioni del moto permanente dell' acqua nel tronco del canale inclinato che quì si considera, sono (*)

(*) Ricerche Geometriche ed Idrometriche fatte nella scuola degli Ingegneri Pontificj d'acque e strade l'anno 1821. Milano 1822. pag. 14 e seg.

(K) $$u = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta D.\cos.\varphi}\ ;$$

(L) $$Q = u \times \text{sezione della corrente}\ ;$$

ove D è il raggio medio, ossia l'area della sezione della corrente, divisa per quella parte del suo perimetro che tocca il fondo e le sponde del canale;

φ è l'inclinazione dell'alveo alla verticale;

u la velocità media;

Q la portata;

ed è inoltre, preso il metro per unità,

$$\alpha^2 = 0{,}0011\ ;\ \beta = 2735{,}66,$$

questi numeri essendo costanti.

Ora se il profilo della sezione è formato da una curva continua e simmetrica rispetto ad un asse perpendicolare al fondo del canale, e su cui, partendo dal fondo, si misurano le altezze H della corrente, e sia

$$Y = F.H$$

l'equazione di questa curva, indicando per F una funzione qualunque, sarà l'area della sezione $2\int Y dH$, integrando da $H = 0$ sino ad $H = H$, altezza della corrente.

Ma circa la parte del perimetro di questa sezione che tocca il fondo e le sponde del canale, è da notarsi che se l'equazione del profilo $Y = F.H$ è tale che quando $H = 0$ sia pure $Y = 0$, allora quella parte del perimetro sarà $2\int dH \sqrt{1 + \frac{dY^2}{dH^2}}$, integrando da $H = 0$ sino ad $H = H$; e si avrà

$$D = \frac{\int Y dH}{\int dH \sqrt{1 + \frac{dY^2}{dH^2}}}\ .$$

Ma se quando $H = 0$ non si ha $Y = 0$, allora l'espressione precedente del raggio medio non serve, e si deve aggiugnere al suo denominatore il perimetro che costituisce la base inferiore ossia il fondo della sezione. Così se quando $H = 0$ si ha $Y = A$, sarà

$$D=\frac{\int Y dH}{A+\int dH\sqrt{1+\frac{dY^2}{dH^2}}}.$$

Mediante queste espressioni generali della sezione e del raggio medio, le equazioni (K) ed (L) diventeranno

$$\text{(M)}\qquad \frac{\int Y dH}{A+\int dH\sqrt{1+\frac{dY^2}{dH^2}}}=\frac{(u+\alpha)^2-\alpha^2}{\beta.\cos.\varphi};$$

$$\text{(N)}\qquad 2u\int Y dH=Q;$$

e si avranno la portata e la velocità espresse per H, quando sarà data la pendenza φ e l' equazione $Y=F.H$ del profilo della sezione.

31. Se adesso si domanda quale debba essere l'equazione $Y=F.H$ affinchè in ogni stato permanente del canale la velocità media u sia eguale ad una funzione data di H, si vede tosto che questo problema è determinato. Infatti la velocità u essendo data ed espressa per H, l' equazione (M) diventa

$$\text{(P)}\qquad \frac{\int Y dH}{A+\int dH\sqrt{1+\frac{dY^2}{dH^2}}}=\Psi.H,$$

Ψ essendo una funzione nota di H. Questa equazione darà il cercato valore di Y, mediante il quale si otterrà dall'equazione (N) la portata Q.

In eguale maniera, data la portata Q in funzione di H, si potrà determinare il valore di Y. Poichè preso dall' equazione (N) il valore di $u=\frac{Q}{2\int Y dH}$, e sostituito nell' equazione (M), si avrà

$$\text{(R)}\qquad \frac{4(\int Y dH)^3}{A+\int dH\sqrt{1+\frac{dY^2}{dH^2}}}=\frac{4\alpha Q\int Y dH+Q^2}{\beta.\cos.\varphi};$$

e, ricavato da questa equazione il valore di Y in H, si avrà poi dall' equazione (N) il valore di u.

Si vede pertanto che nel movimento dell' acqua nei canali inclinati il problema è determinato quando è data la velocità u in funzione di H, oppure quando è data la portata Q in funzione della stessa quantità H.

32. La determinazione del valore di Y in H per mezzo dell'equazione (P) o dell' equazione (R) sarà in generale assai difficile, e per lo più impossibile ad ottenersi sotto forma finita ed esplicita. Tralasciando quì di svolgere le equazioni (P) ed (R) e di metterle sotto forma differenziale, noi ci limiteremo ad esaminare se è possibile di assegnare alla sezione un profilo tale, che la velocità media rimanga costante in ogni stato permanente, qualunque sia l' altezza dell' acqua. È chiaro che in questo caso il raggio medio D dovrà essere una quantità costante, cioè dovrà aversi l' equazione

$$\frac{\int Y dH}{\int dH \sqrt{1 + \frac{dY^2}{dH^2}}} = m = \text{cost.}$$

Supponendo che quando $H = 0$, sia pure $Y = 0$. Se poi dopo aver determinato con questa equazione il valore di $Y = F.H$, non potremo avere $Y = 0$ quando $H = 0$, il proposto problema sarà impossibile.

Differenziando l' equazione precedente si ha

$$dH = \frac{m dY}{\sqrt{Y^2 - m^2}};$$

e quindi

$$H = \text{cost.} + m \log.\left(\frac{Y + \sqrt{Y^2 - m^2}}{m}\right).$$

Ora siccome il profilo della sezione deve essere reale, è chiaro che non si può fare $Y = 0$ quando $H = 0$; e per lo stesso motivo non può farsi $Y < m$ quando $H = 0$. Prendiamo dunque $Y = m$ quando $H = 0$, avremo cost. $= 0$, e l' equazione del profilo diventerà

$$Y = \frac{m}{2} . \left[e^{\frac{H}{m}} + e^{-\frac{H}{m}} \right],$$

dalla quale si ricava

$$\int Y dH = m\int dH\sqrt{1+\frac{dY^2}{dH^2}} = \frac{m^2}{2}\left(e^{\frac{H}{m}} - e^{-\frac{H}{m}}\right),$$

Ma siccome quando $H = 0$, è $Y = m = A$, ne segue che il valore del raggio medio è

$$D = \frac{\int Y dH}{A + \int dH\sqrt{1+\frac{dY^2}{dH^2}}} = m\left(1 - \frac{2e^{\frac{H}{m}}}{e^{\frac{2H}{m}} + 2e^{\frac{H}{m}} - 1}\right);$$

e perciò questo valore del raggio medio, rigorosamente parlando, non è costante in qualsivoglia stato permanente del canale.

Si vede però che, crescendo H, questo valore ha per limite la quantità costante m: così se è, per esempio, $H > 6m$, il coefficiente di m nel precedente valore di D non differisce dall' unità se non di una frazione minore di $\frac{1}{200}$. Perciò per li valori di $H > 6m$, si può prendere pel raggio medio

$$D = m;\ \text{ed}\ Y = \frac{m}{2}\, e^{\frac{H}{m}}$$

per l' equazione del profilo della sezione. Quindi per gli stati permanenti del canale, pei quali sarà $H > 6m$, si avrà

$$u = V = \text{cost.};\ Q = m^2 V . e^{\frac{H}{m}}:$$

Cioè la velocità media sarà costante, e crescendo le altezze dell' acqua in progressione aritmetica, le portate cresceranno in progressione geometrica. La somma rapidità colla quale in questo caso, restando sensibilmente costante la velocità media, crescono le portate per poco che crescano le altezze dell' acqua, si deve visibilmente attribuire alla forma del profilo della sezione del canale.

Si può ancora notare che posta la sezione del canale rettangola e della larghezza 2L, si ha

$$D = \frac{HL}{H+L}.$$

Perciò negli stati permanenti ne' quali H è assai grande rispetto ad L, si ha prossimamente D = L; e quindi

$$u = V = \text{cost.}; \; Q = 2HLV.$$

Si osserverà in fine che quando il profilo della sezione del canale inclinato è composto di più curve espresse da equazioni diverse tra loro, le equazioni (M) ed (N) dovranno modificarsi in una maniera simile a quella esposta al n.° 24; e le relazioni tra la portata, l' altezza e la velocità media non rimarranno più le stesse in qualsivoglia stato permanente del canale.

33. Termineremo queste riflessioni esponendo il seguente metodo assai semplice per risolvere numericamente rispetto alla quantità Q l' equazione

$$(B) \quad Q = \frac{2}{3}\mu l\sqrt{2g}\,.\left[\left(a + b + \frac{Q^2}{2gH^2L^2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(b + \frac{Q^2}{2gH^2L^2}\right)^{\frac{3}{2}}\right];$$

nella quale, come abbiamo veduto (n.° 5.) Q rappresenta assai prossimamente la portata di una luce rettangola e verticale, di cui l è la larghezza, a l' altezza, b il battente, e libero l' efflusso, quando l' area di questa luce non è molto piccola rispetto alla sezione del canale, di cui L è la larghezza, ed H l' altezza.

Cerchiamo i limiti fra i quali sempre e necessariamente è compresa la quantità Q. Se si prende per l' altezza dovuta alla velocità media dell' efflusso quella che corrisponde alla metà dell' altezza della luce, allora la portata, che chiameremo P, sarebbe data dall' equazione

$$P = \mu\, al\sqrt{2g\left(b + \frac{a}{2} + \frac{P^2}{2gH^2L^2}\right)},$$

dalla quale si ottiene

$$P = \frac{\mu a l \sqrt{2g\left(b + \frac{a}{2}\right)}}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2 a^2 l^2}{H^2 L^2}}}.$$

Se poi per l'altezza dovuta alla velocità media dell' efflusso si prende quella che corrisponde ai $\frac{4}{9}$ dell' altezza della luce, contati dal lato superiore di questa, la portata, che diremo R, sarebbe somministrata dall' equazione

$$R = \mu a l \sqrt{2g\left(b + \frac{4a}{9} + \frac{R^2}{2gH^2L^2}\right)}.$$

dalla quale si ricava

$$R = \frac{\mu a l \sqrt{2g\left(b + \frac{4a}{9}\right)}}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2 a^2 l^2}{H^2 L^2}}}.$$

Ora è sempre

$$Q < P, \quad \text{e} \quad Q > R$$

cioè

$$Q < \frac{\mu a l \sqrt{2g\left(b + \frac{a}{2}\right)}}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2 a^2 l^2}{H^2 L^2}}}.$$

e

$$Q > \frac{\mu a l \sqrt{2g\left(b + \frac{4a}{9}\right)}}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2 a^2 l^2}{H^2 L^2}}}.$$

Determinati così i limiti P ed R fra i quali è sempre compresa la quantità Q, si potrebbero coi noti metodi di approssimazione, mediante l' equazione (B), trovare successivamente altri limiti della stessa quantità sempre più vicini tra loro. Noi sceglieremo il seguente metodo, il quale deriva dalle precedenti relazioni tra P, Q ed R, e da quest' altra

$$(a+b+z)^{\frac{3}{2}} - (b+z)^{\frac{3}{2}} > (a+b)^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}},$$

la quale è soddisfatta sempre che le quantità a, b, z sono positive.

Nel secondo membro dell' equazione (B) si metta in vece di Q la quantità R, e sia Q' il valore che prenderà il primo membro della stessa equazione (B). Da ciò che precede, è chiaro che sarà

$$Q' > R, \quad \text{e} \quad Q' < Q.$$

Si ponga nel secondo membro della stessa equazione (B) Q' in vece di Q, e sia Q'' il valore che prenderà il primo membro di (B), sarà

$$Q'' > Q', \quad \text{e} \quad Q'' < Q.$$

Si metta ancora Q'' in vece di Q nel secondo membro dell' equazione (B), e sia Q''' il valore che prenderà il primo membro, si avrà

$$Q''' > Q'', \quad \text{e} \quad Q''' < Q.$$

Continuando nell'istesso modo si otterrà una serie di quantità Q', Q'', Q''' . . . . tali che sarà sempre $Q'' > Q'$; $Q''' > Q''$, ecc. $Q' < Q$; $Q'' < Q$; $Q''' < Q$; ecc. $< P$. Dal che si vede che le quantità Q', Q'', Q''' . . . si accosteranno continuamente al vero valore di Q; e perciò quando due di queste quantità consecutive non differiranno tra loro se non che nell' ordine delle cifre che si vogliono trascurare, si prenderà l' ultima di esse quantità pel valore della portata Q della luce.

Le quantità $\frac{Q'^2}{2gH^2L^2}$, $\frac{Q''^2}{2gH^2L^2}$, . . . che si trovano successivamente nel secondo membro dell' equazione (B), si avvicineranno anch' esse continuamente alla quantità $\frac{Q^2}{2gH^2L^2}$; e perciò quando due valori consecutivi $\frac{Q^{(n)2}}{2gH^2L^2}$, $\frac{Q^{(n+1)2}}{2gH^2L^2}$ avranno le stesse cifre nell' ordine di quelle che si vogliono ritenere, l' operazione sarà terminata, e $Q^{(n+1)}$ sarà il valore della portata Q.

Sia, per cagion d' esempio. $a = 2,^{\mathrm{met.}}4$; $l = 8^{\mathrm{met.}}$; $b = 0,^{\mathrm{met.}}6$; $H = 3^{\mathrm{met.}}$; $L = 8^{\mathrm{met.}}$; $\mu = 0,\,7$; si troverà

$$P = 96,^{\mathrm{met.cub.}}3684; \qquad R = 92,^{\mathrm{met.cub.}}7603;$$

e però

$$Q < 96,^{\mathrm{met.cub.}}3984; \qquad Q > 92,^{\mathrm{met.cub.}}7603:$$

E facendo per brevità $\frac{1}{2gH^2L^2} = \omega$, si avrà questa serie di valori

$$\begin{array}{llll}
Q' = 92, & ^{\mathrm{met.cub.}}7603; & \omega Q'^{2} = 0, & ^{\mathrm{met.}}76147: \\
Q'' = 94, & 3758; & \omega Q''^{2} = 0, & 78823: \\
Q''' = 94, & 8732; & \omega Q'''^{2} = 0, & 79656: \\
Q^{\prime v} = 95, & 0318; & \omega Q^{\prime v\,2} = 0, & 79926: \\
Q^{v} = 95, & 0831; & \omega Q^{v\,2} = 0, & 80009: \\
Q^{v'} = 95, & 0990; & \omega Q^{v'\,2} = 0, & 80036: \\
Q^{v''} = 95, & 1041; & \omega Q^{\;''2} = 0, & 80044: \\
Q^{v'''} = 95, & 1056, & \omega Q^{v'''\,2} = 0, & 80047: \\
Q^{\prime x} = 95, & 1061, & \omega Q^{\prime x\,2} = 0, & 80048: \\
Q^{x} = 95, & 1066; & \omega Q^{x\,2} = 0, & 80048:
\end{array}$$

Perciò la quantità d' acqua somministrata dalla luce è $Q = 95,^{\mathrm{met.cub.}}1066$. Se nel secondo membro dell' equazione (B) si trascurasse il termine $\frac{Q^2}{2gH^2L^2}$ si avrebbero solamente $78,^{\mathrm{met.cub.}}2363$ per la richiesta portata.

SUL MOTO DELL' ACQUA
NEI CANALI
MEMORIA

DEL SIG.

OTTAVIANO FABRIZIO MOSSOTTI

Ricevuta adì 17. *Dicembre* 1823.

1. La teoria del moto delle acque correnti è stata trattata dagli Idraulici Italiani dopo che il Galileo fece conoscere le leggi della gravità e del moto uniformemente accelerato. Ma la scienza del calcolo e la sua applicazione alla Meccanica essendo poco avvanzate in allora, quegli Idraulici si dovettero giovare di alcune particolari considerazioni per investigare qualche regola o qualche principio da seguire nelle loro operazioni. Quindi alcuni paragonarono il moto dell' acqua in un fiume declive a quello di un grave sopra un piano inclinato. Altri, appoggiandosi al principio di Torricelli, che l' acqua che sorte da un piccolo foro in un vase ha la velocità che acquisterebbe liberamente cadendo dall' altezza del livello sul foro, considerarono la velocità di una corrente come generata dalla pressione dell' acqua sovraincombente. Altri infine combinarono questi principj, composero delle altre ipotesi, e diedero così origine a quei varj trattati, che, poi riuniti in una sola edizione, formano la conosciuta *Raccolta degli Autori del moto delle acque*. Questi trattati fanno onore ai nobili sforzi di quegli ingegni che li composero, ma si comprende abbastanza l' imperfezione di queste parziali ipotesi al solo enunciarle, e quindi a quanta aberrazione possono andar soggette le conseguenze che ne risultano.

2. Intanto che gli Idraulici Italiani col mezzo della sintesi si occupavano del moto delle acque considerato direttamente in un fiume, gli Oltramontani andavano applicando l' Analisi Algebrica ad alcuni casi del movimento dei fluidi. Daniele Bernoulli trasportò il principio delle forze vive al movimento dell' acqua e compose il suo Trattato d' Idrodinamica opera in cui brilla colla semplicità dei mezzi la fecondità delle conseguenze. Giovanni Bernoulli (1) e Maclaurin (2) risolvettero in seguito con altri metodi gli stessi problemi, e pervennero agli stessi risultati che furono da poi generalizzati e dimostrati più semplicemente dal d'Alembert nel suo *Traité des fluides*. La soluzione però di tutti questi problemi risguarda il moto che una massa fluida concepisce secondo la direzione di una sola linea, e tale che tagliando una sezione perpendicolare a questa linea i punti situati in questa sezione sono tutti dotati di una stessa velocità, il qual movimento chiamasi dagli Idraulici *lineare*.

3. Clairaut fu il primo che diede le equazioni dell' equilibriò di una massa fluida animata in tutti i suoi punti da forze qualunque (3), e d' Alembert, applicando il suo principio che riconduce le leggi del movimento dei corpi a quelle del suo equilibrio, offrì nel suo *Traité de la resistance des fluides* le equazioni rigorose e generali del movimento. Eulero presentò in seguito queste equazioni dedotte dallo stesso principio ma colla notazione semplice delle differenziali parziali (4). Finalmente Lagrange riducendo i fluidi al loro vero e naturale concetto di un ammasso di molecole slegate, indipendenti le une dalle altre e perfettamente mobili, dedusse nell' ultima parte della Meccanica analitica le equazioni del loro movimento dagli stessi principj che le equazioni del movimento dei solidi; e la semplicità e la generalità con cui

---

(1) Nouvelle Hydraulique. Nella Raccolta delle sue Opere.

(2) Traité des fluxions

(3) Théorie de la figure de la terre an. 1743.

(4) Memoires de l'Académie de Berlin. an 1755.

è trattata quest' ultima parte la rendono uno dei più bei rami dell' eminente opera dell' Italiano Geometra. Dopo quest' epoca la determinazione rigorosa del moto dei fluidi diventò una difficoltà di pura analisi, ma essa è tanto grande che non si è ancora potuta vincere che in qualche caso particolare.

4. In mancanza quindi di una soluzione più completa gli Idraulici continuarono a valersi nella teoria del moto delle acque della soluzione che loro offeriva la considerazione del moto lineare. Ma una disparità grandissima si elevò fra i risultati del calcolo e quelli dell' esperienza. Secondo il calcolo del moto lineare un fluido che scendesse lungo un canale inclinato all' orizzonte dovrebbe continuamente accelerarsi ed abbassare l' altezza del suo pelo sul fondo. Ora le esperienze instituite diligentemente prima da Bossut (1), in seguito da Du-Buat (2) ed in questi ultimi tempi da molti altri, provano che stabilito che sia il corso, l' acqua si muove colla stessa velocità in tutta la lunghezza del canale. Per spiegare questa differenza fu messa in campo la resistenza degli attriti col fondo e colle sponde, e l'adesione delle molecole fra loro. Du-Buat fu il primo che ridusse a formola queste resistenze (3). L'Ingegnere Girard seguendo alcune idee di Columb, produsse un'altra formola composta di due termini, uno proporzionale al quadrato della velocità, l' altro alla velocità semplice ed amendue inversamente proporzionali al raggio medio, o sia all' area della sezione divisa pel perimetro bagnato dall' acqua (4). Prony determinò i coefficienti numerici di questa formola con più esattezza servendosi di trentuna esperienze di Bossut e Du-Buat (5); ed il lavoro più grande per questa determinazione

---

(1) Traité d' Hydrodynamique.

(2) Principes d'Hydraulique par M. le Chevalier Du-Buat.

(3) Principes d' Hydraulique. Par. I. Sec. I. Chap. 7.

(4) Girard, Essai sur le mouvement des eaux courantes. Paris 1804. Rapport sur le projet du Canal de l'Ourcq. Paris. 1803.

(5) Prony, Recherches sur la Theorie des eaux courantes

fu eseguito dal Sig. Eytelwein Membro dell'Accademia di Berlino, alla quale fece concorrere novantuna esperienze, che abbracciano una grande diversità nei valori dei tre elementi, velocità, pendenza, e raggio medio (1). La corrispondenza di questa formola fu pure comprovata in Italia dal Prof. Bidone con alcuni esperimenti instituiti nei canaletti dello Stabilimento Idraulico di Torino (2), e dagli Ingegneri Pontificj nella Scuola diretta dal Prof. Venturoli con cinque altri esperimenti, tre sul Po fatti da Teodoro Bonati, e due eseguiti da loro stessi uno sul Po e l' altro sul Tevere (3). Si venne così mediante questa formola di resistenza a rappresentare il moto dell' acqua ne' canali in una grande varietà di circostanze, ma quantunque questa corrispondenza di risultati porti seco qualche presunzione a favore della detta formola, essa non lascia però di essere un pò empirica. L' ipotesi del moto lineare è troppo ristretta per svelarci le vere leggi del moto dei fluidi, e bisognerebbe almeno dimostrare che quella specie d'ondeggiamento che affetta quasi sempre il moto delle acque allorchè discendono, non altera sensibilmente la velocità nella direzione del canale.

5. Abbandonata in questi ultimi tempi la soverchia limitazione che porta seco l'ipotesi del moto lineare, alcuni Idraulici Italiani cercarono la soluzione completa di qualche caso di moto a due coordinate. È noto che decomposta la velocità di ciascun punto di una falda fluida che si muove in un piano secondo due coordinate x,y, e rappresentate con p e q le velocità componenti, nel caso che $pdx+qdy$ sia una differenziale esatta, la determinazione del moto si riduce all' integrazione dell' equazione

---

(1) Memorie della R. Accademia di Berlino. Parte Mat. an. 1814-1815.

(2) Bidone, Expériences sur le remou et sur la propagation des ondes. Mem. de l'Académie de Turin. Tom. XXV.

(3) Ricerche Geometriche ed Idrometriche fatte nella Scuola degli Ingegneri Pontificj d' acque e strade per l' anno 1821.

$$\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^2\phi}{dy^2}\right)=0$$

e determinata la ϕ per mezzo di quest' equazione si hanno subito le velocità espresse da

$$p=\left(\frac{d\phi}{dx}\right) \qquad q=\left(\frac{d\phi}{dy}\right).$$

L' equazione di second' ordine colle differenziali parziali di cui si tratta è la prima che hanno integrata i Geometri, ed il suo integrale è

$$\phi=F(x+y\sqrt{-1})+f(x-y\sqrt{-1})$$

F ed f essendo gli indici di due funzioni arbitrarie delle quantità comprese fra le parentesi.

La difficoltà del problema resta così ridotta alla determinazione di queste due funzioni arbitrarie, le quali dipendono in parte dallo stato iniziale del moto ed in parte dalle linee esterne lambite dal fluido. Supponendo che le linee esteriori lambite dal fluido siano due linee rette, il Prof. Venturoli nel terzo volume della seconda edizione de' suoi *Elementi di Meccanica, ed Idraulica*, anno 1809, ha determinato il primo le due funzioni F ed f (1) ed ha dato una soluzione rigorosa del movimento dei fluidi in quest' ipotesi. La principale proprietà del moto di un velo fluido circoscritto da due linee rette alla quale ha condotto questa soluzione consiste in ciò; che se dal punto d' incontro delle due rette limiti si descrive con un raggio qualunque un arco di cerchio, tutti i punti fluidi situati su quest' arco hanno la stessa velocità, e questa velocità è in ragione inversa del detto raggio. In una interessante Memoria pubblicata dopo (2), il detto Professore ha estesa la sua soluzione al moto secondo tre coordinate, dalla quale risulta un' esatta teoria dell' efflusso dai vasi conici, ed una evidente spiegazione della specie d' imbuto che si forma alla superficie dell' acqua sovraincombente al foro per cui sgorga, imbuto osservato prima da Bossut e per ispiegare il quale si era ricorso ad uno di que' precarj modi, che in questo caso fu la pressione della colonna d' aria sovraincombente.

---

(1) Vedi anche il II. Volume della terza edizione degli Elementi di Meccanica ed Idraulica dello stesso Prof. Venturoli al parag. 786. e seg.

(2) Ricerche Geometriche ed Idrometriche fatte nella Scuola degli Ingegneri Pontificj d' acque e strade per l' anno 1821.

6. La surriferita soluzione del moto del velo fluido fra due linee rette, la prima che si è rigorosamente ottenuta pel moto secondo due dimensioni, rimaneva però ancora sterile quando essa divenne feconda di applicazioni fra le mani del Sig. Tadini. Questo distinto Idraulico, dopo essere dal canto suo arrivato alla stessa soluzione, ne fece una felice applicazione alla misura delle acque correnti coll' invenzione del suo Regolatore, e ravvicinò i risultati teoretici ad alcuni fatti che ci svela il moto delle acque correnti (1). Così mostrò per esempio, come la sua teoria s' accorda a dare un maggior acceleramento dell' acqua verso il fondo che in superficie, quando quest' ultima diviene molto declive, ciò che accade sotto gli archi dei ponti; provò la formazione del filone quando vi è obbliquità nelle sponde, e fece vedere che esso si accosta più alla sponda che è meno obbliqua coll' asse della corrente. Perchè queste conseguenze siano legittime, si esigge che il pelo d' acqua della corrente si disponga in una superficie, piana. In varj casi la sola ispezione del pelo d' acqua ci convince abbastanza che per tratte corte questa supposizione poco si allontana dal vero, onde anche per prossimamente vere si dovranno ritenere le conseguenze che ne furono dedotte.

7. Questo fu già un vantaggio ottenuto dalla nuova soluzione. Ma l' ipotesi che la superficie del pelo d' acqua sia un piano, contiene ancora qualche cosa d'arbitrario, volendo

---

(1) Del Movimento e della Misura delle acque correnti Memoria Idraulica di Antonio Tadini. Milano 1816.

i dati del problema che null'altro si verifichi a questa superficie che la condizione di una pressione costante su tutti i punti. Quella ipotesi mal si converrebbe ad un lungo corso d'acqua, e tutti i quesiti idraulici in cui l'incognita è appunto la pendenza del pelo, rimangono insolubili senza la cognizione della curva direttrice della superficie cilindrica del pelo d'acqua. Pel compimento della Teoria del moto delle acque anche nel caso più semplice, di un canale di forma parallelepipeda rettangolare, aperto superiormente, colle sponde verticali e col fondo poco inclinato all'orizzonte, resta ancora a desiderarsi la soluzione del problema del detto moto nella pura condizione, che la superficie del pelo si disponga in modo che la pressione sia in ogni punto costante ed eguale a quella dell'Atmosfera. L'oggetto di questa Memoria è di toccare questo problema nelle parti più accessibili colle attuali teorie idrauliche.

Per formarsi un' idea chiara della natura di questo problema e delle diverse circostanze che ne determinano l'applicazione, convien distinguere due casi, che con volgare espressione si indicano, dicendo nell' un caso che l'acqua va per pressione, e nell' altro caso che l'acqua va per caduta.

Il primo caso si riscontra ordinariamente nei tratti di fiume vicino al loro sbocco in un altro fiume o nel mare, ne' tronchi di canale sostenuti da chiuse, ne' canali navigabili sostenuti da sostegni. In tutte queste tratte l'acqua presenta una superficie liscia, inalterabile, il suo moto si fa con una tranquillità rimarchevole, le scabrosità e gli ostacoli sul fondo non alterano sensibilmente la superficie, l'acqua seguente subentra a rimpiazzare la precedente, in modo che si ha l'immagine di un corpo che cambia continuamente di materia senza cambiare di forma. Se nel caso che il fondo sia declive, si esplora l'altezza del pelo d'acqua sul fondo, si trova ben spesso, che essa va crescendo, e che la velocità va diminuendo più si discende al basso. Queste variazioni sono così sensibili, che il problema, data la portata la larghezza e la pendenza trovare l' altezza e la velocità, che si rinviene trattato riguardo ai canali navigabili, in cui la comoda navigazione retrograda esigge che il moto sia placido e lento, non può trovare applicazione nei canali declivi, non riscontrandosi un' altezza ed una velocità costante che nei canali orizzontali.

Il secondo caso del movimento dell' acqua si osserva allorchè lo sbocco ed in generale le circostanze agli estremi del canale sono tali, che l'acqua non può avere quella velocità ed altezza di pelo che gli competerebbe perchè avesse luogo il movimento del primo caso. In questo caso la superficie dell' acqua si presenta tutta ondeggiata, le concavità e convessità cambiano continuamente di luogo e di grandezza, tutte le scabrosità del fondo e delle sponde si manifestano alterando la superficie, le onde che si formano si contrastano spesso e si urtano vicendevolmente distruggendo una parte della loro velocità (1). L' altezza del pelo d' acqua e la velocità progressiva si trovano secondo gli esperimenti, ne' tronchi regolari presso che costanti, ad eccezione delle tenui variazioni che vi producono le onde.

I due diversi movimenti che l'osservazione ci mostra corrispondono in teoria, il primo al caso in cui le differenziali relativamente al tempo sono nulle, ed allora il movimento si dice *progressivo permanente*, il secondo al caso in cui le differenziali relativamente al tempo sussistono, e chiameremo questo movimento *progressivo ondeggiato*.

8. La soluzione del problema nel caso del moto progressivo ondeggiato è soggetta a gravi difficoltà che restano ancora a vincersi e che meritano di esercitare l' ingegno dei più esperti Geometri. Non così astruso è il problema nel caso del moto progressivo permanente. La velocità, l' altezza della lama d' acqua, la curva direttrice della superficie cilindrica

---

(1) Vedi la pag. 85. della già citata Memoria Idraulica del Sig. Tadini; ed una interessante nota alla pag. 232.

del pelo si troveranno per lo più completamente determinate nel seguito di questa Memoria in modo che se ne potranno fare delle facili applicazioni. Se l'altezza verticale dell'acqua nella sezione data all' origine della corrente è minore del doppio dell' altezza dovuta alla velocità parallela al fondo nella stessa sezione, risulta che la lama d'acqua va sempre più assottigliandosi in un canale declive più si discende verso le sezioni inferiori. Se invece l' altezza della lama d' acqua nella sezione all' origine è maggiore del doppio dell' altezza dovuta alla velocità nella sezione medesima, allora la lama d'acqua aumenta in altezza più si discende, ed aumenta in modo che anche il pelo d'acqua nelle sezioni inferiori si trova più elevato di livello che nelle sezioni superiori. La curva direttrice della superficie cilindrica del pelo d' acqua è rispettivamente nei due casi rappresentata da due rami di una linea di terz' ordine, e vi esiste in amendue i casi la proprietà che la differenza di livello da una sezione qualunque superiore ad una inferiore è reciprocamente eguale alla differenza delle altezze dovute alle velocità nelle sezioni medesime.

9. Questi risultati aprono la via ad una riflessione concernente le resistenze d' attrito o d' adesione. Gli Autori che hanno instituite delle esperienze sul moto dell' acqua che discende per canaletti artificiali nei quali il fondo e le sponde non opponevano scabrosità ed ostacoli rilevanti, non hanno fatto sufficiente parola dello stato della superficie dell' acqua per assicurarsi, che le formole del moto permanente sono rigorosamente applicabili a questi esperimenti, nel caso in cui l'altezza della lama d' acqua non arrivava al doppio dell'altezza dovuta alla velocità. Ma quando l'altezza della lama d'acqua eccede il doppio dell'altezza dovuta alla velocità, dannosi certamente delle circostanze in cui la superficie del pelo d' acqua è liscia e senz' onde, e le formole del moto permanente sono applicabili, e l' esperimento che abbiamo riportato alla pag. 224. della *Storia dei proggetti e delle opere per la Navigazione interna del Milanese dell' Ing. Giuseppe Bruschetti*

era appunto in queste circostanze. Secondo questo esperimento il pelo d'acqua ha manifestato una pendenza in un senso cioè una vera declività, mentre per la teoria avrebbe dovuto assumere una piccola pendenza in senso contrario. Questa disparità in luogo di poter essere spiegata da una resistenza che abbia ritardato il moto, esiggerebbe anzi l' influenza di una forza acceleratrice che ne lo abbia sollecitato. Un' inavvertenza però può aver contribuito ad alterare i dati dell' esperimento. All' epoca in cui fu eseguito l' esperimento le mie idee non essendo ancora complete, non ho insinuato che l' altezza e la velocità fosse esplorata in luoghi ove con tutto rigore non apparisse agitazione nell' acqua. L' altezza e la velocità nella sezione superiore fu quindi misurata in un luogo non abbastanza lontano dal sito ove l' acqua con un salto entrava nel canale, perchè sulla minuta trovasi l'annotazione che ogni agitazione non era ancora estinta e che la superficie era un pò affetta da onde. Il tempo ci procaccierà altri esperimenti, e voglio sperare che gli Idraulici avvertiti dell' importanza, porranno attenzione nell' informarci delle circostanze che devono assicurare l' applicazione rigorosa delle formole del moto permanente. Se i nuovi esperimenti d'accordo coi precedenti ci confermeranno un ritardo dell'acqua, quando l' altezza dovuta alla velocita è maggiore della metà dell' altezza della lama d'acqua, ed un' accelerazione quando è minore , allora il fatto sarà avverato e si potrà senza esitazione occuparsi della causa di questi fenomeni. Ma sino a tanto che resta il dubbio che il corso dell' acqua possi essere alterato da onde fra loro contrastanti, è evidente che avanti di ammettere un effetto molto sensibile delle resistenze in una materia tanto fluida come l'acqua, bisognerebbe avere una teorìa del moto progressivo ondeggiato colla quale apprezzare l'influenza delle piccole onde giacchè ricordandoci del precetto Newtoniano *non plures admittendae sunt causae quam quae verae sunt et phaenomenis explicandis sufficiunt.*

EQUAZIONI FONDAMENTALI

Del moto dell' acqua ne' canali con sponde piane, verticali e parallele.

10. La difficoltà che presentava la traduzione dei problemi di meccanica in equazioni differenziali è totalmente sparita da qualche tempo, e principalmente dopo che Lagrange nell' esimia sua Opera della Meccanica analitica ha date le formole più semplici e più generali, dedotte con un metodo uniforme dal solo principio delle velocità virtuali per la soluzione di qualunque problema d'equilibrio e di moto. Quest'Opera deve essere d'altronde tanto conosciuta e per le mani di tutti quelli che fanno professione di meccanica ed idraulica, che il riferire le dimostrazioni delle equazioni differenziali di questa sorta di problemi è ormai divenuta una cosa superflua. Partirò dunque direttamente dalle formole che si trovano alla pagina 320. e seg. del secondo Tomo della Meccanica analitica come da cose abbastanza note.

Il canale essendo supposto nel nostro caso colle sponde piane verticali e parallele, il moto dell' acqua si farà in esso secondo un piano parallelo alle sponde, e prese le coordinate x e z in uno di questi piani potremo considerare le coordinate y come costanti e quindi nulle le differenziali relativamente ad esse. Ciò premesso rappresenti g la gravità ζ l'angolo, che la direzione della medesima fa col fondo del canale e $z = \alpha$ l'equazione di questo fondo; posto

$$\lambda' = -gx \cos.\zeta + \frac{d\phi'}{dt} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2}\phi''^2$$

$$\lambda'' = -g \sin.\zeta + \frac{1}{2}\frac{d\phi''}{dt}$$

$$\lambda''' = -\frac{1}{2}\left(\frac{d^3\phi'}{dt\,dx^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\phi''}{dx^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)\left(\frac{d^3\phi'}{dx^3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\phi}{dx^2}\right)^2 - \frac{1}{2}\phi''\left(\frac{d^2\phi''}{dx^2}\right)$$

ecc.

Si avranno per determinare φ' e φ'' e l'ordinata z della superficie del fluido le tre equazioni

$$(1)\qquad \varphi'' - \frac{da\frac{d\varphi'}{dx}}{dx} - \frac{da^2\frac{d\varphi''}{dx}}{dx} + \text{ec.} = 0$$

$$(2)\qquad \lambda' + \lambda'' z + \lambda''' z^2 + \text{ec.} = 0$$

$$(3)\qquad \left(\frac{d\lambda'}{dt}\right) + \left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)\left(\frac{d\lambda'}{dx}\right) + \varphi''\lambda''$$

$$+ z\left[\left(\frac{d\lambda''}{dt}\right) + \left(\frac{d\varphi''}{dx}\right)\left(\frac{d\lambda'}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)\left(\frac{d\lambda''}{dx}\right) + 2\varphi''\lambda''' - \frac{d^2\varphi'}{dx^2}\lambda''\right]$$

$$+ z^2\left[\left(\frac{d\lambda'''}{dt}\right) + \left(\frac{d\varphi''}{dx}\right)\left(\frac{d\lambda''}{dx}\right) + \left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)\left(\frac{d\lambda'''}{dx}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{d^3\varphi'}{dx^3}\right)\left(\frac{d\lambda'}{dx}\right)\right.$$

$$\left. - 2\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2}\right)\lambda''' - \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\varphi''}{dx^2}\right)\lambda'' + 3\varphi''\lambda^{iv}\right] + \text{ec.} = 0$$

Eliminando z dalle due ultime equazioni e sostituendo per λ', λ'', λ''' ec. le loro espressioni, la risultante e la prima equazione non conterranno più che le due funzioni incognite φ' e φ'' e le loro differenziali. Si potrà quindi con queste equazioni determinare le dette incognite e da queste rimontare ai valori di λ, λ'', λ''' ec., i quali valori posti in seguito nella seconda equazione in z, la medesima rappresenterà la superficie superiore e libera del fluido. Cogli stessi valori di φ' e φ'' avremo anche le velocità p ed r secondo gli assi delle x e z e la pressione λ di un punto qualunque dalle formole

$$p = \left(\frac{d\varphi'}{dx}\right) + z\left(\frac{d^2\varphi''}{dx^2}\right) - \frac{z^2}{2}\left(\frac{d^3\varphi'}{dx^3}\right) + \text{ec.}$$

$$r = \varphi'' - z\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2}\right) - \frac{z^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi''}{dx^2}\right)$$

$$\lambda = \lambda' + z\lambda'' + z^2\lambda'''.$$

Tutte queste formole suppongono che la serie

$$\varphi' + z\varphi'' - \frac{z^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2}\right) - \frac{z^3}{2.3}\left(\frac{d^2\varphi''}{dx^2}\right) + \text{ec.}$$

sia convergente. Ora questa serie è convergente quando le le differenziali $\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\varphi''}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2\varphi''}{dx^2}\right)$ sono successivamente più piccole, o quando z si mantiene sempre piccola per ogni valore che gli compete. Il primo di questi casi ha luogo quando l' inclinazione del canale è piccola ed il moto è permanente, ed andiamo a sviluppare questo caso nel seguito di questa Memoria.

Del moto permanente dell' acqua in un canale col fondo piano e poco inclinato all' orizonte.

11. Il moto dell' acqua è ridotto allo stato di permanenza quando la velocità e la pressione si mantengono costanti per uno stesso punto del canale variando il tempo. In questo stato le funzioni φ' e φ'' devono dunque essere indipendenti dal tempo e le differenziali di queste funzioni relativamente al tempo nulle. Ma siccome giusta la convenzione dell' articolo 20. Sez. XI. della Meccanica analitica deve intendersi che la funzione $\left(\frac{d\varphi'}{dt}\right)$ abbracci, oltre la differenziale della funzione φ', un' altra funzione arbitraria $\frac{dT}{dt}$ del tempo, che nel nostro caso può essere una costante, perciò si dovrà porre $\left(\frac{d\varphi'}{dt}\right)$ eguale ad una costante k.

Ciò osservato, prendiamo l' asse delle x sul fondo stesso del canale, l' equazione di questo fondo diverrà per una tale posizione dell' asse

$$z = \alpha = 0$$

e l' equazione (1) darà

$$\varphi'' = 0.$$

Per questi valori di $\left(\frac{d\varphi'}{dt}\right)$ e φ'', trascurando i termini dell'ordine di $\left(\frac{d^3\varphi'}{dt^3}\right)$, le espressioni di λ', λ'', λ''', ec. si riducono a

(4) $$\lambda' = -gx\cos.\zeta + k + \frac{1}{2}\left(\frac{d\varphi'}{dx}\right)^2$$

(5) $$\lambda'' = -g\sin.\zeta$$
$$\lambda''' = 0$$

e le equazioni (2) e (3) diverranno

(2)′ $$\lambda' + z\lambda'' = 0$$

(3)′ $$\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)\left(\frac{d\lambda'}{dx}\right) - z\lambda''\left(\frac{d^2\phi'}{dx^2}\right) = 0\,.$$

Eliminando z da queste due equazioni si ottiene

$$\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)\left(\frac{d\lambda'}{dx}\right) + \lambda'\left(\frac{d^2\phi'}{dx^2}\right) = 0$$

la quale ha evidentemente per integrale

(6) $$\lambda'\left(\frac{d\phi'}{dx}\right) = c$$

c essendo una costante arbitraria.

Introdotta in quest'equazione per λ' la superiore espressione segnata (4) si trova per determinare $\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)$ la seguente

(7) $$\left(-gx\cos\zeta + k + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)^2\right)\left(\frac{d\phi'}{dx}\right) = c$$

la quale risoluta dà

(8) $$\left(\frac{d\phi'}{dx}\right) = \gamma\sqrt[3]{\left[c + \sqrt{\left(c^2 + \frac{8}{27}\left(k - gx\cos.\zeta\right)^3\right)}\right]}$$
$$+ \gamma^2\sqrt[3]{\left[c - \sqrt{\left(c^2 + \frac{8}{27}\left(k - gx\cos.\zeta\right)^3\right)}\right]}$$

γ rappresentando una delle radici terze dell' unità.

Determinato $\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)$ in funzione di x si hanno subito entro ai limiti d' approssimazione ai quali ci siamo arrestati, e che riconosceremo in appresso, la velocità e la pressione espresse da

(9) $$p = \left(\frac{d\phi'}{dx}\right)$$

(10) $$r = -z\left(\frac{d^2\phi'}{dx^2}\right)$$

$$(11) \qquad \lambda = -gx\cos.\zeta + k + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)^2 - gz \text{ sen. } \zeta$$

e l'equazione della curva direttrice della superficie cilindrica del pelo d'acqua sarà

$$(12) \qquad z = \frac{-gx\cos.\zeta + k + \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)^2}{g \sin.\zeta}$$

per cui si conosceranno tutte queste quantità in funzione di x per mezzo della trovata espressione di $\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)$.

12. Per l'applicazione di queste formole bisogna prima di tutto determinare i valori delle costanti arbitrarie che vi sono comprese, servendoci dei dati che l'esperienze instituite sul canale possono direttamente farci conoscere. Perciò osservo che dalle tre equazioni (6), (2)' e (4) si ricava

$$(13)' \qquad c = gz\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)\sin.\zeta$$

$$k = gz\sin.\zeta + gx\cos.\zeta - \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)^2.$$

Scrivendo p in luogo di $\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)$ queste equazioni divengono.

$$(13) \qquad c = gzp\sin.\zeta$$

$$(14) \qquad k = gz\sin.\zeta + gx\cos.\zeta - \frac{1}{2}p^2.$$

Se ora si chiama v la velocità parallela al fondo, e $-a$ l'altezza perpendicolare al fondo del pelo d'acqua (anteponiamo il segno — all'altezza a perchè secondo la supposizione della Meccanica analitica le coordinate sono prese positivamente dall'alto in basso e questa altezza si trova nel nostro caso dalla parte opposta) in una sezione data ove porremo l'origine delle coordinate e nella quale sia in conseguenza $x = 0$. Sostituendo questi valori le due equazioni (13) e (14) ci danno

$$c = -gav\sin.\zeta \tag{15}$$

$$k = -ga\sin.\zeta.-\tfrac{1}{2}v^2 \tag{16}$$

colle quali le costanti c e k restano conosciute.

In luogo di una delle due quantità a e v si può anche introdurre la portata del canale, perchè se si chiama Q questa portata ed l la larghezza del canale, a motivo che p è indipendente da z e perciò costante nella stessa sezione si ha

$$Q = lav. \tag{17}$$

Onde eliminando a o v dalle precedenti equazioni risulta

$$k = -g\left(\frac{Q\sin.\zeta}{lv}+\frac{v^2}{2g}\right) = -ga\sin.\zeta-\frac{Q^2}{2l^2a^2} \tag{18}$$

$$c = -\frac{gQ\sin.\zeta}{l} \tag{19}$$

per cui date due delle tre quantità a, v e Q spettanti ad una sezione saranno conosciuti i valori delle due costanti arbitrarie e potremo colle formole sopra ritrovate determinare gli accidenti del moto in tutto il resto del canale.

13. Vediamo ora quali proprietà fisiche del moto dell'acqua si contengono sotto il simbolo di queste espressioni algebriche.

La velocità p parallela al fondo del canale risultando giusta le equazioni (8) e (9) indipendente da z ciò ci mostra, come abbiamo già osservato anche sopra, che quando il moto è permanente ed è soddisfatto il criterio d' integrabilità della formola $pdx+rdz$, questa velocità è costante, entro i limiti dell' approssimazione adottata, per ogni punto di una stessa sezione.

La velocità r perpendicolare al fondo varia invece giusta l' equazione (10) proporzionalmente all' altezza z, e se si riflette che le coordinate e le velocità sono contate positivamente dall' alto in basso, si riconosce che essa sarà diretta in basso se $\left(\frac{d^2\phi'}{dx^2}\right)$ sarà positivo, e diretta in alto se $\left(\frac{d^2\phi'}{dx^2}\right)$ sarà negativo.

Se si contrassegna con z' l' ordinata o l' altezza del pelo d' acqua perpendicolare al fondo per distinguerla dall' altezza variabile z di un punto qualunque, e si elimina k dalle equazioni (11) e (12) si ricava il seguente valore della pressione

(20) $$\lambda = g(z'-z) \sin. \zeta.$$

Ma $(z'-z) \sin. \zeta$ è l' altezza verticale della colonna d' acqua sovraincombente al punto z, dunque nel moto permanente la pressione di un punto qualunque è eguale al peso della colonna fluida che gli corrisponde verticalmente che è ciò che ha luogo pei fluidi in quiete.

Sostituendo nell' equazione (13) per c il suo valore (15) si ricava primieramente

(21) $$zp = -av.$$

Moltiplichiamo un membro e l' altro di quest' equazione per l e sostituiamo al prodotto lav la portata Q, risulterà

(22) $$-lzp = \mathrm{Q}.$$

Quest'equazione, dandoci il prodotto della larghezza nell'altezza nella velocità sempre costante ed eguale alla portata, corrisponde alla nota legge del Castelli, che si trova così dimostrata nel nostro caso relativamente alla velocità parallela al fondo.

Si metti nell' equazione (14) per k il suo valore segnato (16), ne risulterà la seguente

$$(z'+a) \sin. \zeta + x \cos. \zeta = \frac{p^2}{2g} - \frac{v^2}{2g};$$

$a \sin. \zeta + x \cos. \zeta$ è l' altezza verticale, del pelo d' acqua della sezione o all'origine delle coordinate sulla soglia della sezione x, e $z' \sin. \zeta$ è l' altezza verticale del pelo d' acqua sulla soglia relativa nell' ultima di queste sezioni ma presa negativamente; perciò $(z'+a) \sin. \zeta + x \cos. \zeta$ sarà la differenza di livello del pelo d'acqua dalla sezione o, alla sezione qualunque x, ma è noto che $\frac{v^2}{2g}$ e $\frac{p^2}{2g}$ rappresentano le altezze dovute alle velocità in queste stesse sezioni, dunque chiamando ϖ la pendenza del pelo ed h' ed h queste altezze, si avrà

(23) $$\varpi = h - h'$$

Cioè *la differenza di livello del pelo in due diverse sezioni è reciprocamente eguale alla differenza delle altezze dovute alle velocità.*

14. Passiamo alla figura della superficie del pelo d'acqua. Eliminando dall' equazione (12) $\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)$ col valore che si ricava dall' equazione (13)', introducendo per le costanti c e k le loro espressioni (15) e (16), ed ordinando i termini per rapporto a z', risulta

$$(24)\qquad z'^3 + x\cot.\zeta.z'^2 + \frac{1}{\sin.\zeta}\left(a\sin.\zeta + \frac{v^2}{2g}\right)z'^2 - \frac{a^2v^2}{2g\sin.\zeta} = 0$$

Quest' equazione appartiene ad una linea di terz' ordine specie decimaterza (*) la quale sottoposta ai noti metodi si trova che ha quattro rami infiniti, due che hanno per asintoto la linea istessa che rappresenta il fondo, o sia l' asse delle x e due una retta orizzontale rappresentata dall' equazione

$$(25)\qquad z' = -x\cot.\zeta - \frac{1}{\sin.\zeta}\left(a\sin.\zeta + \frac{v^2}{2g}\right).$$

Ma per conoscere vie meglio la natura di questa curva, consideriamo il valore z' che si ricava dall' equazione (13)' dopo aver posto per $\left(\frac{d\phi'}{dx}\right)$ la sua espressione in x data dalla formola (8), e dopo aver introdotto i valori (15) e (16) delle due costanti c e k. Con queste sostituzioni si ha

$$(26)\qquad \frac{1}{z'} = \frac{\gamma}{av}\sqrt[3]{\left[gva\sin.\zeta + \sqrt{\left(g^2v^2a^2\sin.^2\zeta - \frac{8}{27}g^3\left(a\sin.\zeta + \frac{v^2}{2g} + x\cos.\zeta\right)^3\right)}\right]} + \frac{\gamma^2}{av}\sqrt[3]{\left[\left(gva\sin.\zeta - \sqrt{\left(g^2v^2a^2\sin.^2\zeta - \frac{8}{27}g^3\left(a\sin.\zeta + \frac{v^2}{2g} + x\cos.\zeta\right)^3\right)}\right]}$$

la qual formola dà tre valori per $\frac{1}{z'}$, secondo che si fa

---

(*) Euler. Introductio in analysin infinitorum. Tom. II. pag. 122. Edizione di Losanna.

$\gamma = 1$, $\gamma = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\gamma = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. Onde distinguere quale fra questi valori di γ è quello che fa pel nostro caso, osservo che la precedente equazione comincia a dare per $\frac{1}{z'}$ tre valori reali, qualunque dei tre valori di γ si adotti, quando si ha

$$(27) \qquad g^2v^2a^2\sin.^2\zeta - \frac{8}{27}g^3\left(a\sin.\zeta + \frac{v^2}{2g} + x\cos.\zeta\right)^3 = 0$$

o sia

$$x\cos.\zeta = \frac{3}{2}\left(\frac{v^2a^2\sin.^2\zeta}{g}\right)^{\frac{1}{3}} - a\sin.\zeta - \frac{v^2}{2g}\,.$$

A questo valore di x corrispondono per z' i tre valori seguenti, secondo che si pone $\gamma = 1$, $\gamma = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\gamma = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$,

$$(28) \qquad z' = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2v^2}{g\sin.\zeta}\right)^{\frac{1}{3}},\; z' = -\left(\frac{a^2v^2}{g\sin.\zeta}\right)^{\frac{1}{3}},\; z' = -\left(\frac{a^2v^2}{g\sin.\zeta}\right)^{\frac{1}{3}}$$

e lo stesso valore di x sostituito nell'equazione (25) dell'asintoto dà

$$z' = -\frac{3}{2}\left(\frac{a^2v^2}{g\sin.\zeta}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Da ciò ne risulta la seguente costruzione. Sia, fig. I, il fondo del canale rappresentato dalla retta AB, e l'asintoto (25) dall' orizzontale CD. Se dal punto O origine delle coordinate si prende una porzione OX eguale all' ascissa $\frac{1}{\cos.\zeta}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{v^2a^2\sin.^2\zeta}{g}\right)^{\frac{1}{3}} - a\sin.\zeta - \frac{v^2}{2g}\right)$ e dal punto X si guida ZXZ′ perpendicolare al fondo, divisa la porzione XI compresa fra l' asse delle x e l' asintoto in tre parti eguali, segnato XE eguale a due di queste terze parti, e fatto XF $= \frac{1}{2}$ XE, i punti E ed F saranno su la curva e potranno considerarsi come le origini dei quattro rami suddetti. L'angolo ζ è l' angolo che la verticale prolungata in basso fa colla retta che rappresenta il fondo del canale: quando il canale è declive: detta π la semiconferenza, ζ sarà $< \frac{\pi}{2}$, e quindi $\cos.\zeta$ positivo. Se dunque partendo dal punto X facciamo che x varii nella direzione delle coordinate positive, la quantità

$$g^2v^2a^2\sin.^2\zeta - \frac{8}{27}g^3\left(a\sin.\zeta + \frac{v^2}{2g} + x\cos.\zeta\right)^3$$

diventerà negativa, e si sa che in questo caso la formola (26) dà tre valori reali per $\frac{1}{z'}$. Se si pone

$$\cos.\beta = \frac{gva\sin.\zeta}{\sqrt{\frac{8}{27}g^3\left(a\sin.\zeta + \frac{v^2}{2g} + x\cos.\zeta\right)^3}} \tag{29}$$

e si prende per β un angolo $< \pi$, i tre valori di $\frac{1}{z'}$ sono

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{z'} &= \frac{2}{av}\sqrt{\frac{2}{3}g\left(a\sin.\zeta + \frac{v^2}{2g} + x\cos.\zeta\right)}\cos.\frac{\beta}{3} \\ \frac{1}{z'} &= \frac{2}{av}\sqrt{\frac{2}{3}g\left(a\sin.\zeta + \frac{v^2}{2g} + x\cos.\zeta\right)}\cos.\frac{2\pi+\beta}{3} \\ \frac{1}{z'} &= \frac{2}{av}\sqrt{\frac{2}{3}g\left(a\sin.\zeta + \frac{v^2}{2g} + x\cos.\zeta\right)}\cos.\frac{4\pi+\beta}{3}. \end{aligned}\right.$$

Dal che si vede che, essendo v ed a quantità positive sarà altresì $\beta < \frac{\pi}{2}$ e quindi la seconda e la terza di queste radici saranno negative.

Fatto $x = \infty$ risulta $\cos.\beta = 0$, e quindi $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\cos.\frac{\beta}{3} = \cos.\frac{\pi}{6}$, $\cos.\frac{2\pi+\beta}{3} = \cos.\frac{5\pi}{6}$, $\cos.\frac{4\pi+\beta}{3} = -\frac{1}{3}\cos.\beta$. I due primi valori di $\frac{1}{z'}$ diverranno dunque infiniti quando $x = \infty$ e sarà $z' = 0$, cioè i due rami, quello che ha l' origine in F ed uno di quelli che hanno l'origine in E anderanno accostandosi alla retta AB dalla parte delle ascisse positive come ad un asintoto.

La terza radice, sostituendo per $\cos.\frac{4\pi+\beta}{3}$ il terzo del valore di $\cos.\beta$ preso negativamente dà

$$\frac{1}{z'} = - \frac{\sin.\zeta}{a\sin.\zeta + \frac{v^2}{2g} + x\cos.\zeta}$$

e quindi

$$z' = - x\cot.\zeta - \frac{1}{\sin.\zeta}\left(a\sin.\zeta + \frac{v^2}{2g}\right).$$

Questo valore di z' è quello che risulta dall' equazione (25) dell' asintoto CD; il terzo ramo adunque all' infinito si confonderà con questa retta.

Se invece, partendo dal punto X, consideriamo che l' ascissa x varii nella direzione delle ascisse negative, la quantità

$$g^2v^2a^2\sin.^2\zeta - \frac{8}{27}\left(a\sin.\zeta + \frac{v^2}{2g} + x\cos.\zeta\right)^3$$

diventerà positiva, e quindi la formola (26) darà, come è noto, un solo valore reale per $\frac{1}{z'}$ e questo valore sarà quello che corrisponde alla radice $\gamma=1$. Da questa parte delle ascisse si estenderà dunque soltanto il ramo che ha l'origine in F e siccome fatto $x = -\infty$, si ricava dalla stessa formola

$$z' = -x\cot.\zeta - \frac{1}{\sin\zeta}\left(a\sin.\zeta + \frac{v^2}{2g}\right)$$

perciò questo ramo si accosterà, come ad un asintoto, alla retta CD data dall' equazione (25).

Tutte queste circostanze sono rappresentate dai rami della fig. I, supponendo che questi rami all' infinito abbiano a confondersi colle due rette AB, CD. Di questi rami è evidente che quelli che possono rappresentare la superficie dell' acqua nel canale, sono i due soli EB, ED, perchè gli altri due si trovano sotto la superficie del terreno. Le coordinate di questi due rami sono date dalla seconda e dalla terza delle tre radici (30) dell' equazione (24) del pelo d' acqua, che saranno perciò le sole radici che bisognerà adottare.

15. Onde distinguere quale di queste due radici, o sia quale dei due rami EB, ED converrà impiegare secondo i diversi casi, si osservi che al punto X appartenente all' ascissa x data dall' equazione (27) corrisponde nei due detti rami secondo le equazioni (8) e (9), la velocità

$$p = \frac{d\phi'}{dx} = \left(gva \sin.\zeta \right)^{\frac{1}{3}}$$

e secondo ciò che abbiamo ritrovato sopra, equazioni (28), l' ordinata

$$z' = -\left(\frac{a^2 v^2}{g \sin.\zeta} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Paragonando queste equazioni, si avrà dunque nella stessa sezione

$$-z' \sin.\zeta = \frac{p^2}{g} = 2h,$$

cioè sarà l' altezza verticale dell' acqua espressa da $-z'\sin.\zeta$ eguale a $2h$ che rappresenta il doppio dell' altezza dovuta alla velocità nella stessa sezione.

Discendendo lungo il canale l' altezza $-z' \sin.\zeta$ va sempre diminuendo nel ramo EB, ed aumentando nel ramo ED, e viceversa la velocità dell' acqua va aumentando nel ramo EB e diminuendo nel ramo ED, se dunque nella sezione data all' origine delle coordinate, sarà

$$a \sin.\zeta < \frac{v^2}{g}, \text{ o sia} < 2h,$$

sussisteranno le circostanze del ramo EB che sarà quello che converrà adottare impiegando la seconda delle tre formole (30). Se invece sarà

$$a \sin.\zeta > \frac{v^2}{g}, \text{ o sia} > 2h,$$

la curva direttrice della superficie del pelo d'acqua sarà rappresentata dal ramo ED cui corrispondono le ordinate che si ottengono dalla terza delle tre formole (30).

16. Se si instituiscono delle considerazioni simili nel caso che il canale sia acclive cioè nel caso in cui $\cos.\zeta$ sia negativo, si troverà che i quattro rami della curva sono in questo caso rappresentati dalla figura II, la quale in non altro differisce dalla figura I, se non che i rami che prima erano dalla parte delle ascisse positive ora sono passati dalla parte delle ascisse negative e viceversa. Egualmente che nel caso del fondo declive i soli due rami EA, EC possono rappresentare la superficie del pelo d' acqua, la quale sarà rappresentata dal ramo EA, se nella sezione data sarà, $a \sin.\zeta < \frac{v^2}{g}$ o sia $< 2h$, e dal ramo EC se invece nella sezione si avrà $a \sin.\zeta > \frac{v^2}{g}$ cioè $> 2h$.

17. Tutte le formole che abbiamo ritrovate nei numeri precedenti per rappresentare il moto dell' acqua in un canale sono, come si è avvertito al numero 10, dedotte nella supposizione che le equazioni (2) e (3) siano soddisfatte almeno prossimamente dai soli primi termini, che abbiamo conservati. Per verificare quando questa supposizione sussiste, osservo che tutti i termini che abbiamo trascurati contengono delle potenze e delle differenziali della quantità $\left(\frac{d^2\phi'}{dx^2}\right)$. Ora colla successiva differenziazione dell' equazione (7) e con alcune riduzioni che somministra la formola (12), si trova.

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{d^2\phi'}{dx^2}\right) = p\cos.\zeta \, \frac{1}{z'\sin.\zeta + 2h} \\
(31) \qquad &\left(\frac{d^3\phi'}{dx^3}\right) = 2p\cos.^2\zeta \, \frac{z'\sin.\zeta - h}{(z'\sin.\zeta + 2h)^3} \\
&\left(\frac{d^4\phi'}{dx^4}\right) = 6p\cos.^3\zeta \, \frac{z'\sin.\zeta(z'\sin.\zeta - h) + 6h^2}{(z'\sin.\zeta + 2h)^5}.
\end{aligned}
$$

Ne' canali la pendenza del fondo è rare volte $> \frac{1}{100}$ della lunghezza, onde sarà quasi sempre cos. $\zeta < \frac{1}{100}$; le potenze e le differenziali della quantità $\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2}\right)$ saranno quindi successivamente più piccole, come contenenti un moltiplicatore di potenza di cos. ζ successivamente più alta, a meno che la quantità componente i divisori non abbia un valor molto piccolo e comparabile a cos.$^{\frac{1}{2}}$ ζ. Al numero 15. abbiamo visto che al punto E si ha $-z'\sin.\zeta = 2h$, e quindi $z'\sin.\zeta + 2h = 0$, e che questa quantità cominciando dal punto E va acquistando un valore che cresce più si allontana da detto punto: se dunque il tronco di canale di cui si considera il moto apparterrà ad una tratta d' alcuno dei rami EB, ED della figura I, o dei rami EA, EC della figura II. a qualche distanza dal punto E, la quantità $z'\sin.\zeta + 2h$ non sarà più piccola, ed i termini trascurati saranno almeno dell' ordine di 0,0001 frazione trascurabile per questa sorta di questioni di pratica, e le formole ritrovate saranno applicabili a tutti questi casi.

Dopo i valori già ritrovati degli elementi del moto dell' acqua d'un canale, sarebbe facile lo spingere innanzi le approssimazioni ai termini successivi, ma stimiamo inutile di riportare le formole che ne risultano, perchè esse non troverebbero quasi mai uso nella pratica, e d'altronde ciascuno può ritrovarli da se senza altra difficoltà che quella della lunghezza dei calcoli.

18. Per mostrare con un esempio l' applicazione di queste formole richiameremo un esperimento che abbiamo riferito in una nota alla pagina 223 della *Storia dei progetti e delle opere per la Navigazione interna del Milanese di Giuseppe Bruschetti* (Milano dai tipi di Giovanni Bernardoni MDCCCXXI.). Preferiamo tanto più volontieri quest'esempio, perchè ciò servirà a rettificare uno sbaglio ivi occorso essendosi fatto uso del valore di z che risulta facendo $y=1$ nella formola (26) in luogo del valore di z che risulta dalla terza delle tre formole (30).

L'esperimento fu eseguito dal Sig. Ispettore Carlo Parea alla mia presenza sul tronco del canale di Pavia compreso fra la Conchetta e la conca al Lambro pochi giorni dopo lo spurgo annuale. Colla livellazione si è primieramente indagata la pendenza del fondo del canale per una tratta di metri 2025, che fu ritrovata di $0^m,537$. L'ultima sezione di questa tratta era alle portine della conca al Lambro, e presa l' altezza dell' acqua sulla soglia delle portine risultò di metri 1,494. Esplorata la velocità dell' acqua nelle vicinanze di questa sezione con due galleggianti uno semplice e l' altro composto, non si trovò nelle due esplorazioni una diversità di velocità che eccedesse i limiti degli errori delle esperienze, e la velocità per un medio fu eguale a $0^m,324$ per minuto secondo sessagesimale.

Con questi dati calcoliamo colle formole premesse quale deve essere l' altezza del pelo d' acqua e la velocità all'altra estremità della tratta, cioè 2025 metri superiormente alle portine della conca al Lambro per confrontarle con quelle effettivamente misurate.

L'altezza dovuta alla velocità $0^m,324$ osservata nelle vicinanze delle portine alla conca al Lambro essendo appena di $0^m,00535$, sarà $2h'=0,0107$ e quindi molto minore dell' altezza del pelo d' acqua a sin. $\zeta = 1,494$. onde il ramo che rappresenterà la curva direttrice della superficie cilindrica del pelo d' acqua sarà il ramo ED, e la formola da adottarsi per calcolare z' sarà la terza delle tre formole segnate (30).

Ciò osservato, non si avrà più che a sostituire nelle formole (29), (30) per $a$sin.ζ, v e g i loro valori che sono

$$a\,\text{sin.}\,\zeta = 1,494 \qquad v = 0,324 \qquad g = 9,8088$$

e porre $x\,\text{cos.}\,\zeta = -\,0,537$, perchè, come è facile l'intendere colla considerazione di un semplice triangolo rettangolo, $x$cos.ζ rappresenta la pendenza del canale ma presa negativamente.

Con questi dati il calcolo della formola (29) dà primieramente

$$\log.\cos.\beta = 9{,}47819 \qquad \beta = 72.^{\circ}29', 9.$$

ed in seguito dalla terza delle tre formole (30) si ricava

$$-z'\sin.\zeta = 0{,}949.$$

e con questi valori di $z'\sin.\zeta$ ed i surrifferiti di $a\sin.\zeta$ e v le formole (13) e (15) somministrano

$$p = 0{,}510.$$

Colla misura diretta si è ritrovato nella stessa sezione l'altezza verticale dell'acqua o sia $-z'\sin.\zeta = 1{,}027$, e la velocità p data dai galleggianti fu di $0^{m}{,}474$. La differenza fra il calcolo e l'osservazione è di $\frac{1}{13}$ del totale valore. Ma questa differenza ha ciò di notabile, che la teoria dà la differenza di livello del pelo d'acqua dalla sezione inferiore alla superiore

$$(z'+a)\sin.\zeta + x\cos.\zeta = 0{,}008$$

mentre l'esperienza ha dato

$$(z'+a)\sin.\zeta + x\cos.\zeta = -0{,}070.$$

Per cui il pelo che secondo la teoria avrebbe dovuto avere una piccola acclività ha invece manifestato coll'esperienza una sensibile declività.

La quantità $z'\sin.\zeta + 2h$ che forma i denominatori delle formole (31) essendo per tutta la tratta del canale compresa fra i due valori 1,483 e 0,923, è evidente che il diffetto di corrispondenza ritrovato fra il calcolo e l'esperienza non può provenire dalle quantità trascurate. Non ci resta dunque che richiamare ciò che fu detto alla fine del numero 9.

Aggiunta

1. Questa aggiunta contiene un' estensione della teoria esposta nella Memoria precedente. Le formole che ivi furono ritrovate sono fondate sulla supposizione che le velocità p ed r di una molecola fluida qualunque secondo l'asse delle x e secondo l'asse delle z siano tali che la quantità $pdx + rdz$ formi una differenziale esatta. Quantunque questa supposizione sia ordinariamente ammessa e possa sussistere in molti ca-

si del movimento dell' acqua nei canali, credo non inutile il far vedere come si ottenga una facile soluzione del problema anche prescindendo da una tale restrizione.

A tale effetto richiamo le formole degli articoli 9. 10. . . 15 della Sez. XI. della seconda parte della Meccanica analitica, facendo in esse la velocità q e tutte le differenziali relativamente al tempo nulle, pel motivo che quivi non si considera che il moto in un piano e già ridotto allo stato di permanenza. Queste formole, fatta la densità $\Delta = 1$, sono

$$\frac{dp}{dx} + \frac{dr}{dz} = 0 \qquad (G)$$

$$p\,\frac{dA}{dx} + r\,\frac{dA}{dz} = 0 \qquad (I)$$

$$p\,\frac{d\lambda}{dx} + r\,\frac{d\lambda}{dz} = 0 \qquad (K)$$

$$d\lambda - dV = \left(p\frac{dp}{dx} + r\frac{dp}{dz}\right) dx + \left(p\frac{dr}{dx} + r\frac{dr}{dz}\right) dz \qquad (L)$$

Se si pone con Lagrange, art. 14.

$$(1) \qquad p = \frac{d\alpha}{dz}$$

l' equazione (G) diventa

$$\frac{d^2\alpha}{dzdx} + \frac{dr}{dz} = 0$$

la quale è integrabile relativamente a z, e dà

$$(2) \qquad r = -\frac{d\alpha}{dx}.$$

Con questi valori di p ed r, le equazioni (I), (K), (L) somministrano

$$\frac{d\alpha}{dz}\,\frac{dA}{dx} - \frac{d\alpha}{dx}\,\frac{dA}{dz} = 0 \qquad (I)'$$

$$\frac{d\alpha}{dz}\,\frac{d\lambda}{dx} - \frac{d\alpha}{dx}\,\frac{d\lambda}{dz} = 0 \qquad (K)'$$

$$d\lambda - dV = \left[\frac{d\alpha}{dz}\,\frac{d^2\alpha}{dzdx} - \frac{d\alpha}{dx}\,\frac{d^2\alpha}{dz^2}\right]dx + \left[\frac{d\alpha}{dx}\,\frac{d^2\alpha}{dzdx} - \frac{d\alpha}{dz}\,\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right]dz \qquad (L)'.$$

Siccome il primo membro di quest' ultima equazione è una differenziale esatta, converrà che tale lo sia anche il secondo membro. Si avrà così l'equazione

$$\frac{d\alpha}{dz}\,\frac{d^3\alpha}{dz^2dx}-\frac{d\alpha}{dx}\,\frac{d^3\alpha}{dz^3}=\frac{d\alpha}{dx}\,\frac{d^3\alpha}{dx^2dz}-\frac{d\alpha}{dz}\,\frac{d^3\alpha}{dx^3}$$

la quale ammette una prima integrazione coi metodi conosciuti (vedi Lacroix n.° 745 e 752), e dà

$$(3)\qquad \frac{d^2\alpha}{dz^2}+\frac{d^2\alpha}{dx^2}=\pi'(\alpha)$$

$\pi'(\alpha)$ indicando una funzione arbitraria di α. Anche l'equazione (L)', s'integra in seguito, e si ha

$$(4)\qquad \lambda-V=\frac{1}{2}\frac{d\alpha^2}{dz^2}+\frac{1}{2}\frac{d\alpha^2}{dx^2}-\pi(\alpha)$$

$\pi(\alpha)$ essendo la funzione primitiva di $\pi'(\alpha)$.

Sarebbe difficile l'ottenere in generale un integrale dell'equazione (3) dal quale si potesse trarne qualche partito per le applicazioni che formano il nostro oggetto, ma nel caso attuale in cui si suppone che l'inclinazione del fondo del canale all'orizzonte sia piccola, risulta, come si verificherà in appresso, anche la velocità $\frac{d\alpha}{dx}$ molto piccola e le sue differenziali successive relativamente ad x di un ordine continuamente inferiore. Questa circostanza ci permette, trascurando soltanto delle quantità di second' ordine, di ridurre l'equazione (3) alla seguente

$$\frac{d^2\alpha}{dz^2}=\pi'(\alpha)$$

la quale ha evidentemente per integrale

$$(5)\qquad \frac{1}{2}\frac{d\alpha^2}{dz^2}=\pi(\alpha)+\varphi(x)$$

$\varphi(x)$ dinotando la funzione arbitraria di x portata dall'integrazione.

Supponendo le ascisse positive prese nella direzione della corrente, la velocità $\frac{d\alpha}{dz}$ sarà positiva, quindi, adottando il segno $+$, si avrà

$$\frac{d\alpha}{dz} = \sqrt{2(\pi(\alpha) + \varphi(x))}\,. \tag{6}$$

Da questa equazione si ritrae

$$z = \int \frac{d\alpha}{\sqrt{2(\pi(\alpha)+\varphi(x))}} + \psi(x)$$

l' integrale dovendo essere preso considerando α soltanto per variabile, e $\psi(x)$ essendo un' altra funzione arbitraria di x.

Rappresentiamo con $\Pi(\varphi(x), \alpha)$ la funzione primitiva di $\frac{1}{\sqrt{2(\pi(\alpha)+\varphi(x))}}$, sarà

$$z = \Pi(\varphi(x), \alpha) + \psi(x) \tag{7}$$

dalla quale si potrà viceversa ricavare.

$$\alpha = \amalg(\varphi(x)\,,\, z - \psi(x)) \tag{8}$$

$\amalg$ indicando la funzione che risulta pel valore di α colla risoluzione della precedente equazione (7).

Trascurando le quantità di second' ordine l'equazione (4) diviene

$$\lambda - V = \frac{1}{2}\frac{d\alpha^2}{dz^2} - \pi(\alpha) \tag{9}$$

la quale col mezzo dell' equazione (1) si può anche trasformare nella seguente

$$\lambda - V = \varphi(x). \tag{10}$$

Quest' ultima equazione ed una delle due precedenti (7) ed (8) risolvono per approssimazione il problema del moto di un fluido nel caso considerato, che si muova in un piano verticale limitato da una retta poco inclinata all' orizzonte, perchè da esse si può dedurre le velocità e la pressione di un punto qualunque della massa fluida non che l' equazione della curva del pelo.

Infatti le equazioni (7) ed (8) colla loro differenziazione ci danno

$$\frac{d\alpha}{dz} = \sqrt{2(\pi(\alpha) + \varphi(x))} \tag{11}$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = -\sqrt{2(\pi(\alpha) + \varphi(x))}\,[\,\Pi'(\varphi(x),\alpha)\varphi'(x) + \psi'(x)\,] \tag{12}$$

o vero

$$(13) \qquad \frac{da}{dz} = \amalg_{,}(\bar{\varphi}(x), z - \psi(x))$$

$$(14) \qquad \frac{da}{dx} = \amalg'(\bar{\varphi}(x), z - \psi(x))\bar{\varphi}'(x) - \amalg_{,}(\bar{\varphi}(x), z - \psi(x))\psi'(x)$$

dove Π' e $\amalg_{,}$ indicano le funzioni prime di Π e $\amalg$ relativamente a $\bar{\varphi}'(x)$ e $\amalg_{,}$ la funzione prima di $\amalg$ relativamente a z, $\bar{\varphi}'(x)$ e $\psi'(x)$ le funzioni prime di $\bar{\varphi}(x)$ e $\psi(x)$.

Le due prime formole sono più generali perchè danno le espressioni delle velocità $\frac{da}{dz}$ e $\frac{da}{dx}$ indipendentemente dalla risoluzione dell' equazione (7); le seconde hanno il vantaggio di far conoscere il valore di queste velocità direttamente in funzione di x e z.

La pressione λ di un punto qualunque si avrà dall'equazione (10), mettendo per V il suo valore dato all'articolo 23. ed osservando che nel nostro caso si ha $\eta = \frac{\pi}{2}$, $\xi = \frac{\pi}{2} - \zeta$, si otterà

$$(15) \qquad \lambda = -gx \cos. \zeta - gz \sin. \zeta + \bar{\varphi}(x).$$

L' equazione della superficie libera del fluido si ottiene eguagliando a zero questo valore di λ, ciò che dà

$$(18) \qquad z = \frac{\varphi(x) - gx \cos. \zeta}{g \sin. \zeta}.$$

Non ci resta dunque altro che determinare la forma delle funzioni arbitrarie $\pi(\alpha)$, $\bar{\varphi}(x)$ e $\psi(x)$.

2. Queste funzioni possono essere determinate per mezzo della cognizione dello stato del fluido nella prima sezione, e dalle condizioni che le molecole sulla superficie del fondo e sulla superficie libera del fluido si muovano costantemente su queste due superficie le quali due condizioni sono espresse dalle due equazioni (I)', (K)'.

I.° La cognizione dello stato del fluido nella prima sezione determina la forma della funzione $\pi(\alpha)$. Supponiamo in fatti che in questa sezione, che risguarderemo come l'imboccatura del canale e per la quale supporremo $x=0$, il fluido sia introdotto con una velocità parallela all'asse delle x, che pei diversi punti della sezione sia espressa dalla funzione $F'(z)$. Si avrà per questa sezione

$$\frac{d\alpha}{dz}=F'(z) \tag{19}$$

e quindi indicando con $F(z)$ la funzione primitiva di $F'(z)$

$$\alpha=F(z) \tag{20}$$

ommetto la costante abitraria che può considerarsi compresa nel valore di α.

Da questa equazione si può trarre il valore di z espresso per α, che indicheremo per

$$z=\mathfrak{F}(\alpha) \tag{21}$$

onde sostituendo risulterà

$$\frac{d\alpha}{dz}=F'(\mathfrak{F}(\alpha))\,. \tag{22}$$

Questo valore di $\frac{d\alpha}{dz}$ rappresenta la velocità nella direzione dell' asse delle x nella sezione a ll' incile, e dovrà perciò soddisfare all' equazione (5) facendo in essa $x=0$, avremo così

$$\frac{1}{2}F'^2(\mathfrak{F}(\alpha))=\pi(\alpha)+\varphi(0)$$

la funzione $\pi(\alpha)$ sarà dunque espressa da

$$\pi(\alpha)=\frac{1}{2}F'^2(\mathfrak{F}(\alpha))-\varphi(0)\,. \tag{23}$$

Con questa espressione di $\pi(\alpha)$, la formola che abbiamo espressa con $\Pi(\varphi(x),\alpha)$ sarà data da

$$\Pi(\varphi(x),\alpha)=\int\frac{d\alpha}{\sqrt{2(\varphi(x)-\varphi(0))+F'^2(\mathfrak{F}(\alpha))}}\,. \tag{24}$$

Siccome questa funzione, che presentemente è di forma determinata, deve essere fatta di α e della differenza $\varphi(x)-\varphi(0)$, la rappresenteremo perciò d'ora innanzi per maggior chiarezza con $\Pi(\varphi(x)-\varphi(0),\alpha)$. in questo modo le due equazioni (7). (8) diverranno

$$z = \Pi\,(\varphi(x) - \varphi(0),\, a\,) + \psi(x) \tag{25}$$

$$a = \Pi\,(\varphi(x) - \varphi(0), z - \psi(x)\,) \tag{26}$$

II.º La forma della funzione $\psi(x)$ si determina facilmente per mezzo dell'equazione (I)' che inchiude la condizione che le molecole che si trovano sul fondo si muovano costantemente in esso. Per ciò si osservi che il fondo del canale essendo nel nostro caso una linea retta sulla quale abbiamo preso l' asse delle x, la sua equazione sarà $A = z = 0$, e la sua differenziale

$$\frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dz}\,\frac{dz}{dz} = 0$$

Eliminando A dall'equazione (I)' si ottiene

$$\frac{da}{dz}\,\frac{dz}{dx} + \frac{da}{dx} = 0$$

Quest' equazione integrata somministra

$$a = c$$

c essendo una costante arbitraria.

Se dunque facciamo nell'equazione (25) $z = 0$ la medesima dovrà essere soddisfatta da $a = c$. Per vedere cosa dinota la costante c si rifletta che $\frac{da}{dz}$ rappresentando la velocità del fluido parallela all' asse delle x, il prodotto $l\frac{da}{dz}$, (l dinota la larghezza del canale) rappresenterà la funzione prima della quantità d'acqua che passa per una sezione del canale, e quindi l'integrale la esteso da $z = 0$ ad una ordinata qualunque z dovrà eguagliare in generale la quantità di fluido che nell' unità di tempo passa in quella parte della sezione compresa tra il fondo e l' orizzontale condotta all' altezza z. Quando quest'ordinata è quella del fondo, pel quale $z = 0$, questa quantità di fluido è nulla, si ha dunque $la = 0$ e quindi dalla precedente equazione $c = 0$. L' equazione (25) diverrà così per le particelle che si trovano sul fondo

$$0 = \Pi\,(\varphi(x) - \varphi(0), 0\,) + \psi(x)$$

dalla quale si ricava la forma della funzione $\psi(x)$ data per mezzo di $\varphi(x)$ nel seguente modo

$$\psi(x) = -\Pi(\varphi(x) - \varphi(0), 0)$$

Onde sarà in generale

$$(27) \quad z = \Pi(\varphi(x) - \varphi(0), \alpha) - \Pi(\varphi(x) - \varphi(0), 0)$$

$$(28) \quad \frac{d\alpha}{dz} = \sqrt{2(\varphi(x) - \varphi(0)) + F'^2(\mathfrak{F}(\alpha))}$$

$$(29) \quad \frac{d\alpha}{dx} = -\sqrt{2(\varphi(x) - \varphi(0)) + F'^2(\mathfrak{F}(\alpha))}\,[\Pi'(\varphi(x) - \varphi(0), \alpha)$$
$$- \Pi'(\varphi(x) - \varphi(0), 0)]\,\varphi'(x)$$

o vero

$$(30) \quad \alpha = \Pi(\varphi(x) - \varphi(0), z) - \Pi(\varphi(x) - \varphi(0), 0)$$

$$(31) \quad \frac{d\alpha}{dz} = \Pi_{,}(\varphi(x) - \varphi(0), z) - \Pi(\varphi(x) - \varphi(0), 0)$$

$$(32) \quad \frac{d\alpha}{dx} = \Pi'(\varphi(x) - \varphi(0), z) - \Pi(\varphi(x) - \varphi(0), 0)\,\varphi'(x)$$
$$+ \Pi_{,}(\varphi(x) - \varphi(0), z) - \Pi(\varphi(x) - \varphi(0), 0)\Pi'(\varphi(x) - \varphi(0),)\varphi'(x)$$

III.° Queste formole contengono ancora la funzione incognita $\varphi(x)$ la quale si determina colla condizione che le particelle che sono una volta sulla superficie libera del fluido, si conservano costantemente in essa, la qual condizione è espressa dall' equazione (K)'. Eliminando λ da quest' equazione per mezzo della differenziale dell' equazione $\lambda = 0$ rappresentante la superficie del fluido, e che è

$$\frac{d\lambda}{dx} + \frac{d\lambda}{dz}\,\frac{dz}{dx} = 0$$

si ottiene

$$\frac{d\alpha}{dz}\,\frac{dz}{dx} + \frac{d\alpha}{dx} = 0$$

la quale ha per integrale

$$\alpha = c$$

dove c dinota una costante arbitraria.

Precedentemente abbiamo visto che $l\alpha$ rappresenta la quantità di acqua che passa nella porzione di sezione compresa fra il fondo e l'ordinata condotta all'altezza z. Allorchè l'ordinata z appartiene alla superficie del fluido la porzione compresa corrisponde all'intiera sezione ed la equivale alla portata del canale. Si avrà così, dinotando con Q la portata, $la = Q$, $a = \frac{Q}{l}$, e la precedente equazione darà parimenti $c = \frac{Q}{l}$.

Se dunque nell' equazione (27) si pone $a = \frac{Q}{l}$ l' ordinata distinta con un apice ed espressa da

$$(33)\qquad z' = \Pi\left(\varphi(x) - \varphi(0), \frac{Q}{l}\right) - \Pi(\varphi(x) - \varphi(0), 0)$$

apparterrà alla superficie del fluido. Ma a questa superficie abbiamo visto sopra, equazione (18), che si ha

$$z' = \frac{\varphi(x) - gx\cos.\zeta}{g\sin.\zeta}.$$

Paragonando quindi questi due valori si otterrà

$$(34)\qquad \varphi(x) - gx\cos.\zeta = g\sin.\zeta\left[\Pi\left(\varphi(x) - \varphi(0), \frac{Q}{l}\right) - \Pi(\varphi(x) - \varphi(0), 0)\right].$$

Se in questa equazione si fa $x = 0$, resta

$$(35)\qquad \varphi(0) = g\sin.\zeta\left[\Pi\left(0, \frac{Q}{l}\right) - \Pi(0, 0)\right],$$

si conoscerà così il valore della costante $\varphi(0)$: allora la precedente equazione non conterrà più che la variabile x e la funzione $\varphi(x)$, e sarà atta a dare la forma di questa funzione in quantità determinate e cognite.

La forma delle funzioni, che entrano nelle espressioni delle velocità $\frac{da}{dz}$, $\frac{da}{dx}$, e della pressione λ date dalle formole (28), (29), (31), (32), (15), essendo così tutte determinate, i valori di queste quantità saranno pienamente conosciuti ed il problema sarà completamente risoluto. Le equazioni (18) e

(33) rappresenteranno poi la superficie cilindrica sotto cui si dispone il pelo d'acqua, e si può osservare che l'equazione di questa superficie si ottiene anche indipendentemente dalla forma della funzione $\varphi(x)$, poichè se nell'equazione (33) si mette il valore di $\varphi(x)$ tratto dall'equazione (18), risulta.

$$(36) \qquad z' = \Pi\left(gz' \sin.\zeta + gx \cos.\zeta - \varphi(0), \frac{Q}{l}\right) - \Pi(gz' \sin.\zeta + gx \cos.\zeta - \varphi(0), 0)$$

la quale rappresenta pure l'equazione della superficie libera del fluido.

3. Avanti di passare alle conseguenze che risultano dalle ritrovate equazioni, m'arresto con qualche osservazione su una difficoltà che potrebbe presentarsi nel determinare le funzioni arbitrarie. La determinazione della funzione $\pi(\alpha)$ espressa dalla formola (23) suppone la risoluzione algebrica dell'equazione (20). Quando quest'equazione fosse irresolubile, mancherebbe la cognizione della funzione $F'(\mathfrak{F}(\alpha))$, e quindi l'integrale della formola

$$(a) \qquad \int \frac{d\alpha}{\sqrt{2(\varphi(x) - \varphi(0)) + F'^2(\mathfrak{F}(\alpha))}}$$

riescirebbe impraticabile e la forma della funzione Π indeterminata. Ma si può eseguire sulla formola (24) una trasformazione mediante la quale essa diviene di forma determinata ancorchè l'equazione (20) sia irresolubile. Infatti posto $\mathfrak{F}(\alpha) = \omega$ si ha $\alpha = F(\omega)$, $d\alpha = F'(\omega)d\omega$, e $F'(\mathfrak{F}(\alpha)) = F'(\omega)$. Con queste posizioni l'integrazione della formola (24) si può far dipendere dall'integrazione della formola

$$\int \frac{F'(\omega)d\omega}{\sqrt{2(\varphi(x) - \varphi(0)) + F'^2(\omega)}}$$

la quale non suppone nè la risoluzione dell'equazione (20) nè l'integrazione della formola (19).

Indicando con $\overline{\Pi}(\varphi(x) - \varphi(0), \omega)$ l'integrale di quest'ultima formola, il sistema delle due equazioni

$$\alpha = F(\omega)$$

$$z = \overline{\Pi}\,(\,\varphi(x) - \varphi(0), \omega\,) + \psi(x)$$

terrà luogo dell' equazione (7) e quindi in vece delle equazioni (27), (28) e (29) risulteranno le seguenti

$$(27)' \quad z = \overline{\Pi}(\varphi(x) - \varphi(0), \omega) - \overline{\Pi}(\varphi(x) - \varphi(0), \omega')$$

$$(28)' \quad \frac{da}{dz} = \sqrt{2(\varphi(x) - \varphi(0)\,) + F'^2(\mathfrak{F}(\alpha)\,)}$$

$$(29)' \quad \frac{da}{dx} = -\sqrt{2(\varphi(x) - \varphi(0)\,) + F'^2(\mathfrak{F}(\alpha)\,)}\,[\,\overline{\Pi}'(\varphi(x) - \varphi(0), \omega\,)$$
$$- \Pi'(\varphi(x) - \varphi(0), \omega')\,]\,\varphi'(x)$$

e per determinare $\varphi(0)$ e $\varphi(x)$ avremo

$$(35)' \qquad -\varphi(0) = g\,\text{sin.}\,\zeta\,(\,\overline{\Pi}\,(\,0, \omega_{,}\,) - \overline{\Pi}\,(\,0, \omega'\,))$$

$$(34)' \quad \varphi(x) - gx\,\text{cos.}\,\zeta = g\,\text{sin.}\,\zeta\,[\,\overline{\Pi}\,(\,\varphi\,(x) - \varphi\,(0), \omega_{,}\,)$$
$$- \Pi\,(\varphi\,(x) - \varphi(0), \omega'\,)]$$

dove ω', ed $\omega_{,}$ rappresentano le due quantità $\mathfrak{F}\,(0)$ ed $\mathfrak{F}\left(\frac{Q}{l}\right)$, le quali quantità eguagliano le coordinate del fondo e della superficie nella sezione data all' origine delle coordinate.

Volendo con queste formole determinare le velocità e la pressione di un punto assegnato della corrente e corrispondente alle coordinate x, z, s' incomincerà col dato valore di x a ricavare il valore di $\varphi\,(x)$ e $\varphi'(x)$ per mezzo dell' ultima equazione (34)' e della sua differenziale. Col valore di $\varphi(x)$ e dell' ordinata z si avrà il valore di ω dall' equazione (27)'. Ciò fatto i secondi membri delle equazioni (28)', (29)', e (15) saranno composti di quantità tutte cognite e daranno le velocità e la pressione del punto assegnato della corrente.

Un' altra trasformazione che può essere utile in molti casi, e che riduce la quantità sotto il segno $\int$ nella formola (a) ad un semplice radicale quadratico tutte le volte che la derivata prima della funzione inversa di $F'(z)$, o sia la funzione $'\mathfrak{F}'\,(\omega)$ risulta una quantità razionale, è la seguente. Posto $F'(\,\mathfrak{F}(\alpha)\,) = \omega$, ed indicando con $'\mathfrak{F}\,(\omega)$ la funzione che risulta colla risoluzione considerando $\mathfrak{F}(\alpha)$ per incognita, si ha $\mathfrak{F}(\alpha) = {}'\mathfrak{F}(\omega)$ e quindi $\alpha = F('\mathfrak{F}\,(\omega)\,)$, e rappresentando con $'\mathfrak{F}'(\omega)$ la funzione prima di $\mathfrak{F}'(\omega)$, $d\alpha = {}'\mathfrak{F}'(\omega)\omega d\omega$, onde sostituendo la formola (*a*) si ridurrà a

$$\int \frac{{}'\mathfrak{F}'(\omega)\omega d\omega}{\sqrt{2(\varphi(x)-\varphi(0))+\omega^2}} \,.$$

In questo caso se si dinota con $\overline{\Pi}(\varphi(x)-\varphi(0),\omega)$ l'integrale di quest' ultima funzione, il sistema delle due equazioni

$$\alpha = \mathrm{F}(\mathfrak{F}(\omega))$$

$$z = \overline{\Pi}(\varphi(x)-\varphi(0),\omega)+\psi(x)$$

terrà luogo dell' equazione (7), ed interpretando ω nella significazione ultimamente assegnata, e quindi ponendo

$$\omega' = \mathrm{F}'(\mathfrak{F}(0)) \qquad \omega_{,} = \mathrm{F}'\left(\mathfrak{F}\left(\frac{Q}{l}\right)\right)$$

le stesse formole (27)' (28)', (29)' risolveranno il problema anche per questa trasformazione.

4. Esposte le formole generali del movimento permanente e continuo di un fluido che si muove in un canale rettangolare poco inclinato all' orizzonte, passiamo a dedurre da queste formole alcuni teoremi che sussistono in generale qualunque sia la legge che regna fra le velocità dei diversi punti della sezione all' origine.

I. Se indichiamo con $x_{,}$, $z_{,}$, $\alpha_{,}$ le quantità analoghe ad x, z, α ma appartenenti ad un' altra sezione, l'equazione (5) che sussiste per tutte le sezioni in generale, darà anche la seguente

$$\frac{1}{2}\,\frac{d\alpha_{,}^2}{dz_{,}^2} = \pi(\alpha_{,})+\varphi(x_{,}) \,.$$

Da questa equazione sottraendo la stessa (5) si ha

$$(b) \quad \frac{1}{2}\,\frac{d\alpha_{,}^2}{dz_{,}^2} - \frac{1}{2}\,\frac{d\alpha^2}{dz^2} = \pi(\alpha_{,})-\pi(\alpha)+\varphi(x_{,})-\varphi(x) \,.$$

Supponiamo che sia $\alpha = \alpha_{,}$, sul fondo per esempio (vedi il numero 2.) si ha in tutte le sezioni $\alpha = \alpha_{,} = 0$, ed alla superficie $\alpha = \alpha_{,} = \frac{Q}{l}$, resterà

$$\frac{1}{2}\,\frac{d\alpha_{,}^2}{dz_{,}^2} - \frac{1}{2}\,\frac{d\alpha^2}{dz^2} = \varphi(x_{,})-\varphi(x)$$

Ma l' equazione (18) ci dà

$$\varphi(x) = gx\cos.\zeta + gz\sin.\zeta$$

$$\varphi(x_{\prime}) = gx_{\prime}\cos.\zeta + gz_{\prime}\sin.\zeta$$

dunque sostituendo risulterà

$$\frac{1}{2g}\,\frac{d\alpha_{\prime}^2}{dz_{\prime}^2} - \frac{1}{2g}\,\frac{d\alpha^2}{dz^2} = (x_{\prime} - x)\cos.\zeta + (z_{\prime} - z)\sin.\zeta$$

Ora $\frac{d\alpha}{dz}$ rappresentando in generale la velocità parallela al fondo della molecola corrispondente alle coordinate x, z, sarà come è noto, $\frac{1}{2g}\,\frac{d\alpha^2}{dz^2}$ l'altezza dovuta alla velocità parallela al fondo della detta molecola. Dinotiamo in generale con h quest' altezza, osservando di più che $(x_{\prime}-x)\cos.\zeta+(z_{\prime}-z)\sin.\zeta$ equivale alla differenza di livello della superficie della corrente dalla sezione x alla sezione $x_{\prime}$, differenza che per brevità indicheremo con ϖ, si avrà

$$h_{\prime} - h = \varpi$$

la qual formola ci dà il teorema che *La differenza delle altezze dovute alle velocità parallele al fondo di due molecole poste sul fondo o sulla superficie, od in generale corrispondenti a due eguali valori di α, equivale alla differenza di livello della superficie del fluido dalla seconda alla prima sezione.*

II. Col teorema precedente possiamo paragonare le velocità parallele al fondo di due molecole poste in due diverse sezioni: se nell' equazione (*b*) poniamo $x = x_{\prime}$, ciò che la riduce a

$$(c) \qquad \frac{1}{2}\,\frac{d\alpha_{\prime}^2}{dz_{\prime}^2} - \frac{1}{2}\,\frac{d\alpha^2}{dz^2} = \pi(\alpha_{\prime}) - \pi(\alpha)$$

potremo instituire un confronto fra le velocità di due molecole poste nella stessa sezione. Facciasi per esempio $\alpha_{\prime} = \frac{Q}{l}$ ed $\alpha = 0$, per cui $\frac{d\alpha_{\prime}}{dz_{\prime}}$ sia la velocità di una molecola alla superficie, e $\frac{d\alpha}{dz}$ la velocità di una molecola sul fondo, si

avrà
$$h_1 - h = \frac{1}{g}\left(\pi\left(\frac{Q}{l}\right) - \pi(0)\right)$$

la quale equazione ci somministra il teorema che *La differenza delle altezze dovute alle velocità delle molecole poste sulla superficie o sul fondo è costante in tutta la lunghezza del canale:* ed in generale l'equazione (c) ci mostra che *La differenza delle altezze dovute a due molecole poste in una sezione qualunque e corrispondente a due eguali valori di a è parimenti costante.*

III. Un altro teorema che si deduce dalle formole ritrovate e che sussiste in generale nel grado d' approssimazione entro il quale ci siamo contenuti è, che la pressione di una molecola fluida qualunque risulta eguale come se il fluido fosse stagnante. Infatti eliminando $\phi(x)$ fra le due equazioni (15) e (18) e contrassegnando come si è detto di sopra con un apice il valore appartenente alla superficie del valor variabile z, si trova
$$\lambda = g(z' - z)\,\text{sin.}\,\zeta.$$

Ora $(z' - z)\text{sin.}\zeta$ è l'altezza variabile della colonna sovraincombente alla molecola che corrisponde all'ordinata z dunque *La pressione di una molecola qualunque è eguale al peso della colonna fluida che gli sta sopra, che è ciò che vale pei fluidi in quiete.*

5. Le formole dei numeri precedenti sono state ricavate colla supposizione che la velocità $\frac{da}{dx}$ perpendicolare al fondo del canale sia piccola, e che la differenziale $\frac{d^2a}{dx^2}$ sia di un ordine ancora inferiore, cioè dell' ordine del quadrato di $\frac{dz}{dx}$ ed al principio del numero 1. abbiamo promesso di verificare che questa supposizione è legittima almeno in un gran numero di casi. Per ciò fare richiamo l' equazione (31) scrivendo in essa per semplicità Π in luogo di $\Pi[\phi(x) - \phi(0)$,

$z - \Pi(\phi(x) - \phi(0), 0)]$, Π in luogo di $\Pi(\phi(x) - \phi(0), 0)$, e ϕ in luogo di $\phi(x)$, si avrà

$$\frac{da}{dx} = \Pi'\phi' + \Pi_{,}\Pi'\phi'$$

e differenziando e conservando le notazioni di Lagrange

$$\frac{d^2a}{dx^2} = \Pi''\phi'^2 + 2\Pi_{,}'\Pi'\phi'^2 + \Pi_{,,}\Pi'^2\phi'^2 + \Pi'\phi'' + \Pi_{,}(\Pi''\phi'^2 + \Pi'\phi'').$$

Ora l' equazione (34), posto $1 - g\sin.\zeta\,(\Pi'(Q:l) - \Pi'(0)) = D$, dà

$$\phi' = \frac{g\cos.\zeta}{D}$$

$$\phi'' = \frac{g\sin.\zeta(\Pi''(Q:l) - \Pi''(0)\}\phi'^2}{D}.$$

Dunque eccettuati i casi in cui qualcuna delle quantità $\frac{\Pi_{,}}{D}$ $\frac{\Pi_{,}\Pi'}{D}$, $\frac{\Pi''}{D^2}$, $\frac{\Pi_{,}'\Pi'}{D^2}$, $\frac{\Pi_{,,}\Pi'^2}{D^2}$, $\frac{\Pi'\Pi''(Q:l)}{D^2}$, $\frac{\Pi'\Pi''(0)}{D^2}$, $\frac{\Pi_{,}\Pi''}{D^2}$, $\frac{\Pi_{,}\Pi'\Pi''(Q:l)}{D^2}$ $\frac{\Pi_{,}\Pi'\Pi''(0)}{D^2}$ diventi molto grande, il valore di $\frac{da}{dx}$ sarà dell' ordine di $\cos.\zeta$, e quello di $\frac{d^2a}{dx^2}$ dell' ordine di $\cos.^2\zeta$. Ne' canali naturali od artificiali de' quali occorre all' Architetto Idraulico di considerare il moto delle acque, la pendenza del fondo del canale rappresentata da $\cos.\,\zeta$ è sempre molto piccola; così in questi canali si verificherà quasi sempre la supposizione ammessa da principio.

6. L' applicazione delle formole date ai casi speciali non presenta più che le difficoltà dell' integrazione di funzioni con una sola variabile, e della risoluzione di equazioni con una sola incognita. Queste integrazioni e risoluzioni dipenderanno dalla natura della funzione $F'(z)$ che rappresenta la velocità di un punto qualunque corrispondente all' ordinata z in una sezione data, nella quale abbiamo posta l'origine delle ascisse e l' incile del canale.

Se si prende per la funzione $F'(z)$ una costante, il che corrisponde al caso che l' acqua si introduca nella sezione all' incile con una velocità costante in tutti i punti, si ricasca nelle formole che abbiamo ritrovato nella Memoria premessa fondata sulla supposizione che $pdx + rdz$ sia una differenziale esatta. Questa supposizione analitica corrisponde dunque alla condizione fisica che l' acqua entri nella tratta di canale che si considera, con una velocità eguale in tutta l'estensione della sezione all' origine.

Per trattare un caso più generale, supponiamo che l'acqua si presenti alla prima sezione con una velocità parallela al fondo che creschi o cali proporzionalmente all' altezza z di modo che, v rappresentando la velociaà sul fondo ed ε un coefficiente costante, questa velocità sia espressa dalla formola $v + \varepsilon z$. In quest' ipotesi sarà

$$F'(z) = v + \varepsilon z$$

e quindi

$$\alpha = F(z) = vz + \frac{1}{2}\varepsilon z^2$$

senza costante perchè deve essere $\alpha = 0$ quando $z = 0$. Di quì si ricaverà, equazioni (21) e (23),

$$z = -\frac{1}{\varepsilon}\left(v \pm \sqrt{v^2 + 2\varepsilon\alpha}\right) = \mathfrak{F}(\alpha)$$

$$F'^2(\mathfrak{F}(\alpha)) = v^2 + 2\varepsilon\alpha \quad \text{e} \quad \pi(\alpha) = \frac{1}{2}v^2 + \varepsilon\alpha - \varphi(0)$$

e quindi, equazione (24)

$$\Pi(\varphi(x) - \varphi(0), \alpha) = \int \frac{d\alpha}{\sqrt{2(\varphi(x) - \varphi(0), + v^2 + 2\varepsilon\alpha}}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{2(\varphi(x) - \varphi(0)) + v^2 + 2\varepsilon\alpha}$$

Sarà così secondo le formole (27), (30), (28), (29).

$$z = \frac{1}{\varepsilon}\left[\sqrt{2(\varphi(x) - \varphi(0)) + v^2 + 2\varepsilon\alpha} - \sqrt{2(\varphi(x) - \varphi(0)) + v^2}\right]$$

$$\alpha = z\sqrt{2(\varphi(x) - \varphi(0) + v^2} + \frac{1}{2}\varepsilon z^2$$

$$\frac{d\alpha}{dz} = \sqrt{2(\varphi(x) - \varphi(0)) + v^2} + \varepsilon z$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{z\varphi'(x)}{\sqrt{2(\varphi(x) - \varphi(0)) + v^2}}.$$

Avremo in seguito per determinare $\varphi(x)$ l'equazione sussistente alla superficie

$$\varphi(x) - gx\cos.\zeta = \frac{g\sin.\zeta}{\varepsilon}\left[\sqrt{2(\varphi(x)-\varphi(0))+v^2+2\varepsilon Q:l} - \sqrt{2(\varphi(x)-\varphi(0))+v^2}\right]$$

se si pone

$$\sqrt{2(\varphi(x)-\varphi(0))+v^2} = \omega$$

d' onde risulta

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{\omega^2-v^2}{2}\,.$$

Si avrà per determinare ω l' equazione

$$(c)\qquad \left(\frac{\omega^2-v^2}{2}+\varphi(0)-gx\cos.\zeta\right) = \frac{g\sin.\zeta}{\varepsilon}\left(\sqrt{\omega^2+2\varepsilon Q:l}-\omega\right)$$

la quale liberata dal radicale monta soltanto al quarto grado ed è perciò risolubile algebricamente: in seguito si avrà per la superficie

$$(d)\qquad z' = \frac{1}{\varepsilon}\left[\sqrt{\omega^2+2\varepsilon Q:l}-\omega\right] = \frac{2Q}{l\left[\sqrt{\omega^2+2\varepsilon Q:l}-\omega\right]}$$

e per un punto qualunque

$$\alpha = z\omega + \frac{1}{2}\varepsilon z^2$$

$$(e)\qquad \frac{d\alpha}{dz} = \omega + \varepsilon z$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = z\,\frac{d\omega}{dx}.$$

Eliminando ω fra l' equazioni (c) e (d) si trova

$$\frac{1}{2}\left(Q:l-\frac{1}{2}\varepsilon z'^2\right)^2 - z'^2\left(\frac{v^2}{2}-\varphi(0)+gx\cos.\zeta\right) = g\sin.\zeta.z'^3\,.$$

Se si chiama $-a$ l' altezza z' del pelo d' acqua nella prima sezione e si osserva che per questa sezione si ha $x=0$, $\omega=v$, $Q:l = -va + \frac{1}{2}\varepsilon a^2$, colle sostituzioni si trova

$$\varphi(0) = -ga\sin.\zeta$$

onde sarà

$$\frac{1}{2}\left(Q{:}l - \frac{1}{2}\varepsilon' z^2\right) - gz'^2\left(\frac{v^2}{2g} + a\sin.\zeta + gx\cos.\zeta\right) = g\sin.\zeta.z'^3$$

Quest'equazione appartiene ad una linea di quart' ordine del genere CXLIII. (1), la quale ha quattro rami infiniti che si estendono dalla parte delle ascisse positive due iperbolici di cui l' asintoto è rappresentato dall'equazione $z'^2 = \frac{Q}{2lgx\cos\zeta}$ e due parabolici dell'asintoto dato da $z'^2 = \frac{3g}{\varepsilon}\, x\cos.\zeta$. Un solo dei rami corrispondenti a ciascun asintoto si troverà dalla parte delle ascisse negative che sono le sole che corrispondono alle curve situate sopra il terreno, così due soli rami potranno rappresentare la curva direttrice della superficie cilindrica del pelo d' acqua.

Se la differenza fra la velocità del fondo e della superficie, come spesso può risultare dagli esperimenti, sarà piccola, il coefficiente ε sarà pure piccolo, allora trascurando il quadrato di ε, ed impiegando la surriferita espressione di $Q{:}l$ la precedente equazione si potrà ridurre a

$$z'^3 + x\cot.\zeta z'^2 + \frac{1}{\sin.\zeta}\left(a\sin.\zeta + \frac{v^2}{2g}\left(1 - \frac{\varepsilon a}{v}\right)\right)z'^2 = \frac{a^2}{\sin.\zeta}\,\frac{v^2}{2g}\left(1 - \frac{\varepsilon a}{v}\right)$$

la quale è affatto simile a quella segnata (24) nella Memoria, ad eccezione che l' altezza $\frac{v^2}{2g}$ è quì rimpiazzata da $\frac{v^2}{2g}\left(1 - \frac{\varepsilon a}{v}\right)$. Con questa leggiera modificazione tutte le conseguenze dedotte nei numeri 14. 15. e 16. della Memoria saranno applicabili al caso più generale che ora consideriamo. L' equazione (*e*) poi ci mostra che la stessa legge di velocità che esiste nella sezione all' origine sussiste in tutto il corso del canale.

---

(1) Euler. Introductio in analysin infinitorum. pag. 149. Edizione di Losanna.

SULLE FUNZIONI GENERATRICI

MEMORIA II.ª

DEL

SIG. MARCHESE LUIGI RANGONI

Ricevuta adì 15. *Settembre* 1824.

Nella precedente Memoria (1) essendosi considerate le funzioni generatrici ad una sola variabile, resta a trattarsi delle altre a due o più variabili e ad applicarle alla soluzione delle equazioni alle differenze finite e parziali, alle quali riduconsi diversi problemi analoghi a quelli, che già furono sciolti nel mentovato scritto, benchè di ordine più elevato, ed in generale connessi colle leggi delle serie recurro-recurrenti.

1. Si abbia pertanto l'espressione generale delle funzioni generatrici a due variabili secondo la forma esposta (2) dal Sig. Marchese Laplace

$$\begin{array}{llllllll}
)^a \ldots\ldots & y_{0,0} & +y_{1,0}.t & +y_{2,0}.t^2 & \ldots\ldots +y_{x,0}.t^x & +y_{x+1,0}.t^{x+1} & +\text{ec.} \\
)^a \ldots\ldots & +y_{0,1}.t' & +y_{1,1}.tt' & +y_{2,1}.t^2t' & \ldots\ldots +y_{x,1}.t^x t' & +y_{x+1,1}.t^{x+1} t' & +\text{ec.} \\
)^a \ldots\ldots & +y_{0,2}.t'^2 & +y_{1,2}.tt'^2 & +y_{2,2}.t^2t'^2 & \ldots\ldots +y_{x,2}.t^x t'^2 & +y_{x+1,2}.t^{x+1} t'^2 & +\text{ec.} \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
x+1)^a \ldots & +y_{0,x'}.t'^{x'} & +y_{1,x'}.tt'^{x'} & +y_{2,x'}.t^2t'^{x'} & \ldots\ldots +y_{x,x'}.t^x t'^{x'} & +y_{x+1,x'}.t^{x+1} t'^{x'} & +\text{ec.}
\end{array}$$

---

(1) Vedi Memorie della Società Italiana. Tom. XIX. pag. 241.

(2) V. Laplace. Théorie Analytique des probabilités. - Seconde édition. Paris 1814. pag. 50.

In essa il coefficiente di $t^x t'^{x'}$, che rappresenta quello in generale del prodotto di due potenze qualunque di t, t' è $y_{x,x'}$, siccome la stessa funzione generatrice non è che lo sviluppo di tutte le combinazioni, che possono farsi di tutti i valori possibili degli indici $x+m$, $x'+m'$, e de' corrispondenti esponenti di t, t' in una funzione generalmente rappresentata da $y_{x+m,x'+m'}.t^{x+m} t'^{x'+m'}$, nella quale tanto x, x', quanto m, m' possono ricevere tutti i valori interi da zero inclusivamente all' infinito. Ora è da notarsi, che la sovraesposta funzione generatrice può considerarsi composta di $x+1$ funzioni generatrici ad una sola variabile secondo le diverse linee orizzontali contrassegnate $(1)^a$, $(2)^a$, $(3)^a \ldots . (x+1)^a$ in ognuna delle quali cioè l'indice corrispondente al valore di $x'+m'$ è costante. Così nella linea $(1)^a$ è sempre $x'=m'=0$, mentre il valore di $x+m$ cominciando da 0 cresce ad ogni termine all'infinito per la differenza 1. Prendendo poi altrettante file verticali, rispettivamente composte dei primi, secondi ec. termini delle orizzontali, la funzione generatrice a due variabili si considera pure divisa in funzioni generatrici ad una sola variabile in ciascuna delle quali l' indice del valore $x'+m'$ varia ad ogni termine per la differenza 1, mentre è costante l' indice del valore di $x+m$. Ciò posto la funzione generatrice può presentarsi in un aspetto più semplice solo che si rifletta come $y_{x+m,0}.t^{x+m} t'^0 = y_{x+m,0}.t^{x+m}$ esprimendo il termine generale della funzione generatrice in cui $x'+m'$ è costante ed uguale allo zero, non si avrà che da aggiungere all' indice 0 in $y_{x+m,0}.t^{x+m}$ un valore costante di $x'+m'$, per esempio n, e moltiplicare $y_{x+m,n}.t^{x+m}$ per t'^n per avere il termine generale di un' altra funzione generatrice in cui $x'+m'$ è pure costante ma $= n$. Ora questa operazione può indicarsi per $y_{x+m,0}.t^{x+m}.t^{\prime n}_{+n}$ intendendo sempre che n qualunque siasi debba essere aggiunto all' indice o in $y_{x+m,0}.t^{x+m}$, e che il risultamento debba moltiplicarsi per t'^{n}. Con questa nuova convenzione si vedrà per le cose già dette, che la proposta funzione generatrice a due variabili prende la forma

$$(A)..\left(y_{0,0}+y_{1,0}.t+y_{2,0}.t^2+\ldots+y_{x,0}.t^x+y_{x+1,0}.t^{x+1}+\text{ec.}\right)\times$$
$$\left(t^{\prime 0}_{+0}+t'_{+1}+t'^{2}_{+2}+\ldots+t'^{x'}_{+x'}+\text{ec.}\right).$$

Da tutto ciò è pur facile l' inferire, che rappresentando per $G(y_{x.x'})$ la funzione generatrice a due variabili, e per $g(y_{a,x})$ ovvero $g(y_{b,x'})$ la generatrice di una funzione di una sola variabile che può esserlo anche di una costante a, o b, sarà $G(y_{x,x'})$ equivalente non meno a $g(y_{0,x'}).t^0+g(y_{1,x'}).t^1+g(y_{2,x'})t^2+$ ec. che a $g(y_{x,0}).t'^0+g(y_{x,1}).t'+g(y_{x,2}).t'^2+$ ec. Giova poi l' avvertire, che ogniqualvolta in una funzione a due variabili $y_{x,x'}$ la x non varj al variare della x', e viceversa, la funzione generatrice di $y_{x,x'}$ potrà notarsi nel primo caso per $g\left(\underbrace{y_{x,x'}}_{x'}\right)$, e nel secondo per $g\left(\underbrace{y_{x,x'}}_{x}\right)$.

La funzione generatrice a due variabili sotto qualunque forma, che vuolsi quind' innanzi chiamare u, quando sia moltiplicata per $\frac{1}{t}-1$ diviene la funzione generatrice di $\Delta y_{x,x'}=y_{x+1,x'}-y_{x,x'}$ supposto che in $y_{x,x'}$ varj la sola x per la differenza 1. Di fatto in $u\left(\frac{1}{t}-1\right)$ il coefficiente di $t^x.t'^{x'}$ non può risultare che dalla moltiplicazione di $\frac{1}{t}$ per la combinazione $y_{x+1,0}.t^{x+1}.t'^{x'}_{+x'} = y_{x+1,x'}.t'^{x+1}.t'^{x'}$, e di -1 per l'altra combinazione $y_{x,0}.t^{x}.t'^{x'}_{+x'}$, e quindi si rende evidente essere $u\left(\frac{1}{t}-1\right)$ la funzione generatrice di $\Delta y_{x,x'}$, quando x' non varia. Allo stesso modo, indicando per $'\Delta y_{x,x'}$ la differenza prima di $y_{x,x'}$ considerando come variabile la sola x', si proverà essere $u\left(\frac{1}{t'}-1\right)$ la funzione generatrice di $'\Delta y_{x,x'}$. Propriamente poi la funzione generatrice di $y_{x,x'}$ in questo caso è $y_{x,0}.t^{x}\left(t'^{0}_{+0}+t'^{1}_{+1}+t'^{2}_{+2}+t'^{3}_{+3}+\text{ec.}+t'^{x'}_{+x'}+\text{ec.}\right)\times\left(\frac{1}{t'}-1\right)$ o più semplicemente $t^{x}\left(\frac{1}{t'}-1\right).\,g\left(\underbrace{y_{x.x'}}_{x'}\right)$ essendo x un qualunque numero che non varia al variare della x', siccome nel caso di x' non variabile al variare della x la funzione generatrice è $t'^{x'}_{+x'}\left(y_{0,0}+y_{1,0}.t+y_{2,0}.t^{2}+y_{3,0}.t^{3}+\text{ec.}+y_{x,0}.t^{x}+y_{x+1,0}.t^{x+1}+\text{ec.}\right)\left(\frac{1}{t}-1\right)$ ovvero $t'^{x'}\left(\frac{1}{t}-1\right).\,g\left(\underbrace{y_{x,x'}}_{x}\right)$. Pertanto esprimendo per $\Delta^{i}y_{x,x'}$ la differenza *i esima* di $y_{x,x'}$ quando varia la sola x, ed applicando alla trovata funzione generatrice di $\Delta y_{x,x'}$ il discorso, che fu fatto intorno a quella di Δy_{x} nella precedente Memoria al n.° 1. si vedrà facilmente essere nel presente caso $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^{i}$ la funzione generatrice di $\Delta y_{x,x'}$ giacchè prescindendo dalle potenze negative di t, $\Delta y_{x,x'}$ e le sue variazioni tengono in $u\left(\frac{1}{t}-1\right)$ quello stesso posto che $y_{x,x'}$ e le sue variazioni

tengono in u; e parimenti $\Delta^2 y_{x,x'}$ tiene in $u\left(\frac{1}{t}-1\right)^2$ lo stesso luogo che $\Delta y_{x,x'}$ in $u\left(\frac{1}{t}-1\right)$, e così di seguito. Allo stesso modo si dimostra, che la funzione generatrice di $'\Delta^{i'}y'_{x,x'}$ cioè della differenza *i' esima* di $y_{x,x'}$ variando la sola x' è espressa da $u\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{i'}$, dal che pure si inferisce, che essendo $u\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{i'}$ rispetto a $'\Delta^{i'}y_{x,x'}$ e prescindendo sempre dalle potenze negative di t', ciò che è u rispetto ad $y_{x,x'}$, la funzione generatrice di $\Delta^{i}.'\Delta^{i'}y_{x,x'}$ sarà espressa da
$u\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{i'}.\left(\frac{1}{t}-1\right)^{i}$.

2. Se per $\nabla y_{x,x'}$ si denoti una espressione della forma

$$\begin{array}{llllll}
Ay_{x,x'} & +By_{x+1,x'} & +Cy_{x+2,x'} & +Dy_{x+3,x'} & + \text{ec.} \\
 & +B'y_{x,x'+1} & +C'y_{x+1,x'+1} & +D'y_{x+2,x'+1} & + \text{ec.} \\
 & & +C''y_{x,x'+2} & +D''y_{x+1,x'+2} & + \text{ec.}
\end{array}$$

si troverà la sua funzione generatrice nella somma delle funzioni generatrici di ciascuna delle serie disposte in linee orizzontali in che essa come sopra si divide. Ora ciascuna di queste serie non contiene che una sola variabile giacchè in ciascuna di esse come è visibile x', $x'+1$, $x'+2$ ec. sono costanti. Dunque la funzione generatrice parziale di $Ay_{x,x'}+By_{x+1,x'}+Cy_{x+2,x'}+Dy_{x+3.x'}+$ ec. sarà $u\left(A+\frac{B}{t}+\frac{C}{t^2}+\frac{D}{t^3}+\text{ec.}\right)$ poichè moltiplicando u per A, il coefficiente di $t^{x}t'^{x'}$ nel prodotto è la sola espressione $Ay_{x,x'}$, moltiplicando u per $\frac{B}{t}$ il coefficiente di $t^{x}t'^{x'}$ non può essere che $By_{x+1,x'}$ e così di seguito. Applicando osservazioni analoghe all'altra serie $B'y_{x,x'+1}$ $+C'y_{x+1,x'+1}+D'y_{x+2,x'+1}+$ ec. si vedrà, che il coefficiente di $t^{x}t'^{x'}$ in $\frac{uB'}{t'}$ è $B'y_{x,x'+1}$, in $\frac{uC'}{t't}$ sarà $C'y_{x+1,x'+1}$ come in $\frac{uD'}{t't^2}$ esso è $D'y_{x+2,x'+1}$; dunque la funzione generatrice parziale di $B'y_{x,x'+1}+C'y_{x+1,x'+1}+D'y_{x+2,x'+1}+$ ec. è $\frac{u}{t'}\left(B'+\frac{C'}{t}+\frac{D'}{t^2}+\text{ec.}\right)$. Così si mostrerà essere la funzione generatrice di $C''y_{x,x'+2}+D''y_{x+1,x'+2}+$ ec. espressa da $\frac{u}{t'^2}\left(C''+\frac{D''}{t}+\text{ec.}\right)$, e quindi la funzione generatrice di $\nabla y_{x,x'}$ sarà $u\left[\left(A+\frac{B}{t}+\frac{C}{t^2}+\text{ec.}\right)+\frac{1}{t'}\left(B'+\frac{C'}{t}+\frac{D'}{t^2}+\text{ec.}\right)\right.$ $\left.+\frac{1}{t'^2}\left(C''+\frac{D''}{t}+\text{ec.}\right)+\text{ec.}\right]$. In questa nuova funzione generatrice, è facile a vedersi, che la data espressione di $\nabla y_{x,x'}$ comparisce come il termine generale della serie de' coefficienti, poichè in questa, prescindendo pur sempre dai termini, che contengono potenze negative di t, o di t', i coefficienti a cagion d'esempio di $t^{x-1}t'^{x'}$, $t^{x}t'^{x'-1}$, $t^{x-2}t'^{x'}$, $t^{x}t'^{x'-2}$ ec. ovvero di $t^{x-1}t'^{x'-1}$, $t^{x-2}t'^{x'-2}$ ec. si hanno dal porre in $\nabla y_{x,x'}$ o nella sua espressione $x-1$ in luogo di x, $x'-1$ in luogo di x' successivamente, o ad un tempo stesso, e così di seguito. Si rileva pertanto, che la funzione $u\left[\left(A+\frac{B}{t}+\frac{C}{t^2}+\text{ec.}\right)+\frac{1}{t'}\left(B'+\frac{C'}{t}+\frac{D'}{t^2}+\text{ec.}\right)\right.$ $\left.+\frac{1}{t'^2}\left(C''+\frac{D''}{t}+\text{ec.}\right)+\text{ec.}\right]$ non è altro, che la u nella quale ad $y_{x,x'}$ ed alle sue variazioni siano state sostituite rispettivamente le espressioni di $\nabla y_{x,x'}$, $\nabla y_{x-1,x'}$, $\nabla y_{x,x'-1}$,

$\nabla y_{x-1,x'-1}$ ec. Quindi se per $\nabla^2 y_{x,x'}$ si indichi una funzione nella quale $\nabla y_{x,x'}$ entri allo stesso modo che $y_{x,x'}$ in $\nabla y_{x,x'}$ è chiaro per un discorso simile al già fatto, che la funzione generatrice di $\nabla^2 y_{x,x'}$ si avrà da quella di $\nabla y_{x,x'}$ moltiplicata per l' espressione per cui si moltiplicò pure la u onde avere la stessa funzione generatrice di $\nabla y_{x,x'}$. Di fatto se si indichi con u' la funzione generatrice di $\nabla y_{x,x'}$ essendo per ipotesi

$$\begin{aligned}\nabla^2 y_{x,x'} = A\nabla y_{x,x'} + B\nabla y_{x+1,x'} + C\nabla y_{x+2,x'} &+ D\nabla y_{x+3,x'} + \text{ec.}\\ + B'\nabla y_{x,x'+1} + C'\nabla y_{x+1,x'+1} &+ D'\nabla y_{x+2,x'+1} + \text{ec.}\\ + C''\nabla y_{x,x'+2} &+ D''\nabla y_{x+1,x'+2} + \text{ec.}\end{aligned}$$

dalle osservazioni già fatte si dedurrà la funzione generatrice di $\nabla^2 y_{x,x'}$ espressa da $u'\left[\left(A + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} + \text{ec.}\right) + \frac{1}{t'}\left(B' + \frac{C'}{t} + \frac{D'}{t^2} + \text{ec.}\right) + \frac{1}{t'^2}\left(C'' + \frac{D''}{t} + \text{ec.}\right) + \text{ec.}\right]$ ovvero, sostituendo l' espressione già trovata di u', da $u\left[\left(A + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} + \text{ec.}\right) + \frac{1}{t'}\left(B' + \frac{C'}{t} + \frac{D'}{t^2} + \text{ec.}\right) + \frac{1}{t'^2}\left(C'' + \frac{D''}{t} + \text{ec.}\right) + \text{ec.}\right]^2$. Pertanto rappresentando generalmente per $\nabla^{n} y_{x,x'}$ una funzione che abbia lo stesso senso rispetto a $\nabla^{n-1} y_{x,x'}$ che si è dato a $\nabla^2 y_{x,x'}$ rispetto a $\nabla y_{x,x'}$, e supposto ancora che le funzioni $\nabla^{n-2} y_{x,x'}$, $\nabla^{n-3} y_{x,x'}$ ec. retrocedendo fino a $\nabla^2 y_{x,x'}$ abbiano ciascuna lo stesso senso rispetto alla prossima di un indice inferiore, con raziocinj interamente analoghi ai già esposti si troverà la funzione generatrice di $\nabla^{n} y_{x,x'}$ espressa da $u\Big[\left(A + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} + \text{ec.}\right) + \frac{1}{t'}\left(B' + \frac{C'}{t} + \frac{D'}{t^2} + \text{ec.}\right)$

$+\frac{1}{t'^2}\left(C''+\frac{D''}{t}+\text{ec.}\right)+\text{ec.}\Big]^n$. Quindi, poichè per le cose dette si rende manifesto, che la trovata funzione generatrice ha la stessa forma di u, se ne inferisce pure anche per ciò che si è dimostrato nel n.° precedente essere $\left(\frac{1}{t}-1\right)^i\times\left(\frac{1}{t'}-1\right)^{i'}u\Big[\left(A+\frac{B}{t}+\frac{C}{t^2}+\text{ec.}\right)+\frac{1}{t'}\left(B'+\frac{C'}{t}+\frac{D'}{t^2}+\text{ec.}\right)+\frac{1}{t'^2}\left(C''+\frac{D''}{t}+\text{ec.}\right)+\text{ec.}\Big]^n$ la funzione generatrice di $\Delta^{i}.{}'\Delta^{i'}\overset{n}{\nabla}y_{x,x'}$.

3. Se nella espressione $\Big[\left(A+\frac{B}{t}+\frac{C}{t^2}+\text{ec.}\right)+\frac{1}{t'}\left(B'+\frac{C'}{t}+\frac{D'}{t^2}+\text{ec.}\right)+\frac{1}{t'^2}\left(C''+\frac{D''}{t}+\text{ec.}\right)+\text{ec.}\Big]$ si ponga in luogo di $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{t'}$ rispettivamente y_x, $y_{x'}$ ed essa poi si moltiplichi tutta per $(y_x)^0(y_{x'})^0$ prenderà la medesima la seguente forma

$$(y_x)^0.(y_{x'})^0\times\left(\begin{array}{llll}A+B(y_x)^1+C(y_x)^2 & +D(y_x)^3 & + \text{ec.}\\ \quad+B'(y_{x'})^1+C'(y_x)^1(y_{x'})^1 & +D'(y_x)^2(y_{x'})^1 & + \text{ec.}\\ \qquad\qquad\quad+C''(y_{x'})^2 & +D''(y_x)^1(y_{x'})^2 & + \text{ec.}\end{array}\right)$$

Quindi sostituendo ad $(y_x)^0.(y_{x'})^0$ o ciò che è lo stesso all' unità, che può sempre considerarsi come moltiplicatore di ciascun termine di questa serie, la funzione $y_{x,x'}$, ed applicando ai suoi indici rispettivamente in forma di somma gli esponenti di (y_x), $(y_{x'})$, da essa nascerà l'espressione proposta al principio del precedente numero 2 cioè:

$$\begin{array}{l} Ay_{x,x'} + By_{x+1,x'} + Cy_{x+2,x'} + Dy_{x+3,x'} + \text{ec.} \\ \quad + B'y_{x,x'+1} + C'y_{x+1,x'+1} + D'y_{x+2,x'+1} + \text{ec.} \\ \qquad + C''y_{x,x'+2} + D''y_{x+1,x'+2} + \text{ec.} \end{array}$$

Da ciò si raccoglie che se s, e quindi s^i è una funzione di $\frac{1}{t}$, e di $\frac{1}{t'}$, sviluppando s^i secondo le potenze di queste variabili, che riusciranno perciò necessariamente moltiplicate fra loro nel risultato dello sviluppo, si otterrà una funzione della stessa forma di $\left[\left(A + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} + \text{ec.}\right) + \frac{1}{t'}\left(B' + \frac{C'}{t} + \frac{D'}{t^2} + \text{ec.}\right) + \frac{1}{t'^2}\left(C'' + \frac{D''}{t} + \text{ec.}\right) + \text{ec.}\right]$, la quale potrà dare facilmente il coefficiente di $t^x.t'^{x'}$ in us^i applicando in essa per ciascuna delle potenze o semplici, o insieme moltiplicate di $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{t'}$ la funzione $y_{x,x'}$ accresciuta ne' suoi indici degli esponenti di quelle potenze. Così ad un termine qualunque $\frac{k}{t^m t'^{m'}}$ di quello sviluppo dovrà sostituirsi $ky_{x+m,x'+m'}$, e per conseguenza a $k\frac{1}{t^0}.\frac{1}{t'^0} = k$ sarà da sostituirsi $ky_{x,x'}$. È poi evidente, che se prima di sviluppare s^i si sostituisca in s, y_x in luogo di $\frac{1}{t}$, $y_{x'}$ in luogo di $\frac{1}{t'}$ e poscia sviluppata s^i secondo le potenze di y_x, e di $y_{x'}$ si sostituisca a queste la funzione $y_{x,x'}$ accresciuta ne' suoi indici degli esponenti di quelle, si otterrà l'intento anche più semplicemente, ed avrà luogo anche in questo modo il passaggio dalla funzione generatrice us^i all' analogo coefficiente di $t^x.t'^{x'}$.

Se in vece di sviluppare s^i secondo le potenze di $\frac{1}{t}$,

$\frac{1}{t'}$ si sviluppi secondo le potenze di $\frac{1}{t} - 1$, e di $\frac{1}{t'} - 1$ potrà designarsi per $k\left(\frac{1}{t} - 1\right)^m\left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{m'}$ un termine qualunque di questo sviluppo, ed il coefficiente di $t^x.t'^{x'}$ in $ku\left(\frac{1}{t} - 1\right)^m\left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{m'}$ essendo pel num. 1. $k\Delta^m{}'\Delta^{m'}y_{x,x'}$, che si riduce a $ky_{x,x'}$ quando $m=m'=0$, si avrà il coefficiente di $t^x.t'^{x'}$ in us^i col sostituire in s, $\Delta y_{x,x'}$ in luogo di $\frac{1}{t} - 1$, $'\Delta y_{x,x'}$ in luogo di $\frac{1}{t'} - 1$, e sviluppando poi s^i secondo le potenze di $\Delta y_{x,x'}$, $'\Delta y_{x,x'}$ non si dovrà in fine che applicare alle caratteristiche Δ, $'\Delta$ gli esponenti delle potenze medesime cioè scrivere $k\Delta^m{}'\Delta^{m'}y_{x,x'}$ in luogo di un termine qualunque $k(\Delta y_{x,x'})^m\,({}'\Delta y_{x,x'})^{m'}$, e per conseguenza $ky_{x,x}$ in luogo del termine costante k. È poi quasi inutile l'avvertire, che il coefficiente di $t^x.t'^{x'}$ in us^i deve in qualunque modo ridursi alla forma $\nabla^i y_{x,x'}$ che è sempre la stessa di quella di $\nabla y_{x,x'}$ proposta al principio del numero 2. deducendosi l'una e l'altra nel modo già spiegato da s^i o da s sviluppate secondo le potenze di $\frac{1}{t}$, $\frac{1}{t'}$ oppure secondo quelle di $\frac{1}{t} - 1$, $\frac{1}{t'} - 1$.

4. Esprimendo Σ la caratteristica degli integrali finiti relativi ad x, e $'\Sigma$ quella degli integrali finiti relativi ad x', come pure essendo z la funzione generatrice di $\Sigma^i{}'\Sigma^{i'}y_{x,x'}$ sarà per le cose dette nel precedente num. 1. $z\left(\frac{1}{t} - 1\right)^i \times$

$\left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{i'}$ la funzione generatrice di $y_{x,x'}$, la quale indipendentemente dalle potenze negative di t, t', e prescindendo delle funzioni arbitrarie di t, t' che le integrazioni successive introducono, deve ridursi ad u. Per rendere ciò più sensibile, e per trovare un' equazione tra $z\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{i}\left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{i'}$ ed u, si supponga primieramente $i' = 1$, e sarà ${}'\Sigma y_{x,x'}$ l' integrale primo di $y_{x,x'}$ nell' ipotesi della sola x' variabile. La sua funzione generatrice si avrà ponendo nella espressione generale di u ridotta nel num. 1. e contrassegnata (A), ${}'\Sigma y_{x,x'} + \text{A}$ in luogo di $y_{x,x'}$ indicando per A una funzione arbitraria di x. Quindi qualunque termine della funzione generatrice di ${}'\Sigma y_{x,x'}$ riferito ad una potenza qualunque t^{x-m} sarà perciò rappresentato da $\left[\left({}'\Sigma y_{x-m,0} + \text{A}\right)t'^{0} + \left({}'\Sigma y_{x-m,1} + \text{A}\right)t' + \left({}'\Sigma y_{x-m,2} + \text{A}\right)t'^{2} + \text{ec.}\right]t^{x-m}$, e moltiplicandolo per $\frac{1}{t'} - 1$ diverrà $\left({}'\Sigma y_{x-m,0}\, t'^{-1} + \frac{\text{A}}{t'} - {}'\Sigma y_{x-m,0} - \text{A} + {}'\Sigma y_{x-m,1} + \text{A} - {}'\Sigma y_{x-m,1}\, t' - \text{A}t' + {}'\Sigma y_{x-m,2}.t' + \text{A}t' - {}'\Sigma y_{x-m,2}\, t'^{2} - \text{A}t'^{2} + \text{ec.}\right)t^{x-m}$. Pertanto essendo ${}'\Sigma y_{x-m,1} - {}'\Sigma y_{x-m,0} = y_{x-m,0}$, ${}'\Sigma y_{x-m,2} - {}'\Sigma y_{x-m,1} = y_{x-m,1}$ ec., questo termine si ridurrà al corrispondente di u più una funzione arbitraria di t divisa per t' quale dev' essere $\left(\frac{{}'\Sigma y_{x-m,0} + \text{A}}{t'}\right)t^{x-m}$ onde si ricava, che anche l' intera funzione generatrice di ${}'\Sigma y_{x,x'}$ sarà uguale ad u più una funzione arbitraria di t divisa per t', la quale può indicarsi per $\frac{a'}{t'}$. Ora con un metodo simile e con processo analogo a quello che fu seguito al numero 5. della precedente Memoria si dimostra, che la funzione generatrice di $y_{x,x'}$ dipendentemente dalla funzione generatrice dell' integrale $'\Sigma^{i'} y_{x,x'}$ è $u + \frac{a'}{t'} + \frac{b'}{t'^2} + \frac{c'}{t'^3} \ldots\ldots + \frac{q'}{t'^{i'}} = u'$ essendo a', b', c', ec. funzioni arbitrarie di t. Adesso si rifletta, che la funzione generatrice di $\Sigma' y_{x,x'}$ è $z\left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{i'}$ per ipotesi e per ciò che si è detto al numero 1., e quindi $z\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{i}\left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{i'}$ è la funzione generatrice di $y_{x,x'}$, la quale si ridurrebbe all'espressione di u' se non si dovesse tener conto delle nuove funzioni arbitrarie introdotte dalle integrazioni relative al segno Σ^{i}. Quindi con discorso analogo a quello con cui si è trovato il valore di u' rispetto ad u si troverà quello di $z\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{i} \times \left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{i'}$ rispetto ad u', cioè sarà $z\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{i}\left(\frac{1}{t'} - 1\right)^{i'} = u' + \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{t^3} \ldots\ldots + \frac{q}{t^i} = u + \frac{a'}{t'} + \frac{b'}{t'^2} + \frac{c'}{t'^3} \ldots\ldots + \frac{q'}{t'^{i'}} + \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{t^3} \ldots\ldots + \frac{q}{t^i}$ essendo a, b, c. ec. funzioni arbitrarie di t'.

5. Esposti i teoremi del Laplace con qualche illustrazione, prima di applicarli alla risoluzione delle equazioni alle differenze parziali giova quì dar luogo ad alcune considerazioni intorno alle funzioni generatrici di altre funzioni conosciute.

Date le funzioni generatrici di due o più funzioni ad una sola variabile può aversi facilmente la funzione generatrice del prodotto. Se si indichi per $\varphi(x)$ una funzione conosciuta di x, e per $\varphi'(x')$ una funzione pure conosciuta di x', si avrà l' equazione $G(\varphi(x).\,\varphi'(x')) = g(\varphi(x)).\,g(\varphi'(x'))$.

Di fatto essendo $g(\varphi(x)) = \varphi(0).t^0 + \varphi(1).t + \varphi(2).t^2 \ldots + \varphi(x).t^x +$ ec., e $g(\varphi'(x')) = \varphi'(0).t'^0 + \varphi'(1).t' + \varphi'(2).t'^2 \ldots + \varphi'(x').t'^{x'} +$ ec.

il prodotto delle due funzioni generatrici semplici sarà

$$\varphi(0)\varphi'(0).t^{0}t'^{0}+\varphi(1)\varphi'(0).tt'^{0}+\varphi(2)\varphi'(0)t^{2}t'^{0}\ldots\ldots+\varphi(x)\varphi'(0).t^{x}t'^{0}+\text{ec.}$$

$$+\varphi(0)\varphi'(1).t^{0}t'+\varphi(1)\varphi'(1).tt'+\varphi(2)\varphi'(1).t^{2}t'\ldots\ldots+\varphi(x)\varphi'(1)t^{x}t'+\text{ec.}$$

. . . .

. . . .

$$+\varphi(0)\varphi'(x').t^{0}t'^{x'}+\varphi(1)\varphi'(x').tt'^{x'}+\varphi(2)\varphi'(x).t^{2}t'^{x'}\ldots+\varphi(x)\varphi'(x')t^{x}t'^{x'}+\text{ec.}$$

Ma se si pone $\varphi(x)\varphi'(x')=\varphi''(x,x')$ sarà ancora $\varphi(0)\varphi'(0)=\varphi''(0,0)$, $\varphi(x)\varphi'(0)=\varphi''(x,0)$, e viceversa $\varphi(0)\varphi'(x')=\varphi''(0,x)$; dunque il prodotto medesimo prenderà la forma seguente, cioè

$$t'^{0}.g(\varphi''(x,0))+t'.g(\varphi''(x,1))+t'^{2}.g(\varphi''(x,2))\ldots.+t'^{x'}.g\left(\varphi''\left(\underbrace{x,x'}_{x}\right)\right)+\text{ec.}$$

che è appunto la funzione generatrice a due variabili di $\varphi''(x,x')$ cioè di $\varphi(x)\varphi'(x')$.

Sia per esempio $\varphi(x)=a^{x}$, $\varphi'(x')=b^{x'}$, e trovate che siano le funzioni generatrici semplici di a^{x}, e di $b^{x'}$ si avrà pure la funzione generatrice di $a^{x}b^{x'}$. Ora essendo $g(a^{x})=1+at+a^{2}t^{2}+a^{3}t^{3}\ldots.+a^{x}t^{x}+\text{ec.}$ sarà $atg(a^{x})=at+a^{2}t^{2}+a^{3}t^{3}+\text{ec.}$ e quindi $g(a^{x})-atg(a^{x})=1$, $g(a^{x})=\frac{1}{1-at}$. Pertanto $G(a^{x}b^{x'})=g(a^{x})\,g(b^{x'})=\frac{1}{1-at}\cdot\frac{1}{1-bt'}$.

La regola fin qui data per trovare la funzione generatrice del prodotto di due variabili si estende pure alla ricerca della funzione generatrice del prodotto di tre o più funzioni di una sola, e diversa variabile. Sieno di fatto le tre funzioni $\varphi(x)$, $\varphi'(x')$, $\varphi''(x'')$. Le rispettive funzioni generatrici saranno

1.ª $\varphi(0).t^{0}+\varphi(1).t+\varphi(2).t^{2}+\varphi(3).t^{3}\ldots\ldots+\varphi(x).t^{x}+\text{ ec.}$

2.ª $\varphi'(0).t'^{0}+\varphi'(1).t'+\varphi'(2).t'^{2}+\varphi'(3).t'^{3}\ldots\ldots+\varphi'(x').t'^{x'}+\text{ ec.}$

3.ª $\varphi''(0)'t''^{0}+\varphi''(1).t''+\varphi''(2).t''^{2}+\varphi''(3).t''^{3}\ldots\ldots+\varphi''(x'').t''^{x''}+\text{ ec.}$

Si vede quindi facilmente che rappresentando rispettivamente $\varphi(x).t^{x}$, $\varphi'(x').t'^{x'}$, $\varphi''(x'').t''^{x''}$ il termine generale delle tre serie 1.^{a}, 2.^{a}, 3.^{a}, come nella loro moltiplicazione si ottiene il termine $\varphi(x)\varphi'(x')\varphi''(x'').t^{x}\,t'^{x'}\,t''^{x''}$, così si otterranno anche tutti gli altri della stessa forma secondo le infinite combinazioni che possano prendere a tre a tre gli indici x, x', x'' ai quali si attribuiscano tutti i valori possibili in numeri interi. Essendo questa pertanto la natura appunto della funzione generatrice a tre variabili, la quale è tale rispetto a qualunque prodotto della forma $\varphi'''(x,x',x'').t^{x}\,t'^{x'}\,t''^{x''}$ cui si riduce l' altra $\varphi(x)\varphi'(x')\varphi''(x'').t^{x}\,t'^{x'}\,t''^{x''}$, rimane dimostrato, che le funzioni generatrici semplici di ciascuna funzione separata delle tre variabili x, x', x'' essendo insieme moltiplicate danno la funzione generatrice del prodotto $\varphi(x)\varphi'(x')\varphi''(x'')$. Di quì si ricava anche l' idea generale della funzione generatrice ad un qualunque numero di variabili. Essa di fatto non è altro che quella serie infinita di cui è termine generale $\varphi(x.x',x''....x^{(m)}).t^{x}\,t'^{x'}\,t''^{x''}....t^{(m)x^{(m)}}$ in cui x, x', $x''...x^{(m)}$ siano le viariabili, le quali col loro numero determinano il grado della stessa funzione generatrice, e che ricevono tutti i valori numerici possibili da zero inclusivamente all' infinito combinandosi fra essi tali valori in tutti i modi possibili.

6. Resta ora a vedersi come possa prendersi la funzione generatrice a due variabili di $\varphi(x)+\varphi'(x')$.

È opportuno quì di premettere una considerazione intorno alla funzione generatrice dell' unità ad una o più variabili, per cui vuole intendersi quella funzione o serie ordinata secondo le potenze di t se trattasi di una sola variabile, o secondo le potenze del prodotto di $t\,t'\,t''...t^{(m)}$ con tutte le combinazioni degli esponenti t, t', t'' ec. se trattasi di più variabili, nella quale il coefficiente di t^{x} ovvero di $t^{x} t'^{x'} t''^{x''} \dots t^{(m)\,x^{(m)}}$ sia l' unità. Quindi tal funzione generatrice sarà a cagione di $g(a^{x}) = \frac{1}{1-at}$ espressa nel primo caso da $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^{2} \dots + t^{x} +$ ec., e negli altri da $\frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{1-t'} \cdot \frac{1}{1-t''} \dots \frac{1}{1-t^{(m)}}$ cioè dal prodotto di altrettante frazioni $\frac{1}{1-t}$, $\frac{1}{1-t'}$, $\frac{1}{1-t''}$ ec. quante sieno le variabili che entrino nella funzione generatrice richiesta. A cagione d' esempio la funzione a due variabili generatrice dell' unità è

$$\frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{1-t'} = (1+t+t^{2}+t^{3}\dots+t^{x}+\text{ec.})(1+t'+t'^{2}+t'^{3}\dots+t'^{x'}+\text{ec.})$$

essendo appunto l' unità il coefficiente di $t^{x} t'^{x'}$ in tale prodotto. Ciò deducesi anche in altro modo dal già detto osservando che $1 = x^{0}.\, x'^{0}.\, x''^{0} \dots x^{(m)0}$ cioè, che l' unità può considerarsi come il prodotto di quante funzioni si voglia di diverse variabili, e perciò anche per essa vale la regola, che il prodotto delle funzioni generatrici semplici di x^{0}, x'^{0}, x''^{0}, ec. $x^{(m)0}$ sarà la funzione generatrice di $x^{0}.\, x'^{0}.\, x''^{0} \dots x^{(m)0}$. È poi da notarsi, che per funzione generatrice semplice dell' unità può anche considerarsi più generalmente la frazione $\frac{t^{m}}{1-t}$ $= t^{m}(1+t+t^{2}+t^{3}+\text{ec.})$, la quale ha luogo dipendentemente dalle condizioni de' diversi problemi, quando i coefficienti di tutte le potenze inferiori a t^{m} debbono annullarsi, e dalle equazioni alle funzioni generatrici, che ne nascono. Pertanto il limite inclusivo di m è $m=0$, ed allora la funzione generatrice è $\frac{1}{1-t}$ come prima. Sia per esempio in un problema da trovarsi la funzione generatrice di $y_{x,0}\, t^{x}$. Se per le condizioni del problema stesso la funzione $y_{x,0}$ si annulla finchè x abbia un valore al di sotto di m, allora la funzione generatrice di $y_{x,0}\,t^{x}$ è $\frac{t^m}{1-t}$, poichè dalla funzione generatrice semplice ed assoluta dell' unità quale può chiamarsi $\frac{1}{1-t}$ sono da escludersi i termini da 1 fino a t^m, locchè appunto si eseguisce moltiplicandola per t^m. Inoltre se una funzione $y_{x,x'}$ cominciasse ad essere uguale all' unità pe' valori di $x=m$, $x'=m'$, la funzione generatrice di $y_{x,x'}$ sarebbe $\frac{t^m}{1-t}\cdot\frac{t'^{m'}}{1-t'}$

$$=\left(t^m+t^{m+1}+t^{m+2}+\text{ec.}\right)\left(t'^{m'}+t'^{m'+1}+t'^{m'+2}+\text{ec.}\right)$$

nella quale mancano i prodotti di due qualunque delle potenze di t, t', i cui esponenti sieno rispettivamente minori di m, e di m'. Dopo ciò è facile a vedersi come possa trovarsi la funzione generatrice dell' unità a più variabili in corrispondenza di funzioni, le quali si riducano appunto all' unità per particolari supposizioni intorno alle variabili stesse.

Finalmente si possono ora applicare queste considerazioni alla ricerca della funzione generatrice a due variabili di una quantità della forma $\varphi(x)+\varphi'(x')$. Osservando pertanto che $\varphi(x)=\varphi(x).x'^{0}$, e $\varphi'(x')=\varphi'(x').x^{0}$, perciò che è stato superiormente dimostrato si vedrà essere $G(\varphi(x).x'^{0})=g(\varphi(x)).g(x'^{0})=g(\varphi(x)).\frac{t'^{m}}{1-t'}$, e $G(\varphi'(x').x^{0})=g(\varphi'(x')).g(x^{0})=g(\varphi'(x')).\frac{t^{m}}{1-t}$. Dunque la funzione generatrice richiesta sarà $g(\varphi(x)).\frac{t'^{m'}}{1-t'}+g(\varphi'(x')).\frac{t^{m}}{1-t}$. Sia pertanto a cagion d'esempio l' espressione di cui si vuole la funzione generatrice a due variabili $x+2^{x'}$; ed essendo $\frac{t}{(1-t)^2}$ la funzione generatrice di x, $\frac{1}{1-2t'}$ la funzione generatrice di $2^{x'}$, la richiesta a due variabili sarà $\frac{t}{(1-t)^2}\cdot\frac{t'^{m'}}{1-t'}$

$+ \frac{1}{1-2t'} \cdot \frac{t^m}{1-t}$ indicando al solito per m, m' gli esponenti rispettivi di t, t', che convengono alla funzione generatrice semplice dell'unità nelle particolari condizioni del problema a cui esse si riferiscono.

Una regola analoga servirà per trovare la funzione generatrice a tre variabili per un prodotto o per la somma di due funzioni ad una sola e diversa variabile, od anche di una sola funzione di una variabile qualunque, giacchè nel primo caso basterà moltiplicare la funzione generatrice a due variabili del supposto prodotto o somma per la funzione generatrice semplice dell'unità dipendente da una terza variabile, e nell'altro caso la generatrice della funzione ad una sola variabile, che si suppone sviluppata secondo le potenze di t, verrà moltiplicata pel prodotto di due funzioni generatrici dell'unità rispettivamente sviluppabili per le potenze di t', e di t''. Così la funzione generatrice a tre variabili di xx' sarà $\frac{t}{(1-t)^2} \cdot \frac{t'}{(1-t')^2} \cdot \frac{t''^{m''}}{1-t''}$; quella di $x+x'$ sarà $\left(\frac{t}{(1-t)^2} \cdot \frac{t'^{m'}}{1-t'} + \frac{t'}{(1-t')^2} \cdot \frac{t^m}{1-t} \right) \cdot \frac{t''^{m''}}{1-t''}$, siccome la funzione generatrice a tre variabili della sola x sarà $\frac{t}{(1-t)^2} \cdot \frac{t'^{m'}}{1-t'} \cdot \frac{t''^{m''}}{1-t''}$.

Queste operazioni come è facile a rilevarsi rendono omogenee le funzioni generatrici de' due membri di un' equazione alle differenze finite e parziali, quando il secondo di essa contenga in tutti o in alcuno de' suoi termini qualche funzione di un numero di variabili minore di quello che ne contengono i termini del primo membro.

7. Si può ora con molta semplicità dichiarare la dottrina della risoluzione delle equazioni lineari alle differenze finite e parziali a due variabili, e di qualunqne ordine coi coefficienti costanti.

Sia quindi primieramente l' equazione $y_{x,x'} = \nabla y_{x'x}$, in cui la funzione $\nabla y_{x,x'}$ abbia lo stesso senso, che le fu attribuito al num. 2. cioè rappresenti una funzione di tal forma, che essa nella totalità de' suoi termini comprendere possa tutte le variazioni di x combinate con quelle di x' nella funzione $y_{x,x'}$ cosicchè ognuna delle predette variazioni di $y_{x,x'}$ sia moltiplicata per un coefficiente che si annulli mancando in $\nabla y_{x,x'}$ la corrispondente combinazione. Ciò posto essendo (num. 1.) u la funzione generatrice di $y_{x,x'}$ sarà pel num. 2. $u\Big[\Big(A+\frac{B}{t}+\frac{C}{t^2}+\text{ec.}\Big)+\frac{1}{t'}\Big(B'+\frac{C'}{t}+\frac{D'}{t^2}+\text{ec.}\Big)$ $+\frac{1}{t'^2}\Big(C''+\frac{D''}{t}+\text{ec.}\Big)\Big]$ la funzione generatrice di $\nabla y_{x,x'}$.

Perciò qualora l' equazione proposta si verificasse per qualunque valore di x, x' vi sarebbe pure equazione fra le dette due funzioni generatrici. Siccome però accade che per alcuno dei valori medesimi l'equazione proposta più non sussiste, cominciando essa soltanto a valere quando a cagion d'esempio $x=m$, $x'=m'$, e potendosi d' altronde dalle condizioni de' problemi particolari ricavare i valori di $y_{m,m'}$, $y_{m-1.m'}$, $y_{m,m'-1}$, $y_{m-1,m'-1}$ ec. ed i corrispondenti dei termini di $\nabla y_{m,m'}$, $\nabla y_{m-1,m'}$, $\nabla y_{m.m'-1}$, $\nabla y_{m-1.m'-1}$ ec. se ne inferisce che denotando per u' la somma delle funzioni generatrici di $y_{m,m'}$, $y_{m-1,m'}$, $y_{m,m'-1}$ ec., e per u'' la somma delle funzioni generatrici di $\nabla y_{m,m'}$, $\nabla y_{m-1,m'}$, $\nabla y_{m,m'-1}$ ec. si avrà l' equazione

$$u-u'=u\Big[\Big(A+\frac{B}{t}+\frac{C}{t^2}+\text{ec.}\Big)+\frac{1}{t'}\Big(B'+\frac{C'}{t}+\frac{D'}{t^2}+\text{ec.}\Big)$$
$$+\frac{1}{t'^2}\Big(C''+\frac{D''}{t}+\text{ec.}\Big)\Big]-u'',$$ dalla quale si deduce il valore generale di u, che sviluppato secondo le potenze di t, t' insieme moltiplicate darà nel coefficiente di $t^x t'^{x'}$ il va-

lore ricercato di $y_{x,x'}$. Intanto è da notarsi che quantunque in una equazione alle differenze parziali il secondo membro possa sempre ridursi alla forma assegnata per $\nabla y_{x,x'}$ facendo crescere opportunamente le variabili di una o più unità, pure riesce spesso più semplice il lasciarvi sussistere gli indici minori di x, o di x' che talvolta vi si incontrano, e che rendono perciò il detto secondo membro per se non riferibile all' espressione di $\nabla y_{x,x'}$. Ogni qualvolta ciò abbia luogo, la funzione generatrice del secondo membro si avrà dipendentemente da u prendendo la somma delle funzioni generatrici di ciascun termine di esso, e rammentando che in generale la funzione generatrice di $\mathrm{T}y_{x\pm m,x'\pm m'}$ è $\mathrm{T}ut^{\mp m}.t'^{\mp m'}$, essendo T il coefficiente di un termine qualunque, ed u la funzione generatrice di $y_{x,x'}$. Del resto il metodo per risolvere l'equazione rimane lo stesso di quello che si è poc'anzi accennato, il quale richiede come meglio si vedrà nelle applicazioni, il frequente passaggio dai coefficienti alle funzioni generatrici per quelle ipotesi de' valori di x, x' ne' quali l' equazione che viene in qualunque de' sopradetti modi proposta non si verifica.

Un metodo pure affatto simile servirà per risolvere l' equazione $y_{x,x'}=\nabla y_{x,x'}+\mathrm{X}$, esprimendo per X una funzione qualunque di x, x', ovvero l'equazione $y_{x,x'}={}'\nabla y_{x.x'}+\mathrm{X}$ qualora $\nabla y_{x,x'}$ non si riduca per se alla forma attribuita a $\nabla y_{x,x'}$, cioè contenga nelle variazioni di $y_{x,x'}$ qualche indice minore di x, o di x'. Di fatto nell' un caso e nell' altro considerando u come la funzione generatrice di $y_{x,x'}$, si troverà facilmente la somma delle funzioni generatrici de' termini di $\nabla y_{x,x'}$, o di ${}'\nabla y_{x,x'}$, la quale unita alla funzione generatrice di X dovrebbe uguagliarsi ad u, qualora per qualunque valore di x, x' l' equazione potesse verificarsi. Però essendovi valori di queste variabili pe' quali l'equazione non sussista, per avere l' equazione richiesta dovrà sottrarsi da u la somma delle funzioni generatrici de' valori di $y_{x,x'}$ che non verificano la proposta, e dalla funzione generatrice del secondo membro dovrà pure sottrarsi la somma delle funzioni generatrici de' corrispondenti valori di $\nabla y_{x,x'}$, ovvero $'\nabla y_{x,x'}$ e di X.

8. Seguendo un andamento analogo a quello della precedente Memoria si potranno ora applicare le esposte Teorie a diversi problemi fra i quali alcuni furono proposti e risoluti dal Sig. Marchese Laplace. Sia pel primo quello con cui trattasi di determinare la probabilità che ha un giuocatore A di vincere mancandogli x colpi favorevoli mentre all'avversario B ne mancano x', essendo il giuoco di tal condizione che avendosi un' urna contenente due palle l' una bianca, e l'altra nera, la prima sia a favore del giuocatore A, e gli faccia guadagnare un punto quando essa si estragga, e lo stesso dicasi della nera riguardo a B, rimettendosi poi dopo ciascuna estrazione la palla estratta nell' urna. Esprimendo quindi per $y_{x,x'}$ la probabilità di A è facile a vedersi che si ha l' equazione $y_{x,x'}=\frac{1}{2}.y_{x-1,x'}+\frac{1}{2}.y_{x,x'-1}$ poichè se la palla estratta è bianca $y_{x,x'}$ si cambia in $y_{x-1,x'}$, e se è nera $y_{x,x'}$ diviene $y_{x,x'-1}$, essendo poi la probabilità semplice di ciascuno di questi cambiamenti $\frac{1}{2}$, mentre è pur tale quella di estrarre o palla nera, o palla bianca. Ciò posto essendo u la funzione generatrice di $y_{x,x'}$, quella di $\frac{1}{2}\left(y_{x-1,x'}+y_{x,x'-1}\right)$ sarà $\frac{u}{2}(t+t')$. Riflettasi ora che la supposione di $x=x'=0$ non può mai aver luogo riguardo al principio del giuoco, poichè questo sarebbe nullo, e non nel progresso essendo evidente, che l'uno dei giuocatori deve esaurire prima dell'altro i col-

pi che gli mancano, altrimenti compiendo amendue nel tempo stesso i colpi loro prescritti, vincerebbero pure amendue locchè è assurdo. Dunque facendo $x = x' = 0$ nell' equazione proposta si ha $y_{0,0} = 0$. Pertanto nel secondo membro di essa le funzioni corrispondenti $y_{-1,0}$, $y_{0,-1}$ non possono aver luogo per la stessa ragione, e sono d' altronde escluse dalla natura delle rispettive funzioni generatrici, le quali non ammettono ne' loro termini verun indice negativo. Essendo poi generalmente $y_{0,x'} = 1$ poichè quando $x = 0$ il giuocatore A è certo della vincita, si vedrà eziandio non sussistere l' equazione relativa a questa ipotesi cioè $y_{0,x'} = \frac{1}{2} \cdot y_{-1,x'} + \frac{1}{2} \cdot y_{0,x'-1}$. Trascurando pertanto nel secondo membro dell' equazione il termine $\frac{1}{2} \cdot y_{-1,x'}$, che non può aver luogo in $\frac{ut}{2}$ funzione generatrice di $\frac{1}{2} \cdot y_{x-1,x'}$ mancando in essa qualunque indice negativo, si tratterà di prendere la funzione generatrice di $y_{0,x'} = 1$, la quale si esprime per $\frac{t'}{1-t'}$ e di sottrarla da u, e di prendere pure la funzione generatrice di $\frac{1}{2} \cdot y_{0,x'-1}$, la quale è $\frac{1}{2} \cdot \frac{t'^2}{1-t'}$ sottraendola da $\frac{u}{2}(t + t')$. Così si avrà l' equazione $u - \frac{t'}{1-t'} = \frac{u}{2}(t + t') - \frac{1}{2} \cdot \frac{t'^2}{1-t'}$, e perciò

$$u = \frac{t'\left(1 - \frac{t'}{2}\right)}{\left(1-t'\right)\left(1 - \frac{t}{2} - \frac{t'}{2}\right)} = \frac{t'}{1-t'}\left(1 - \frac{t'}{2}\right)\left[\left(1 - \frac{t'}{2}\right) - \frac{t}{2}\right]^{-1}$$

$$= \frac{t'}{1-t'}\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{1 - \frac{1}{2}t'} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{t^2}{\left(1 - \frac{1}{2}t'\right)^2} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{t^3}{\left(1 - \frac{1}{2}t'\right)^3} + \text{ec.}\right).$$

In questa serie il coefficiente di t^x è $\frac{1}{2^x} \cdot \frac{t'}{\left(1 - t'\right)\left(1 - \frac{1}{2}t'\right)^x}$

Ora la potenza t^x nella funzione u è moltiplicata rispettivamente in una classe dei termini della stessa u per tutte le potenze di t'. Quindi per avere il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ basterà prendere il coefficiente di $t'^{x'}$ in $\frac{1}{2^x} \cdot \frac{t'}{\left(1-t'\right)\left(1-\frac{1}{2}t'\right)^x}$ che esprime appunto quella classe di termini all' infinito, ed essendo

$$\frac{t'}{\left(1-t'\right)\left(1-\frac{1}{2}t'\right)^x} = \frac{t'}{1-t'}\left(1-\frac{1}{2}t'\right)^{-x} = (t'+t'^2+t'^3+t'^4+\text{ec.}) \times$$

$$\left(1+\frac{1}{2}.\, xt' + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{x(x+1)}{1.2}\, t'^2 + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{x\,(x+1)(x+2)}{1.2.3}\, t'^3 \ldots\ldots\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2^{x'-1}} \cdot \frac{x(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+x'-2)}{1.2.3\ldots(x'-1)}\, t'^{x'-1} + \text{ec.}\right)$$, perciò il coefficiente di $t'^{x'}$ in questa espressione riesce $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2^2} \cdot \frac{x(x+1)}{1.2} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3} \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2^{x'-1}} \cdot \frac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+x'-2)}{1.2.3\ldots(x'-1)}$ cioè quello stesso che si ottiene ponendo $t'=1$ nello sviluppo di $\left(1-\frac{1}{2}t'\right)^{-x}$. Sarà dunque $y_{x,x'} = \frac{1}{2^x}\left(1+x.\frac{1}{2}+\frac{x(x+1)}{1.2} \cdot \frac{1}{2^2}\right.$ $\left. + \frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3} \cdot \frac{1}{2^3} \ldots + \frac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+x'-2)}{1.2.3\ldots(x'-1)} \cdot \frac{1}{2^{x'-1}}\right)$.

9. Sieno ora le tre palle esistenti in un' urna una delle quali bianca segnata col n.° 1., e le altre due nere, e di queste l'una porti il n.° 1, e l'altra il n.° 2. essendo la palla bianca favorevole al giuocatore A, e le nere al di lui avversario, e si supponga che per convenzione di giuoco debba ciascuna palla estratta diminuire del numero con cui è segnata quello de' punti che mancano al giuocatore cui essa è favorevole. Se $y_{x,x'}$, essendo x il numero de' colpi che mancano ad A, ed x' quello de' colpi che mancano all'altro giuocatore, esprime sempre la probabilità di A ad ottenere tutti i punti che gli mancano, cioè a vincere il giuoco, si avrà l'equazione alle dif-

ferenze parziali $y_{x,x'} = \frac{1}{3} \cdot y_{x-1,x'} + \frac{1}{3} \cdot y_{x,x'-1} + \frac{1}{3} \cdot y_{x,x'-2}$, la quale facilmente si dimostra se avvertasi essere $\frac{1}{3}$ la probabilità dell' estrazione di ciascuna delle tre palle, e cambiarsi $y_{x,x'}$ in $y_{x-1,x'}$ ogni qualvolta si estragga la palla bianca, e divenire $y_{x,x'-1}$, $y_{x,x'-2}$ se rispettivamente si estragga la palla nera segnata col n.° 1, o la palla nera segnata col n.° 2.

Essendo ora u la funzione generatrice di $y_{x,x'}$ sarà $\frac{u}{3}(t+t'+t'^2)$ la funzione generatrice del secondo membro dell' equazione proposta, e per trovare l'equazione necessaria a risolvere il problema giova osservare primieramente, che quando $x=x'=0$ svaniscono tutti i termini della proposta, e che ponendo solamente $x=0$ si ha per la natura del problema $y_{0,x'} = y_{0,x'-1} = y_{0,x'-2} = \text{ec.} = 1$. In questa supposizione, che, come è facile a vedersi, è la sola in cui non sussiste la proposta equazione, non si corrispondono quindi per eguaglianza le relative classi di termini delle due funzioni generatrici u, $\frac{u}{3}(t+t'+t'^2)$, e perciò sarà da sottrarsi da u la funzione generatrice di $y_{0,x'} = 1$ cioè $\frac{t'}{1-t'}$, e da $\frac{u}{3}(t+t'+t'^2)$ la somma delle due funzioni generatrici di $\frac{1}{3} \cdot y_{0,x'-1}$ e di $\frac{1}{3} \cdot y_{0,x'-2}$, la quale è $\frac{1}{3}\left(\frac{t'^2+t'^3}{1-t'}\right)$. Così si avrà $u - \frac{t'}{1-t'}$

$$= \frac{u}{3}(t+t'+t'^2) - \frac{1}{3}\left(\frac{t'^2+t'^3}{1-t'}\right); \text{ onde } u = \frac{t'\left(1-\frac{t'}{3}-\frac{t'^2}{3}\right)}{(1-t')\left(1-\frac{t}{3}-\frac{t'}{3}-\frac{t'^2}{3}\right)}.$$

Si faccia in questa espressione $1 - \frac{t'}{3} - \frac{t'^2}{3} = a$, e sarà

$u = \frac{t'}{1-t'} \cdot \frac{a}{a - \frac{t}{3}} = \frac{t'a}{1-t'} \left(a - \frac{t}{3} \right)^{-1} = \frac{t'}{1-t'} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot t a^{-1} + \frac{1}{3^2} \cdot t^2 a^{-2} + \frac{1}{3^3} \cdot t^3 a^{-3} \ldots + \frac{1}{3^x} \cdot t^x a^{-x} + \text{ec.} \right)$ in cui il coefficiente di t^x è $\frac{t'}{1-t'} \cdot \frac{1}{3^x} a^{-x} = \frac{1}{3^x} \cdot \frac{t'}{1-t'} \left(1 - \frac{t'(1+t')}{3} \right)^{-x}$ $= \frac{1}{3^x} (t' + t'^2 + t'^3 + \text{ec.}) \left(1 + \frac{x t'(1+t')}{3} + \frac{x(x+1)}{2} t'^2 \frac{(1+t')^2}{3^2} + \frac{x(x+1)(x+2)}{2.3} t'^3 \frac{(1+t')^3}{3^3} + \text{ec.} \right)$. Quindi il coefficiente di $t'^{x'}$, che si potrà raccogliere da quest'ultima espressione sarà pure il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ in u, cioè il valore cercato di $y_{x,x'}$. È poi manifesto, che in ogni caso particolare si avrà questo coefficiente nella formola $\frac{1}{3^x} \left(1 + x t' \frac{(1+t')}{3} + \frac{x(x+1)}{2} t'^2 \frac{(1+t')^2}{3^2} + \frac{x(x+1)(x+2)}{2.3} t'^3 \frac{(1+t')^3}{3^3} + \text{ec.} \right)$ rigettati da essa tutti i termini che nell' ulteriore sviluppo contengono la t' innalzata ad una potenza superiore alla $(x'-1)^{esima}$, e fatto $t'=1$, giacchè è d'altronde evidente che negli altri solamente potrà alzarsi la t' esattamente alla potenza $t'^{x'}$ col venire moltiplicata rispettivamente per uno de' termini della serie $t' + t'^2 + t'^3 + \text{ec.}$, che è uno dei fattori del coefficiente di t^x precedentemente ritrovato.

10. Se si supponga che sieno in un' urna due palle bianche distinte co' numeri 1, 2 ed anche due palle nere distinte cogli stessi numeri, la probabilità del giuocatore A nelle condizioni del giuoco simili a quelle che sonosi ritenute nel precedente numero sarà data dall' equazione

$$y_{x,x'} = \frac{1}{4} \cdot y_{x-1,x'} + \frac{1}{4} \cdot y_{x-2,x'} + \frac{1}{4} \cdot y_{x,x'-1} + \frac{1}{4} \cdot y_{x,x'-2} .$$

Pertanto essendo al solito u la funzione generatrice di $y_{x,x'}$, quella del secondo membro dell'equazione proposta sarà $\frac{u}{4}(t+t^2+t'+t'^2)$. Posto $x=0$ si ha $y_{0,x'}=y_{0,x'-1}=y_{0,x'-2}=$ec. $=1$, ed in questa supposizione vuolsi primieramente sottrarre da u la funzione generatrice di $y_{0,x'}$ cioè $\frac{t'}{1-t'}$ e da $\frac{u}{4}(t+t^2+t'+t'^2)$ quelle di $\frac{1}{4}.y_{0,x'-1}$ e di $\frac{1}{4}.y_{0,x'-2}$ cioè $\frac{1}{4}.\frac{t'^2}{1-t'}$, ed $\frac{1}{4}.\frac{t'^3}{1-t'}$. Sia inoltre $x=1$, ed in tal caso l'equazione proposta può tradursi in quest' altra $y_{1,x'}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}.y_{1,x'-1}+\frac{1}{4}.y_{1,x'-2}$, poichè per una parte $y_{0,x'}=1$, e per l' altra $y_{-1,x'}$ può considerarsi $=1$ prendendo $y_{x,x'}$ questa forma quando al giuocatore A mancando un solo punto ha luogo l' estrazione della palla bianca segnata col numero 2, la quale pure gli assicura la vincita. Sussiste dunque anche nell' ipotesi di $x=1$ la proposta equazione ma soltanto indipendentemente dalle funzioni generatrici de' due membri della medesima, poichè d'altronde questi sempre nella stessa ipotesi non possono nella loro integrità riferirsi alle funzioni generatrici mancando in $\frac{u}{4}(t+t^2+t'+t'^2)$ qualunque termine con indice negativo. Sarà quindi necessario per l' ipotesi di $x=1$ il dedurre dall'equazione $y_{1,x'}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}.y_{1,x'-1}+\frac{1}{4}.y_{1,x'-2}$ la funzione generatrice di $y_{1,x'}$ che può ora indicarsi per u', e che in seguito si determinerà con opportuno metodo, la quale moltiplicata per t deve sottrarsi da u. Egualmente dovranno sottrarsi da $\frac{u}{4}(t+t^2+t'+t'^2)$ le funzioni generatrici di $\frac{1}{4}.y_{0,x'}$, $\frac{1}{4}.y_{1,x'-1}$, $\frac{1}{4}.y_{1,x'-2}$, cioè $\frac{t'}{4(1-t')}$, $\frac{1}{4}u't'$, $\frac{1}{4}u't'^2$ tutte moltiplicate per t. Tutto ciò è evidente, poichè turbandosi l' eguaglianza fra le funzioni generatrici de' due membri dell' equazione proposta nelle ipotesi di $x=0$, $x=1$ è d'uopo sottrarre rispettivamente da tali funzioni quelle classi di termini, che contengono in fattore t^0, e t. Si avrà pertanto l'equazione $u - \frac{t'}{1-t'} - u't = \frac{u}{4}(t+t^2+t'+t'^2) - \frac{1}{4}\frac{t'(t'+t'^2)}{1-t'} - t\left(\frac{t'}{4(1-t')} + \frac{1}{4}u't' + \frac{1}{4}u't'^2\right)$, da cui si avrà u determinata la u'. Ripresa ora l'equazione $y_{1.x'} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}.y_{1,x'-1} + \frac{1}{4}.y_{1,x'-2}$, la quale appartiene alle differenze ordinarie, ed è perciò da risolversi col metodo delle funzioni generatrici ad una sola variabile, si deve osservare, che se u' è la funzione generatrice di $y_{1,x'}$, quella del secondo membro dell'equazione è $\frac{1}{1-t'}.\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(u't'+u't'^2)$, essendo $\frac{1}{2}.\frac{1}{1-t'}$ la funzione generatrice di $\frac{1}{2}$ in questo caso. Ciò posto quando $x'=0$, $y_{1,0}=0$ e svaniscono o mancano in relazione alla funzione generatrice del secondo membro dell'equazione tutti i termini di esso a riserva di $\frac{1}{2}$, che dovrà quindi sottrarsi dalla stessa funzione generatrice. Quando poi $x'=1$, essendo evidentemente $y_{1,1} = \frac{1}{2}$, l'equazione è identica in relazione alle funzioni generatrici avendosi da una parte $y_{1,0}=0$, ed $y_{1,-1}$ mancando ne' termini della generatrice corrispondente. Si avrà dunque l'equazione $u' = \frac{1}{2}.\frac{1}{1-t'} + \frac{u'}{4}(t'+t'^2) - \frac{1}{2}$, e quindi $u' = \dfrac{\frac{1}{2}t'}{(1-t')\left(1-\frac{t'}{4}-\frac{t'^2}{4}\right)}$.

Mettendo ora nell'equazione superiore questo valore di u', si avrà $u - \frac{t'}{1-t'} - \dfrac{\frac{1}{2}tt'}{(1-t')\left(1-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t'^2\right)} = \frac{u}{4}(t+t^2+t'+t'^2)$

$$-\frac{1}{4}\frac{t'(t'+t'^2)}{1-t'}-\frac{tt'}{4(1-t')}-\frac{\frac{t}{4}\cdot\frac{t'}{2}(t'+t'^2)}{(1-t')\left(1-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t'^2\right)}\text{, e di quì}$$

$$u=\frac{t'\left(1-\frac{t'}{4}-\frac{t'^2}{4}\right)+\frac{1}{4}tt'}{(1-t')\left(1-\frac{1}{4}(t+t^2+t'+t'^2)\right)}.$$

Trattasi ora di convertire questa espressione in una serie da cui possa ricavarsi il coefficiente di $t^x t'^{x'}$. Si faccia quindi $1-\frac{1}{4}t'-\frac{1}{4}t'^2=a$, e sarà $u=(1+t'+t'^2+t'^3+\text{ec.})\times$

$$t'\left(a+\frac{1}{4}t\right)\left(a-\frac{1}{4}t(1+t)\right)^{-1}=(1+t'+t'^2+t'^3+\text{ec.})\,t'\left(a+\frac{1}{4}t\right)\times$$

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{t}{4}\cdot\frac{(1+t)}{a^2}+\frac{t^2}{4^2}\cdot\frac{(1+t)^2}{a^3}+\frac{t^3}{4^3}\cdot\frac{(1+t)^3}{a^4}+\text{ec.}\right)$$

$$=(1+t'+t'^2+t'^3+\text{ec.})\,t'\left[\left(1+\frac{t}{4}\frac{(1+t)}{a}+\frac{t^2}{4^2}\cdot\frac{(1+t)^2}{a^2}+\text{ec.}\right)\right.$$

$$\left.+\left(\frac{t}{4a}+\frac{t^2}{4^2a^2}\cdot(1+t)+\frac{t^3}{4^3a^3}(1+t)^2+\text{ec.}\right)\right]\text{, ed es-}$$

sendo

$$\frac{1}{a}=1+\frac{t'}{4}(1+t')+\frac{t'^2}{4^2}\cdot(1+t')^2+\frac{t'^3}{4^3}\cdot(1+t')^3+\text{ec.}$$

$$\frac{1}{a^2}=1+\frac{2t'}{4}(1+t')+\frac{2.3}{2.4^2}t'^2(1+t')^2+\frac{2.3.4}{2.3.4^3}t'^3(1+t')^3+\text{ec.}$$

$$\frac{1}{a^3}=1+\frac{3t'}{4}(1+t')+\frac{3.4}{1.2.4^2}t'^2(1+t')^2+\frac{3.4.5.}{1.2.3.4^3}t'^3(1+t')^3+\text{ec.}$$

$$\frac{1}{a^4}=1+\frac{4t'}{4}(1+t')+\frac{4.5}{1.2.4^2}t'^2(1+t')^2+\frac{4.5.6}{1.2.3.4^3}t'^3(1+t')^3+\text{ec.}$$

ec. ec.

si avrà pure dopo le necessarie sostituzioni

$$\text{(B)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad u = (t' + t'^2 + t'^3 + t'^4 + \text{ec.}) \times$$

$$\left\{\begin{array}{l}
1 + \frac{t(1+t)}{4}\left(1 + \frac{t'}{4}(1+t') + \frac{t'^2}{4^2}(1+t')^2 + \text{ec.}\right) + \frac{t}{4}\left(1 + \frac{t'}{4}(1+t') + \frac{t'^2}{4^2}(1+t')^2 + \text{ec.}\right) \\
+ \frac{t^2(1+t)^2}{4^2}\left(1 + \frac{2t'}{4}(1+t') + \frac{2.3}{2.4^2}t'(1+t')^2 + \text{ec.}\right) + \frac{t^2(1+t)}{4^2}\left(1 + \frac{2t'}{4}(1+t') + \frac{2.3}{2.4^2}t'(1+t')^2 + \text{ec.}\right) \\
+ \frac{t^3(1+t)^3}{4^3}\left(1 + \frac{3t'}{4}(1+t') + \frac{3.4}{1.2.4^2}t'^2(1+t')^2 + \text{ec.}\right) + \frac{t^3(1+t)^2}{4^3}\left(1 + \frac{3t'}{4}(1+t') + \frac{3.4}{1.2.4^2}t'^2(1+t')^2 + \text{ec.}\right) \\
+ \frac{t^4(1+t)^4}{4^4}\left(1 + \frac{4t'}{4}(1+t') + \frac{4.5}{1.2.4^2}t'^2(1+t')^2 + \text{ec.}\right) + \frac{t^4(1+t)^3}{4^4}\left(1 + \frac{4t'}{4}(1+t') + \frac{4.5}{1.2.4^2}t'^2(1+t')^2 + \text{ec.}\right) \\
+ \text{ ec.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ec.}
\end{array}\right\}$$

In questa formola per avere il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ non curando il fattore $t' + t'^2 + t'^3 + t'^4 + \text{ec.}$ si dee tener conto di tutte le potenze di t' inclusivamente a t'^0 non superiori a $t'^{x'-1}$, limitatamente però al caso in cui sieno moltiplicate per la sola potenza x^{esima} di t, e fare in seguito $t'=1$. Di fatto tutte le potenze di t' non superiori a $t'^{x'-1}$ nel detto fattore debbono essere elevate alla potenza x'^{esima} per la loro moltiplicazione con uno de' termini della serie $t'+t'^2+t'^3+t'^4+\text{ec.}$ Ora la formola stessa da adoperarsi colla detta regola per ottenere il ricercato coefficiente può anche ridursi osservando che

$$\frac{t(1+t)}{4} + \frac{t}{4} = \frac{t(2+t)}{4},$$

$$\frac{t^2(1+t)^2}{4^2} + \frac{t^2(1+t)}{4^2} = \frac{t(1+t)+t}{4} \cdot \frac{t(1+t)}{4} = \frac{t(2+t)}{4} \cdot \frac{t(1+t)}{4},$$

$$\frac{t^3(1+t)^3}{4^3} + \frac{t^3(1+t)^2}{4^3} = \frac{t(1+t)+t}{4} \cdot \frac{t^2(1+t)^2}{4^2} = \frac{t(2+t)}{4} \cdot \frac{t^2(1+t)^2}{4^2},$$

$$\frac{t^4(1+t)^4}{4^4} + \frac{t^4(1+t)^3}{4^4} = \frac{t(1+t)+t}{4} \cdot \frac{t^3(1+t)^3}{4^3} = \frac{t(2+t)}{4} \cdot \frac{t^3(1+t)^3}{4^3}$$

$$\text{ec.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ec.}$$

Diverrà essa pertanto soppresso il fattore $t'+t'^2+t'^3+t'^4+$ ec. come segue

$$1+\frac{t(2+t)}{4}\left\{\begin{array}{l}
1+\frac{1}{4}t'(1+t')+\frac{1}{4^2}.t'^2(1+t')^2+\frac{1}{4^3}.t'^3(1+t')^3+\text{ec.}\\
+\frac{t(1+t)}{4}\left[1+\frac{2}{4}.t'(1+t')+\frac{3}{4^2}.t'^2(1+t')^2+\frac{4}{4^3}.t'^3(1+t')^3+\text{ec.}\right]\\
+\frac{t^2(1+t)^2}{4^2}\left[1+\frac{3}{4}.t'(1+t')+\frac{3.4}{1.2.4^2}.t'^2(1+t')^2+\frac{3.4.5}{1.2.3.4^3}.t'^3(1+t')^3+\text{ec.}\right]\\
+\frac{t^3(1+t)^3}{4^3}\left[1+\frac{4}{4}.t'(1+t')+\frac{4.5}{1.2.4^2}.t'^2(1+t)^2+\frac{4.5.6}{1.2.3.4^3}.t'^3(1+t')^3+\text{ec.}\right]\\
\text{ec.}
\end{array}\right\}$$

Si rileva quindi da questa espressione colla regola data, che quando $x=0$, $y_{0,x'}=1$, poichè non vi è che il termine 1 il quale possa considerarsi moltiplicato per $t'^{x'-1}$, e per t^0 essendo evidentemente tutti gli altri termini della formola moltiplicati almeno per t. Intanto se nell' espressione (B) in vece di sopprimere il fattore $t'+t'^2+t'^3+t'^4+\text{ec.}=t'(1+t'+t'^2+t'^3+\text{ec})$ si fosse soppresso $1+t'+t'^2+t^3+$ ec., allora nell' espressione trovata come è facile d' altronde a comprendersi rimanendo gli stessi tutti i termini nella grande parentesi, la cui somma giova quì denotare per s fuori di essa si troverebbe in vece di $1+\frac{t(2+t)}{4}.s$, $t'+\frac{(2+t)}{4}tt's$, ed essa somministrerebbe i valori di $y_{x,x'}$ prendendo tutti i termini contenenti t^x moltiplicati per qualunque delle potenze di t' inclusivamente a $t'^{x'}$. Anche in questo modo si otterrebbe $y_{0,x'}=1$ poichè in coerenza della regola già data il solo primo termine t' che si fa $=1$ può dare il valore di $y_{0,x'}$ contenendo tutti gli altri termini una potenza di t superiore a t^0. Qualora però nella espressione $t'+\frac{(2+t)tt'}{4}s$ si prescindesse dal termine t' non potrebbesi più avere $y_{0,x'}$ che *a priori*, locchè accade appunto nella formola del Sig. Marchese Laplace, la quale riducesi a $\frac{(2+t)tt'}{4}$ s da lui dedotta dallo sviluppo in serie di

$$\frac{t'\left(1-\frac{1}{4}\cdot t'-\frac{1}{4}\cdot t'^2\right)+\frac{1}{4}tt'}{1-\frac{1}{4}\cdot t-\frac{1}{4}\cdot t'-\frac{1}{4}\cdot t^2-\frac{1}{4}\cdot t'^2}-t',$$ cioè dalla funzione generatrice di sopra trovata, a cui egli egualmente pervenne moltiplicandola poi per $1-t'$, e sottraendone t', e ciò poichè, come si è veduto, il fattore $\frac{1}{1-t'}=1+t'+t'^2+t'^3+$ec. non influisce che ad insegnare il modo per determinare il valore di $y_{x,x'}$. Non si può per altro non riflettere, che l'eliminazione di t' dalla funzione generatrice di $y_{x,x'}$ non serve, che a fare sparire dall' espressione generale della stessa $y_{x,x'}$ il valore particolare di $y_{0,x'}$, che sussistendo la t', si ottiene conservando alla medesima una maggiore generalità.

11. Sciolti i problemi dei tre numeri precedenti con metodo per avventura più semplice benchè sempre analogo a quello usato dal Sig. Marchese Laplace da cui prima nel trattarli si ottennero (1) gli stessi risultamenti, giova ora applicare la presente Teoria a due altri problemi di probabilità proposti e risoluti da Lagrange (2) e in seguito dal Brunacci (3) col calcolo delle differenze finite.

Cercasi col primo di essi la rispettiva probabilità che compete a due Giuocatori Tizio, e Cajo per guadagnare la partita, mentre manca a Tizio un numero x' di eventi favorevoli ed a Cajo un numero x, essendo inoltre q la probabilità dell' evento semplice favorevole a Tizio, e p l' analoga probabilità favorevole a Cajo. Espressa per $y_{x,x'}$ la probabilità, che ha Tizio di guadagnare la partita si stabilisce dai mentovati Autori l' equazione fondamentale $y_{x,x'} = q\,y_{x,x'-1} + py_{x-1,x'}$. Quindi essendo u la funzione generatrice di $y_{x,x'}$, quella del secondo membro dell' equazione sarà $qut' + put$. Ora l' equazione non può sussistere quando $x'=0$, poichè niun evento più mancando a Tizio, la sua probabilità diviene certezza e si ha $y_{x,0} = 1$, $y_{x-1,0} = 1$ ec. e d' altronde l' equazione stessa avendo allora un termine con indice negativo, che non può riferirsi alla funzione generatrice, si riduce prescindendo da questo ad $y_{x,0} = py_{x-1,0}$ cioè $1 = p$ locchè è assurdo. Si dovrà dunque sottrarre da u la funzione generatrice di $y_{x,0} = 1$, la quale, poichè in essa il coefficiente di t^0 deve annullarsi a cagione di $y_{0,0} = 0$, si trova essere $\frac{t}{1-t}$. Si sottrarrà pure da $qut'+put$ la funzione generatrice di $py_{x-1,0}$, la quale perciò sarà $\frac{pt^2}{1-t}$. È intanto quasi inutile l'osservare che quando $x=0$, $y_{0,x'} = 0 = y_{0,x'-1}$ ec. poichè quando mancano ancora a Tizio eventi favorevoli x', ovvero $x'-1$, e niuno ne manca a Cajo il primo ha già perduto, ed inoltre l'equazione proposta in questo caso svanisce anche perchè la funzione $py_{-1,x'}$ non può esistere nella corrispondente funzione generatrice. È poi chiaro, che l'equazione sussiste quando in essa si pone $x=x'=1$, poichè allora diviene $y_{1,1} = qy_{1,0} = q$ riducendosi di fatto per Tizio, quando a Lui non meno che a Cajo manca un colpo solo, la probabilità di vincere alla semplice probabilità di avere un evento favorevole. Si avrà perciò l'equazione $u - \frac{t}{1-t} = qut' + put - \frac{pt^2}{1-t}$ onde $u = \frac{t-pt^2}{(1-t)(1-pt-qt')}$

---

(1) V. Laplace-Opera sopracitata da pag. 210 fino alla pag. 216.

(2) V. Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale de Berlin. an. 1775.

(3) V. Brunacci Corso di Matematica sublime Tom. I. pag. 261. e seguenti.

$=(1-pt)t(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})((1-pt)^{-1}+(1-pt)^{-2}qt' + (1-pt)^{-3}q^2t'^2+\text{ec.})=(t+t^2+t^3+\text{ec.})(1+(1-pt)^{-1}qt' +(1-pt)^{-2}q^2t'^2\ldots+(1-pt)^{-x'}q^{x'}t^{x'}+\text{ec.})$. Pertanto siccome la potenza $t'^{x'}$ non può entrare che nella sola parte $(t+t^2+t^3+\text{ec.})\times(1-pt)^{-x'}q^{x'}t'^{x'}$ della precedente espressione, sarà il ricercato coefficiente di $t^x t'^{x'}$ cioè $y_{x,x'}=q^{x'}\left(1+px'+\frac{x'(x'+1)}{2}p^2 + \frac{x'(x'+1)(x'+2)}{2.3}p^3 \ldots + \frac{x'(x'+1)(x'+2)\ldots(x'+x-2)}{2.3.4\ldots(x-1)}p^{x-1}\right)$ presi tutti i termini dello sviluppo di $(1-pt)^{-x'}$ fino a quello inclusivamente che contiene la potenza t^{x-1}, e fatto dopo $t=1$.

Coll' altro problema sopraccennato domandasi la probabilità che compete ad un giuocatore che scommette di ottenere un dato evento x' volte almeno in un numero x di colpi per guadagnare con ciò la partita, essendo p la probabilità favorevole all' evento semplice, e quindi $1-p$ la probabilità contraria. Secondo queste condizioni e denominazioni si ha $y_{x,x'}=py_{x-1,x'-1}+(1-p)y_{x-1,x'}$. Quindi riguardata al solito u come funzione generatrice di $y_{x,x'}$ sarà $putt'+(1-p)ut$ la funzione generatrice del secondo membro di questa equazione. Per trovare il valore di u deesi primieramente osservare, che quando $x'=0$, $y_{x,0}=1$, poichè quando rimanendo ancora x colpi da provarsi non resta più oltre da condursi il dato evento favorevole al giuocatore, questi ha già la certezza dell'aver vinto. Ciò vale eziandio nella supposizione di $x=0$ cioè $y_{0,0}=1$, poichè il giuocatore ha vinto del pari quando nè restano più colpi da farsi nè dee più condursi il dato evento. Non verificandosi pertanto l' equazione proposta qualunque volta sia $x'=0$ restando x indeterminata, e d' altronde mancandone tutti i termini rispetto alle funzioni generatrici quando sia $x=0$, onde $y_{0,x'}=0$ supposto $x'>0$, saranno da prendersi, e da sottrarsi rispettivamente dalle funzioni generatrici de' due membri dell'equazione quelle di $y_{x,0}=1$, e di $(1-p)y_{x-1,0}=1-p$ cioè $\frac{1}{1-t}$ e $\frac{t(1-p)}{1-t}$. Così si avrà l'equazione $u-\frac{1}{1-t}=putt'+(1-p)ut-\frac{t(1-p)}{1-t}$ onde $u=\frac{1-t(1-p)}{(1-t)(1-ptt'-(1-p)t)}=(1+t+t^2+t^3+\text{cc.})\times\big((1-t(1-p)\big)\big((1-(1-p)t)-ptt'\big)^{-1}=(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})\times\big(1+(1-(1-p)t\big)^{-1}ptt'+\big(1-(1-p)t\big)^{-2}p^2t^2t'^2\ldots\ldots+(1-(1-p)t)^{-x'}p^{x'}t^{x'}t'^{x'}+\text{ec.}\big)$. Ora si vede, che il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ in questa espressione non può essere che il coefficiente di t^x in $(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})(1-(1-p)t)^{-x'}p^{x'}t^{x'}=(t^{x'}+t^{x'+1}+\text{ec.})(1-(1-p)t)^{-x'}p^{x'}$. Ora questo si ha svolgendo l'espressione $(1-(1-p)t)^{-x'}p^{x'}$, e separando da essa tutti i termini che contengono le potenze di t fino a $t^{x-x'}$ inclusivamente, e fatto nel risultato $t=1$. Così si troverà $y_{x,x'}=p^{x'}\big(1+(1-p)x'+\frac{x'(x'+1)}{2}(1-p)^2+\frac{x'(x'+1)(x'+2)}{2.3}(1-p)^3\ldots+\frac{x'(x'+1)(x'+2)\ldots(x-1)}{2.3\ldots\ldots(x-x')}(1-p)^{x-x'}\big)$. È manifesto di fatto, che ciascuna potenza di t nello sviluppo di $(1-(1-p)t)^{-x'}$ dovendo essere moltiplicata per una potenza della stessa t non mai minore di $t^{x'}$, per avere il coefficiente di t^x debbono escludersi dai termini da prendersi per determinarlo quelli che contengono una potenza di t maggiore di $t^{x-x'}$.

12. Trattasi ora di applicare l'esposto metodo anche a qualche problema direttamente relativo alle serie *recurro-recurrenti*, che come si sa dipendono dalle equazioni a differenze parziali.

Sia per non dipartirsi dagli esempi dati dal Brunacci (1) ad applicazione del calcolo delle differenze finite quella stessa serie la cui legge apparisce dall' equazione $y_{x,x'} = 2y_{x,x'-1} + y_{x+1,x'-1}$ la risoluzione della quale dà il termine generale della stessa serie indicata dalla tavola seguente

	0	1	2	3	4	x
0	0	2	4	6	8	$2x$
1	2	8	14	20	26	. . .
2	12	30	48	66	84	. . .
3	54	108	162	216	. . . .	. . .
4	216	378	540	. . . .	. . . .	. . .
.	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . .
.	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . .
x'	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . .

L' equazione proposta sussiste per qualunque valore positivo di x comprensivamente allo zero, e fintantochè sia $x' > 0$. Nel caso della $x' = 0$ mancano nella funzione generatrice del secondo membro dell' equazione le funzioni $y_{x,-1}$, $y_{x+1,-1}$ come quelle che hanno indici negativi. Esistendo però nella funzione generatrice del primo membro, la quale al solito si denota per u la funzione $y_{x,0} = 2x$ per ipotesi, si cercherà la funzione generatrice di $2x$ osservando, che supposto $x=0$, $y_{0,0}=0$. Quindi essendo in questo caso la funzione generatrice di $y_{x,0}$ espressa da $\frac{2t}{(1-t)^2}$, si hanno anche tutti i dati per istabilire l' equazione delle funzioni generatrici, poichè supposto solamente $x'=1$ si ha $y_{x,1}=2y_{x,0}+y_{x+1,0}=6x+2$, sicchè l'equazione in questo caso si verifica. Si avrà pertanto $u-\frac{2t}{(1-t)^2}=2ut'+\frac{ut'}{t}$, onde $u=\frac{2t}{(1-t)^2}\cdot\frac{1}{1-2t'-\frac{t'}{t}}$

---

(1) V. Brunacci. Opera e Volume sopracitati pag. 170.

$$=\frac{2t}{(1-t)^2}\left(1-\left(2+\frac{1}{t}\right)t'\right)^{-1}=\frac{2t}{(1-t)^2}\left(1+\left(2+\frac{1}{t}\right)t'+\left(2+\frac{1}{t}\right)^2t'^2+\left(2+\frac{1}{t}\right)^3t'^3\dots+\left(2+\frac{1}{t}\right)^{x'}t'^{x'}+\text{ec.}\right).$$

Perciò il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ non potrà ricavarsi che dalla parte $\frac{2t}{(1-t)^2}\left(2+\frac{1}{t}\right)^{x'}t'^{x'}$ della precedente espressione, e sarà lo stesso che il coefficiente di t^x in $2t(1+2t+3t^2+4t^3+\text{ec.})\times\left(2^{x'}+x'.\frac{1}{t}.2^{x'-1}+\frac{x'(x'-1)}{2}.\frac{1}{t^2}.2^{x'-2}+\frac{x'(x'-1)(x'-2)}{2.3}.\frac{1}{t^3}.2^{x'-3}\dots\dots+\frac{1}{t^{x'}}\right)$, il quale, riflettendo, che in generale il prodotto di $\frac{1}{t^m}$ per $2t(x+m)t^{x+m-1}$ è $2(x+m)t^x$, si trova essere $2x.2^{x'}+2(x+1)x'2^{x'-1}+2(x+2)\frac{x'(x'-1)}{2}.2^{x'-2}+2(x+3)\times\frac{x'(x'-1)(x'-2)}{2.3}.2^{x'-3}\dots+2(x+x')$.

Allo stesso risultato si derviene mediante uno sviluppo alquanto diverso. Di fatto $\frac{2t}{(1-t)^2}\cdot\frac{1}{1-2t'-\frac{t'}{t}}=\frac{2t^2}{(1-t)^2(t-2tt'-t')}$ $=\frac{2t^2}{(1-2t')(1-t)^2(t-r)}$ $\left(\text{fatto } \frac{t'}{1-2t'}=r\right)=\frac{2t^2}{(1-t)^2(1-2t')}(t^{-1}+rt^{-2}$

$+r^2t^{-3}+\text{ec.})=\frac{2t}{1-2t'}.(1+2t+3t^2+\text{ec.})(1+rt^{-1}+r^2t^{-2}+\text{ec.})$ dal che si vede, che il coefficiente di t^x in questa espressione è $\frac{2}{1-2t'}(x+(x+1)r+(x+2)r^2+(x+3)r^3+\text{ec.})$ $=2\left(\frac{x}{1-2t'}+\frac{(x+1)t'}{(1-2t')^2}+\frac{(x+2)t'^2}{(1-2t')^3}+\text{ec.}\right)$, e quindi il coefficiente di $t'^{x'}$ in quest' ultima espressione, il quale è pur quello di $t^x t'^{x'}$ nella funzione generatrice proposta, potrà aversi prendendo il coefficiente di $t'^{x'}$ in $\frac{1}{1-2t'}$, il quale è evidentemente $2^{x'}$, quello di $t'^{x'-1}$ in $\frac{1}{(1-2t')^2}$ che è $x.2^{x'-1}$, quello di $t'^{x'-2}$ in $\frac{1}{(1-2t')^3}$ cioè $\frac{x'(x'-1)}{2}\,2^{x'-2}$, e così di seguito fino al coefficiente di t'^0 in $\frac{1}{(1-2t')^{x'+1}}$ inclusivamente (1). Per tal modo si otterrà $y_{x,x'}=2\left(x.2^{x'}+(x+1)\,x'.2^{x'-2}+(x+2)\times\frac{x'(x'-1)}{2}\,2^{x'-2}+(x+3).\frac{x'(x'-1)(x'-2)}{2.3}.2^{x'-3}\ldots\ldots+(x+x')\right)$ come prima.

13. Merita ora di essere sciolto col metodo delle funzioni generatrici un altro problema di serie *recurro recurrente*, che il Sig. Lacroix chiama a *double entrée*, al quale viene da esso applicato un metodo complicatissimo, da cui d'altronde anzichè l' espressione del ricercato termine generale risulta solamente la traccia per rinvenirlo (2).

Pertanto essendo il medesimo dato dall' equazione $y_{x,x'}=2y_{x,x'-1}+2y_{x-1,x'-1}$, nella quale si faccia $y_{0,1}=0$, $y_{1,1}=1$,

---

(1) Veggasi il n. 24. della prima Memoria relativa alle funzioni generatrici.

(2) V. Lacroix. Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Integral. T. III. Seconde édition. pag. 295. e seguenti.

$y_{2,1}=0$, $y_{3,1}=0$ ec. la serie cui esso si riferisce è la seguente

	1	2	3	4	5 x
1	1	0	0	0	0 . . . . . ec.
2	2	2	0	0	0 . . . .
3	4	8	4	0	0 . . . .
4	8	24	24	8	0 . . . .
5	16	64	96	64	16 . . . .
6	32	160	320	320	160 . . . .
7	64	384	960	1280	960 . . . .
.	. . . .				
.	. . . .				
x'	. . . .				

Onde determinare la funzione generatrice dell'equazione proposta conviene osservare, che i termini della serie notati nella tavola sonosi ricavati dall' equazione stessa considerando nulli tutti que' valori di $y_{x,x'}$ in cui $x=0$, $x'=0$, giacchè negli indici della serie manca lo zero. Quindi perciò e per l' ulteriore supposizione di $y_{m,1}=0$ quando sia m numero intero e positivo >1 non che di $y_{1,1}=1$ si verificano tutte le seguenti equazioni salva la prima $y_{1,1}=2y_{1,0}+2y_{0,0}=0$ mentre in vece si ha $y_{1,1}=1$, $y_{2,1}=2y_{2,0}+2y_{1,0}=0$, $y_{3,1}=2y_{3,0}+2y_{2,0}=0$ ec. $y_{2,2}=2y_{2,1}+2y_{1,1}=2$, $y_{1,2}=2y_{1,1}+2y_{0,1}=2$. Dunque prendendo le funzioni generatrici dei termini della nostra equazione, e rappresentando al solito per u la funzione generatrice di $y_{x,x'}$ si avrà $u - tt' = 2ut' + 2utt'$ essendo $y_{1,1}tt'$ il solo termine di u che turbi l'equazione fra i termini corrispondenti delle funzioni generatrici. Quindi sarà pure $u = \frac{tt'}{1-2t'-2tt'} = tt'(1-2t'(1+t))^{-1}$ $= tt'(1 + 2t'(1+t) + 2^2t'^2(1+t)^2 + 2^3t'^3(1+t)^3 \ldots\ldots$ $+ 2^{x'-1}t'^{x'-1}(1+t)^{x'-1} +$ ec.). Pertanto, come è facile a vedersi, il ricercato coefficiente di $t^x t'^{x'}$ non può essere che quello di t^{x-1} in $2^{x'-1}(1+t)^{x'-1} = 2^{x'-1}\Big(1+(x'-1)t+\frac{(x'+1)(x'-2)}{1.2}t^2$ $+\frac{(x'-1)(x'-2)(x'-3)}{1.2.3}t^3\ldots + \frac{(x'-1)(x'-2)(x'-3)\ldots(x'-x+1)}{1.2.3\ldots(x-1)}t^{x-1} + \text{ec.}\Big)$. Dunque sarà $y_{x,x'} = 2^{x'-1}\,\frac{(x'-1)(x'-2)(x'-3)\ldots\ldots(x'-x+1)}{1.2.3\ldots\ldots(x-1)}$.

Sia ora $x=5$, $x'=6$, e si troverà $y_{5,6} = \frac{2^5.5.4.3.2.}{2.3.4} = 160$ come nella tavola. Similmente abbiasi $x=3$, $x'=7$ e sarà $y_{3,7} = 2^6.\frac{6.5}{2} = 960$ pure come nella tavola.

È opportuno da ultimo di osservare, che l'espressione trovata di $y_{x,x'}$ non può valere se non fino a tanto che x non sia $> x'$ come d'altronde porta la natura della serie, in cui sono nulli come rilevasi anche dalla tavola tutti i termini relativamente ai quali l'indice x è $> x'$. Nel caso poi di $x = x' = 1$ apparisce dallo sviluppo della funzione u essere $y_{1,1} = 1$, poichè in esso appunto l'unità è il coefficiente di tt'.

14. Seguendo il piano tracciato anche nella prima memoria cade quì in acconcio di risolvere un altro problema relativo in qualche modo alla partizione de' numeri.

Sia proposto perciò di determinare in quanti modi possa il numero x' essere la somma degli esponenti di x lettere a, b, c, d, ec. innalzate a potenza ed insieme moltiplicate.

Rappresentando per $y_{x,x'}$ il numero ricercato, $y_{x-1,x'-m}$ esprimerà il numero delle maniere nelle quali la somma di tali esponenti riesce $= x'$ tenendo fermo in una data lettera l'esponente m, essendo m qualunque numero intero. Di quì nasce l'equazione del problema nella supposizione, che fra gli esponenti delle diverse lettere non debba aver luogo lo zero, cioè $y_{x,x'} = y_{x-1,x'-1} + y_{x-1,x'-2} + y_{x-1,x'-3}$ + ec. ovvero $y_{x,x'-1} = y_{x-1,x'-2} + y_{x-1,x'-3} + y_{x-1,x'-4}$ + ec., e perciò $y_{x,x'} = y_{x-1,x'-1} + y_{x,x'-1}$ come con altro metodo trovò il Brunacci (1).

Se fra gli esponenti delle lettere si ammetta anche lo zero, fatto $m=0$, $m=1$, $m=2$, ec. nel simbolo $y_{x-1,x'-m}$, si troverà per questo caso $y_{x,x'} = y_{x-1,x'} + y_{x-1,x'-1} + y_{x-1,x'-2}$ + ec. $y_{x,x'-1} = y_{x-1,x'-1} + y_{x-1,x'-2} + y_{x-1,x'-3}$ + ec., e quindi $y_{x,x'} = y_{x-1,x'} + y_{x,x'-1}$.

Frattanto considerata l'equazione $y_{x,x'} = y_{x-1,x'-1} + y_{x,x'-1}$, ed essendo u la funzione generatrice di $y_{x,x'}$ sarà $utt' + ut'$ quella di $y_{x-1,x'-1} + y_{x,x'-1}$. Ora supposto $x'=0$ sarà $y_{x,0} = 0$, poichè è chiaro che la somma di esponenti maggiori di zero non può essere zero, e l' equazione proposta in questa ipotesi svanisce, come accade pure in quella di $x = 0$ essendo $y_{0,x'} = 0$, non potendo essere zero il numero delle lettere. Inoltre si ha pure, fatto $x'=1$, $y_{x,1} = 0$ qualunque volta non sia $x=1$, poichè la somma degli esponenti di più lettere, i quali si suppongono non minori di 1 non può essere 1. E però $y_{1,1} = 1$, e non sussistendo allora l'equazione proposta dovrà sottrarsi da u il termine $y_{1,1}tt'=tt'$, e si avrà l'equazione $u-tt'=utt'+ut'$ onde $u=\frac{tt'}{1-(1+t)t'}=tt'(1+(1+t)t'+(1+t)^2t'^2+(1+t)^3t'^3\ldots+(1+t)^{x'-1}t'^{x'-1}+\text{ec.})$. Dunque il coefficiente di $t'^{x'}$ in u sarà $t(1+t)^{x'-1}=t(1+(x'-1)t+\frac{(x'-1)(x'-2)}{1.2}t^2+\frac{(x'-1)(x'-2)(x'-3)}{1.2.3}t^3\ldots+\frac{(x'-1)(x'-2)(x'-3)\ldots(x'-(x-1))}{1.2.3\ldots.(x-1)}t^{x-1}+\text{ec.}$ E quindi il coefficiente di $t^xt'^{x'}$ ovvero $y_{x,x'}$ sarà $=\frac{(x'-1)(x'-2)(x'-3)\ldots.(x'-x+1)}{1.2.3\ldots.(x-1)}$ come trovò pure il Brunacci.

---

(1) V. Brunacci. Opera, e Volume sopracitati pag. 193. e seg.

Considerata ora l'equazione $y_{x,x'}=y_{x-1,x'}+y_{x,x'-1}$, la quale esprime le condizioni del problema quando fra gli esponenti delle lettere si ammetta anche lo zero, si vede facilmente, che essa sussiste finchè non sia $x'=0$, giacchè in questo caso si ha $y_{x,0}=1$ posto $x>1$ essendo evidente potersi avere la somma zero degli esponenti però in un modo solo quando in ciascuna delle x lettere l'esponente sia zero. E poichè anche $y_{x-1,0}=1$, posto $x>1$, ne segue, che la funzione generatrice di $y_{x,0}$ è $\frac{t}{1-t}$, e quella di $y_{x-1,0}$ è $\frac{t^2}{1-t}$. Si vedrà quindi facilmente essere l'equazione tra le funzioni generatrici $u-\frac{t}{1-t}=ut+ut'-\frac{t^2}{1-t}$, onde $u=t(1-(t+t'))^{-1}$ $=t(1+(t+t')+(t+t')^2+(t+t')^3\ldots+(t+t')^{x'}+\text{ec.})$, dal che si rileva che il coefficiente di $t^xt'^{x'}$ in questa espressione di u non può essere che quello di $t^{x-1}t'^{x'}$ in $(t'+t)^{x'+x-1}=t'^{x'+x-1}$ $+(x'+x-1)tt'^{x'+x-2}+\frac{(x'+x-1)(x'+x-2)}{1.2}t^2t'^{x'+x-3}$ $+\frac{(x'+x-1)(x'+x-2)(x'+x-3)}{1.2.3}t^3t'^{x'+x-4}\ldots\ldots$

$+\frac{(x'+x-1)(x'+x-2)\ldots\ldots(x'+x-(x-1))}{1.2\ldots\ldots\ldots(x-1)}t^{x-1}t'^{x'}$. Dunque $y_{x,x'}$ $=\frac{(x'+x-1)(x'+x-2)(x'+x-3)\ldots.(x'+2)(x'+1)}{1.2.3.\ldots.(x-1)}$.

Si ponga per esempio $x=4$, $x'=6$ si avrà da questa formola $y_{4,6}=\frac{9.8.7}{1.2.3}=84$.

15. Non essendosi fin quì risolute equazioni alle differenze parziali contenenti funzioni conosciute di x e di x', è quindi opportuno di dar luogo a qualche esempio anche intorno a queste.

Sia perciò l'equazione $y_{x,x'}-y_{x-1,x'-1}=xx'$, la quale esprime le condizioni di una serie in cui un termine qualunque considerato come funzione degli indici x, x' eguaglia il prodotto di questi accresciuto del termine che è funzione degli indici stessi diminuiti ciascuno di un' unità. Ciò posto se si suppone inoltre $y_{x,0}=y_{0,x'}=0$ anche quando $x=0$ ovvero $x'=0$, essendo al solito u la funzione generatrice di $y_{x,x'}$ si avrà l'equazione $u-utt'=\frac{tt'}{(1-t)^2(1-t')^2}$ (num. 5.), ed $u=\frac{tt'}{(1-t)^2(1-t')^2(1-tt')}$ $=(tt'+t^2t'^2+t^3t'^3+\text{ec.})(1+2t+3t^2\ldots..+(x-2)t^{x-3}+(x-1)t^{x-2}$ $+xt^{x-1}+\text{ec.})(1+2t'+3t'^2+\text{ec.})$. Quindi il coefficiente di t^x in questa espressione sarà $(xt'+(x-1)t'^2+(x-2)t'^3\ldots..+t'^x)(1+2t'$ $+3t'^2+\text{ec.})$, e da esso si ricaverà il coefficiente di $t'^{x'}$, o ciò che è lo stesso nel presente caso il coefficiente di $t^x t'^{x'}$, il quale risulta

$$xx'+(x-1)(x'-1)+(x-2)(x'-2)\ldots+(x-x'+1).1.$$

Per applicare questa formola a qualche esempio si ponga $x=x'=4$, sarà $y_{4,4}=16+9+4+1=30$, $y_{3,3}=9+4+1=14$. valori che rendono per l'appunto identica l' equazione proposta. Sia per un' altro esempio $x=6$, $x'=3$ si avrà $y_{6,3}-y_{5,2}=32-14=18$ come dev' essere.

Se invece di supporre $y_{x,0} = y_{0,x'}$ comprensivamente ad $y_{0,0} = 0$ si pone $y_{x,0} = y_{0,x'} = m$ comprensivamente ad $y_{0,0} = m$, essendo m un numero intero qualunque dato, non si avrebbe più l' equazione $u - utt' = \frac{tt'}{(1-t)^2(1-t')^2}$. Di fatto nella nuova ipotesi si vede facilmente che è d' uopo sottrarre da u i termini che non verificano l'equazione proposta corrispondenti a tutti i valori di $y_{x,0}$, $y_{0,x'}$ quali si hanno appunto dalle due funzioni $\frac{m}{1-t}$, $\frac{m}{1-t'}$ generatrici di m. Ma siccome sottraendo queste due funzioni da u se ne leverebbe due volte il termine $y_{0,0}$ dipendente tanto dalla ipotesi di $x=0$ in $y_{x,0}$ quanto da quella di $x'=0$ in $y_{0,x'}$, per toglierlo una volta sola è d' uopo moltiplicare per t o per t' rispettivamente una delle due funzioni $\frac{m}{1-t}$, $\frac{m}{1-t'}$ ed allora sottrarre la somma da u. Così pertanto si avrà $u = \frac{tt'}{(1-t)^2(1-t')^2(1-tt')} + \frac{mt}{(1-t)(1-tt')} + \frac{m}{(1-t)(1-tt')}$, e per determinare il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ si dovrà aggiungere all' espressione già trovata per $y_{x,x'}$ nella precedente ipotesi quella di $t^x t'^{x'}$ in $\left(\frac{mt}{1-t} + \frac{m}{1-t'}\right) \cdot \frac{1}{1-tt'}$. Ora il coefficiente di t^x in $\frac{mt}{1-t} \cdot \frac{1}{1-tt'} = mt(1+t+t^2+\text{ec.})(1+tt'+t^2t'^2 + t^3t'^3 + \text{ec.})$ è $m(1+t'+t'^2+t'^3 \ldots t'^{x-1}) = \frac{m(1-t'^x)}{1-t'}$, e quello di t^x in $\frac{m}{1-t'} \cdot \frac{1}{1-tt'} = \frac{m}{1-t'}(1+tt'+t^2t'^2+t^3t'^3+\text{ec.})$ è $\frac{mt'^x}{1-t'}$. Dunque essendo $\frac{m(1-t'^x)}{1-t'} + \frac{mt'^x}{1-t'} = \frac{m}{1-t'}$ il coefficiente di t^x in $\left(\frac{mt}{1-t} + \frac{m}{1-t'}\right)\frac{1}{1-tt'}$, quello di $t^x t'^{x'}$ in questa stessa formola sarà pure il coefficiente di $t'^{x'}$ in $\frac{m}{1-t'}$ $=m(1+t'+t'^2+t'^3+\text{ec.})$, cosicchè il ricercato è m. Adunque nella nuova ipotesi di $y_{x,0}=y_{0,x'}=y_{0,0}=m$ si ha

$$y_{x,x'}=xx'+(x-1)(x'-1)+(x-2)(x'-2)\ldots+(x-x'+1).1+m.$$

16. Continuando nella ricerca del termine generale delle serie si cerchi ora il valore di $y_{x,x'}$ nell' equazione $y_{x,x'}=x+2^{x'}+y_{x.x'-1}+2y_{x+1,x'-1}$ dedotta dalla legge che seguono i termini della serie descritta nella seguente Tavola

	0	1	2	3	4	....	x
0	1	1	1	1	1	....	1
1	5	6	7	8	9	....	
2	21	25	29	33	....		
3	79	92	105	118	....		
4	....						
:	....						
x'	....						

Pertanto se si denota al solito per u la funzione generatrice di $y_{x,x'}$, e per u' quella di $x+2^{x'}$, sarà la funzione generatrice del secondo membro dell' equazione espressa da $u'+ut'+\frac{2ut'}{t}$. Ora u' può determinarsi sommando i due prodotti della funzione generatrice di x per la funzione generatrice dell' unità relativamente a t' e della funzione generatrice di $2^{x'}$ per la funzione generatrice dell'unità relativamente a t. Così si avrà $u' = \frac{t}{(1-t)^2} \cdot \frac{1}{1-t'} + \frac{1}{1-2t'} \cdot \frac{1}{1-t}$. Intanto poichè per ipotesi quando $x'=0$ si ha $y_{x,0} = 1$ anche quando $x=0$, ed allora il secondo membro dell'equazione proposta si riduce ad $x+1$ prescindendo dalle funzioni con indice negativo, prese le funzioni generatrici di $y_{x,0}=1$, e di $x+1$, le quali sono rispettivamente $\frac{1}{1-t}$, $\frac{1}{(1-t)^2}$ si otterrà facilmente l' equazione $u - \frac{1}{1-t} = ut' + \frac{2ut'}{t} + \frac{t}{(1-t')(1-t)^2} + \frac{1}{(1-2t')(1-t)} - \frac{1}{(1-t)^2}$ onde si ricava $u = \left(\frac{t}{1-t} + \frac{t^2}{(1-t')(1-t)^2} + \frac{t}{(1-2t')(1-t)} - \frac{t}{(1-t)^2}\right) : (t-tt'-2t')$.

Per avere il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ in u cioè il valore di $y_{x,x'}$ si osservi, che l'espressione di u riducendone tutti i termini allo stesso denominatore diviene $\frac{t^2t'(1-2t')+t(1-t')(1-t)}{(1-t)^2(1-t')(1-2t')} \cdot \frac{1}{t-tt'-2t'} = \left(\frac{t^2t'}{(1-t)^2(1-t')} + \frac{t}{(1-t)(1-2t')}\right) \cdot \frac{1}{t-tt'-2t'} = \frac{t}{(1-t)^2} \cdot \frac{t'}{(1-t')} \times \frac{1}{1-\left(1+\frac{2}{t}\right)t'} + \frac{1}{(1-t)} \cdot \frac{1}{(1-2t')} \cdot \frac{1}{1-\left(1+\frac{2}{t}\right)t'}$. Essendo il primo termine di questa espressione lo stesso che $\frac{t}{(1-t)^2} \times (t' + t'^2 + t'^3 + \text{ec.}) \left[1 + \left(1+\frac{2}{t}\right)t' + \left(1+\frac{2}{t}\right)t'^2 + \text{ec.}\right]$ sarà in esso il coefficiente di $t'^{x'}$ denotato da $\frac{t}{(1-t)^2} \times \left[1 + \left(1+\frac{2}{t}\right) + \left(1+\frac{2}{t}\right)^2 + \left(1+\frac{2}{t}\right)^3 \ldots + \left(1+\frac{2}{t}\right)^{x'-1}\right]$

$$= \frac{t}{(1-t)^2} \cdot \frac{\left(1+\frac{2}{t}\right)^{x'} - 1}{\left(1+\frac{2}{t}\right) - 1} = \frac{t}{(1-t)^2} \cdot \frac{t}{2}\left[\left(1+\frac{2}{t}\right)^{x'} - 1\right]$$

$$= \frac{t}{(1-t)^2} \cdot \frac{t}{2}\left(\frac{2x'}{t} + \frac{2^2}{t^2} \cdot \frac{x'(x'-1)}{2} + \frac{2^3}{t^3} \cdot \frac{x'(x'-1)(x'-2)}{2.3} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\right.$$

$\left. + \frac{2^{x'}}{t'^{x'}}\right)$, e quindi il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ è $x.\,x' + (x+1) \times \frac{x'(x'-1)}{2} . 2 + (x+2)\frac{x'(x'-1)(x'-2)}{2.3} . 2^2 . . . . + (x+x'-1) . 2^{x'-1}$.

E poichè con analogo sviluppo trovasi il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ in $\frac{1}{(1-t)(1-2t')} \cdot \frac{1}{1-\left(1+\frac{2}{t}\right)t'}$ essere $3^{x'+1} - 2^{x'+1}$, riunendo i coefficienti parziali verrà $y_{x,x'} = x.x' + (x+1)\frac{x'(x'-1)}{2} . 2 + (x+2)\frac{x'(x'-1)(x'-2)}{2.3} . 2^2 . \ldots + (x+x'-1)2^{x'-1} + 3^{x'+1} - 2^{x'+1}$, espressione che si mostrerà identica alla ritrovata dal Brunacci (1) solo che si osservi, che essendo $3^{x'+1} = 2.3^{x'} + 3^{x'} = 2.3^{x'} + 1 + 2x' + \frac{x'(x'-1)}{2} . 2^2 + \frac{x'(x'-1)(x'-2)}{2.3} . 2^3 . . . . + 2^{x'}$. il valore assegnato di $y_{x,x'}$ si trasformerà pure in $1 + (x+2)x' + (x+3)\frac{x'(x'-1)}{2} . 2 + (x+4)\frac{x'(x'-1)(x'-2)}{2.3} . 2^2 . . . . . + (x+x'+1) . 2^{x'-1} + 2 . 3^{x'} - 2^{x'+1}$.

17. Qualche volta col metodo delle funzioni generatrici sembra che non possano ottenersi che soluzioni particolari de' problemi, che col mezzo di esso s'intraprende di risolvere. Però essendo il numero di tali soluzioni limitato, e potendo tutte ottenersi ad una per volta, si ha poi nel loro com-

---

(1) V. Brunacci. Opere e Vol. supracitati pag. 216.

plesso la soluzione generale de' problemi stessi. A cagion d' esempio abbiasi l'equazione $y_{x,x'} = y_{x-2,x'} + y_{x-1,x'-1}$. Si supponga inoltre essere $y_{x,0} = y_{0,x'} = 0$, $y_{m,m} = 1$, essendo m numero qualunque intero non < 1, e di più $y_{x,1} = 1$, $y_{m,m+n} = 0$, cioè $y_{x,x'} = 0$ ogni qualvolta sia $x' > x$. Dipendentemente da queste condizioni l'equazione proposta non si verifica ne' due casi di $x = x' = 1$, e di $x = 2$, $x' = 1$, poichè in amendue il primo membro risulta $= 1$, ed il secondo si riduce a zero. Essa però sussiste posto $x = x' = 2$, poichè allora viene $y_{2,2} = y_{0,2} + y_{1,1}$, equazione identica per ipotesi. Ciò posto si vede facilmente nascere l' equazione $u - tt' - t^2 t' = u t^2 + u tt'$ ossia $u = \frac{tt' + t^2 t'}{1 - t(t + t')}$, essendo sempre u la funzione generatrice di $y_{x,x'}$. Al secondo membro della medesima è chiaro potersi dare diverse forme, fra le quali quella che dipende dalla risoluzione in fattori del denominatore $1 - t(t + t')$ si presenta forse per la prima. Essa però non è quella che conduca più facilmente alla determinazione del ricercato coefficiente. Di fatto posto $1 - t^2 - tt' = 0$ si ha $t = \frac{-t' \pm \sqrt{(4 + t'^2)}}{2} = \frac{-t' \pm r}{2}$ ponendo $\sqrt{(4 + t'^2)} = r$; dunque $t^2 + tt' - 1 = \left(t + \frac{t'}{2} - \frac{r}{2}\right) \times \left(t + \frac{t'}{2} + \frac{r}{2}\right)$, $1 - t^2 - tt' = -(t + p)(t + p')$ fatto ancora $\frac{t'}{2} - \frac{r}{2} = p$, $\frac{t'}{2} + \frac{r}{2} = p'$. Pertanto $u = \frac{-tt' - t^2 t'}{(t+p)(t+p')}$ $= -(tt' + t^2 t') . \frac{1}{pp'} . \frac{1}{1 + \frac{t}{p}} . \frac{1}{1 + \frac{t}{p'}}$. Ora $\frac{1}{1 + \frac{t}{p}} . \frac{1}{1 + \frac{t}{p'}}$ $= \left(1 + (-1)\frac{t}{p} + (-1)^2 \frac{t^2}{p^2} + \text{ec.}\right)\left(1 + (-1)\frac{t}{p'} + (-1)^2 \frac{t^2}{p'^2} + \text{ec.}\right)$; dunque il coefficiente di t^x in $\frac{1}{1 + \frac{t}{p}} . \frac{1}{1 + \frac{t}{p'}}$ è il seguente $(-1)^x.\frac{1}{p'^x}+(-1)^x.\frac{1}{pp'^{x-1}}+(-1)^x.\frac{1}{p^2p'^{x-2}}\ldots\ldots$ $+(-1)^x.\frac{1}{p^x}$ cioè una serie geometrica in cui il numero de' termini è $x+1$. Sarà dunque questo coefficiente $=(-1)^x.\frac{1}{p'^x}$

$$\left(\frac{p'^{x+1}}{p^{x+1}}-1\right):\left(\frac{p'}{p}-1\right)=(-1)^x.\frac{1}{p'^x}\left(\frac{p'^{x+1}-p^{x+1}}{p^{x+1}}\right).\frac{p}{p'-p}$$

$=(-1)^x.\frac{1}{p'^x\ p^x}.\left(\frac{p'^{x+1}-p^{x+1}}{p'-p}\right)$. Perciò il coefficiente di t^{x-1}, e quello di t^{x-2} saranno rispettivamente $(-1)^{x-1}\times$ $\frac{1}{p'^{x-1}\ p^{x-1}}.\left(\frac{p'^x-p^x}{p'-p}\right)$, $(-1)^{x-2}.\frac{1}{p'^{x-2}\ p^{x-2}}\left(\frac{p'^{x-1}-p^{x-1}}{p'-p}\right)$, ed il coefficiente di t^x in u sarà per conseguenza $t'\left((-1)^x.\frac{1}{p'^xp^x}\left(\frac{p'^x-p^x}{p'-p}\right)\right.$

$$\left.+(-1)^{x-1}\frac{1}{p'^{x-1}p^{x-1}}\left(\frac{p'^{x-1}-p^{x-1}}{p'-p}\right)\right)=t'\left\{(-1)^x\frac{1}{\left(\frac{t'+r}{2}\right)^x\left(\frac{t'-r}{2}\right)^x}\times\right.$$

$$\left\{\frac{\left(\frac{t'+r}{2}\right)^x-\left(\frac{t'-r}{2}\right)^x}{\left(\frac{t'+r}{2}\right)-\left(\frac{t'-r}{2}\right)}\right\}+(-1)^{x-1}.\frac{1}{\left(\frac{t'+r}{2}\right)^{x-1}\left(\frac{t'-r}{2}\right)^{x-1}}\times$$

$$\left.\left\{\frac{\left(\frac{t'+r}{2}\right)^{x-1}-\left(\frac{t'-r}{2}\right)^{x-1}}{\left(\frac{t'+r}{2}\right)-\left(\frac{t'-r}{2}\right)}\right\}\right\}=t'\left\{(-1)^x\frac{4^x}{(t'^2-r^2)^x}\left\{\frac{\left(\frac{t'+r}{2}\right)^x-\left(\frac{t'-r}{2}\right)^x}{r}\right\}\right.$$

$$\left.+(-1)^{x-1}.\frac{4^{x-1}}{(t'^2-r^2)^{x-1}}\left\{\frac{\left(\frac{t'+r}{2}\right)^{x-1}-\left(\frac{t'-r}{2}\right)^{x-1}}{r}\right\}\right\}.$$

Quindi l'espressione dello stesso coefficiente si riduce a

$$(C)\ldots\frac{1}{2^{x-1}}\left(xt'^x+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\,t'^{x-2}r^2+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.2.3.4.5}\,t'^{x-4}r^4\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots.(x-2m)}{1.2.3\ldots(2m+1)}\,t'^{x-2m}\,r^{2m}+\text{ec.}\right)+\frac{1}{2^{x-2}}\left((x-1)t'^{x-1}\right.$$

$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3}\,t'^{\,x-3}\,r^2+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{1.2.3.4.5}\,t'^{\,x-5}\,r^4\ldots\ldots$$

$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots\ldots(x-(2m+1))}{1.2.3\ldots\ldots(2m+1)}\,t'^{\,x-(2m+1)}\,r^{2m}+\text{ec.}\Big),$$ nella quale tutta la quantità moltiplicata per $\frac{1}{2^{x-1}}$ dà il coefficiente di $t'^{\,x'}$ nel caso che x' si riduca alla forma $x-2\,m$, cioè sia $x-2m=x'$, $x-x'=2m$, e la quantità moltiplicata per $\frac{1}{2^{x-2}}$ dà il coefficiente di $t'^{\,x'}$ quando sia $x-(2m+1)=x'$, $x-x'=2m+1$. Supposto pertanto il primo caso, il coefficiente di $t'^{\,x-2m}=t'^{\,x'}$ dovrà ricavarsi dalla formola

$$(1)\ldots\frac{1}{2^{x-1}}\Big(xt'^{\,x}+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\,t'^{\,x-2}(4+t'^2)+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.2.3.4.5}\times$$
$$t'^{\,x-4}(4+t'^2)^2\ldots+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-2m)}{1.2.3\ldots(2m+1)}\,t'^{\,x-2m}(4+t'^2)^m+\text{ec.}\Big)$$

o piuttosto dall' altra

$$(2)\ldots\frac{1}{2^{x-1}}\Big(\frac{x(x-1)(x-2)\ \ldots(x-2m)}{1.2.3\ldots(2m+1)}\,t'^{\,x-2m}(4+t'^2)^m+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(2m+2))}{1.2.3\ldots(2m+3)}\times$$
$$t'^{\,x-2m-2}(4+t'^2)^{m+1}\ldots+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(2m+2m'))}{1.2.3\ldots(2m+2m'+1)}\times$$
$$t'^{\,x-(2m+2m')}(4+t'^2)^{m+m'}+\text{ec.}\Big),$$ giacchè come è facile a vedersi i coefficienti parziali di $t'^{\,x'}$ non possono ricavarsi che dai termini dell'espressione (1) ne' quali la potenza di t' non superi la $x-2m^{esima}$. Ora supposto $x-2m-2m'=1$, od $x-2m-2m'=0$, locchè riguarda i due casi di x,x' amendue dispari, e di x,x' amendue pari, i coefficienti parziali di $t'^{\,x}$, si ricaveranno da ciascuno de' termini dell'espressione (2) fino a quello inclusivamente in cui la potenza di t' è $x-2m-2m'$. Preso quindi in generale il coefficiente di $t'^{\,2m'}$ in $(4+t'^2)^{m+m'}$ col dare successivamente ad m' tutti i valori 1, 2, 3, 4 ec.

nella formola che ne risulterà, si avranno da essa altrettanti fattori dei termini componenti il coefficiente di t'^{x-2m} da moltiplicarsi poi rispettivamente pe' fattori dipendenti da x ne' varj termini dell'espressione (2). Pertanto essendo $(4+t'^2)^{m+m'}$ $= 4^{m+m'} + (m+m')\,4^{m+m'-1}\,t'^2 + \frac{(m+m')(m+m'-1)}{1.2}\,4^{m+m'-2}\,t'^4$

$$+\frac{(m+m')(m+m'-1)(m+m'-2)}{1.2.3}\,4^{m+m'-3}\,t'^6$$

$+\frac{(m+m')(m+m'-1)(m+m'-2)\ldots\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots m'}\,4^m\,t'^{2m'}$ + ec., sarà per conseguenza $\frac{(m+m')(m+m'-1)(m+m'-2)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots m'}\,.\,4^m$ il ricercato coefficiente di $t'^{2m'}$ in $(4+t'^2)^{m+m'}$. Posto $m'=1$ questo coefficiente è $(m+1)\,.\,4^m$, e posto $m'=2$ diviene $\frac{(m+2)(m+1)}{1.2}\,.\,4^{m+1}$; ed osservando, che questa generale espressione non si estende al caso di $m'=0$ nel quale d'altronde si ha in 4^m il coefficiente di $t'^0 = t'^{2m'}$, risulta finalmente il ricercato coefficiente totale espresso da

$$(3)\ldots\frac{1}{2^{x-1}}\Bigg(\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-2m)}{1.2.3\ldots(2m+1)}\,.\,4^m+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(2m+2))}{1.2.3\ldots(2m+3)}\,(m+1)4^m$$

$$+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(2m+4))}{1.2.3\ldots(2m+5)}\,.\,\frac{(m+2)(m+1)}{1.2}\,.\,4^m$$

$$+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(2m+6))}{1.2.3\ldots(2m+7)}\,.\,\frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{1.2.3.}\,.\,4^m\ldots\ldots$$

$$+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(2m+2m'))}{1.2.3\ldots(2m+2m'+1)}\,.\,\frac{(m+m')(m+m'-1)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots m'}\,.\,4^m\Bigg).$$

Sia per esempio $x=8$, $x'=2$, e sarà $y_{8,2}=\frac{1}{2^7}.4^3.\times\frac{8.\,7.\,6.\,5.\,4.\,3.\,2}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.}=4$, poichè è chiaro che in questo caso $x-x'=6=2m=2.3$, onde $m=3$, $2m'=2$, $m'=1$, e quindi il valore da prendersi in questo caso finisce dopo il primo termine. Sia ancora $x=9$, $x'=3$, onde $x-x'=9-3=2\,.\,3$, e quindi $m=3$, $x-2.3-2=1$, e si avrà $y_{9,3}=\frac{1}{2^8}\cdot 4^3\cdot\frac{8.9}{2}+\frac{1.4^4}{2^8}=10$. Questi risultati possono verificarsi col mezzo delle sostituzioni successive nella equazione superiormente stabilita. Di fatto per essa si ha $y_{9,3}=y_{7,3}+y_{8,2}=y_{5,3}+y_{6,2}+y_{6,2}+y_{7,1}$ $=y_{5,3}+2y_{6,2}+1=y_{3,3}+y_{4,2}+2(y_{4,2}+y_{5,1})+1=4+3y_{4,2}$ $=4+3(y_{2,2}+y_{3,1})=4+6=10$.

Resta ora da determinarsi generalmente il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ quando x' è della forma $x-(2m+1)$. Per le cose già dette apparisce, che questo coefficiente non potrà prendersi, che dalla quantità moltiplicata per $\frac{1}{2^{x-2}}$ nella formola (C) cominciando dal termine contenente la potenza $t'^{x-(2m+1)}$. Così si troverà esso col mezzo dell' espressione

$$\frac{1}{2^{x-2}}\left[\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots\ldots(x-(2m+1))}{1.2.3\ldots\ldots(2m+1)}\;t'^{x-(2m+1)}(4+t'^2)^m\right.$$
$$+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots\ldots(x-(2m+3))}{1.2.3\ldots\ldots(2m+3)}\;t'^{x-(2m+3)}(4+t'^2)^{m+1}\ldots\ldots$$
$$\left.+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots\ldots(x-(2m+2m'+1))}{1.2.3\ldots\ldots(2m+2m'+1)}\,t'^{x-(2m+2m'+1)}(4+t'^2)^{m+m'}+\text{ec.}\right]$$

ove supposto $x-2m-2m'-1=0$, od anche $x-2m-2m'-1=1$, e prendendo il coefficiente di t'^0 in $(4+t'^2)^m$, quello di t'^2 in $(4+t'^2)^{m+1}$ e così successivamente fino al coefficiente di $t'^{2m'}$ in $(4+t'^2)^{m+m'}$ risulterà il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ espresso da

$$\frac{1}{2^{x-2}}\left(\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-(2m+1))}{1.2.3\ldots(2m+\ )}.\,4^m+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-(2m+3))}{1.2.3\ldots(2m+3)}\times\right.$$
$$(m+1)4^m+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-(2m+5))}{1.2.3\ldots(2m+5)}\,.\,\frac{(m+2)(m+1)}{1.2}\,.\,4^m\ldots\ldots$$
$$\left.\ldots+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x-(2m+2m'+1))}{1.2.3\ldots(2m+2m'+1)}\,.\,\frac{(m+m')(m+m'-1)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots m'}\,.\,4^m\right).$$

Sia ora $x=10$, $x'=3$, e quindi $m=3$; sarà $y_{10,3}=\frac{1}{2^8}\times 2^6.\frac{9.8}{2}+1=10$. Sia pure $x=13$, $x'=4$, $x-x'=9=2.4+1$, sarà dunque $m=4$, ed $y_{13.4}=\frac{1}{2^{11}}.2^8.\frac{12.11.10}{2.3}+\frac{1}{2^{11}}.2^8.5.12=35$. Di fatto dipendentemente dall' equazione proposta si ha

$$y_{13,4}=y_{11,4}+y_{12,3}=y_{9,4}+y_{10,3}+y_{10,3}+y_{11,2}=y_{9,4}+2y_{10,3}+y_{11,2}=y_{7,4}+y_{8,3}+2(y_{8,3}+y_{9,2})+y_{9,2}+y_{10,1}=y_{7,4}+3(y_{8,3}+y_{9,2})+1=y_{5,4}+y_{6,3}+3(y_{6,3}+y_{7,2})+3(y_{7,2}+y_{8,1})+1=y_{5,4}+4y_{6,3}+6y_{7,2}+4=y_{3,4}+y_{4,4}+4(y_{4,3}+y_{5,2})+6(y_{5,2}+y_{6,1})+4=4(y_{4,3}+y_{5,2})+6y_{5,2}+11=4(y_{2,3}+y_{3,2})+4(y_{3,2}+y_{4,1})+6(y_{3,2}+y_{4,1})+11=21+14y_{3,2}=21+14(y_{1,2}+y_{2,1})=35.$$

Per dimostrare sempre più, che le trovate formole soddisfanno ad ogni condizione del problema si supponga nella formola (3) $m=0$, ciò che torna al supporre $x=x'$, e quindi per ipotesi fatta dapprima $y_{x,x'}=1$; si tratterà dunque di dimostrare, che in generale $x+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.2.3.4.5}+$ ec. $=2^{x-1}$.

Perciò osservo, che

$$(D) \quad \ldots x+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.2.3.4.5}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}{1.2.3.4.5.6.7}+\text{ec.}=1+x-1+\frac{(x-1)(x-2)}{1.2}+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3}+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.2.3.4}+\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{1.2.3.4.5}+\text{ec.},$$

essendochè in generale considerando per n un numero intero qualunque è sempre $\frac{x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-2n)}{1.2.3\ldots\ldots(2n+1)} = \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-2n)}{1.2.3\ldots\ldots 2n}$ $+ \frac{(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-(2n+1))}{1.2.3.\ .\ .\ .\ (2n+1)} = ((2n+1)+x-(2n+1)) \times$ $\frac{(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-(2n+1))}{1.2.3.\ .\ .\ .\ (2n+1)}$. Osservando ora, che l'ultimo termine dell' espressione (3) mentre in essa si fa $m=0$ può essere $\frac{x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-(2m'-2))}{1.2.3.\ .\ .\ (2m'-1)}$ quando $x'=2m'$, ovvero $\frac{x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-2m')}{1.2.3\ldots\ldots(2m'+1)}$ quando $x'=2m'+1$, espressioni l'una delle quali si riduce a $2m'$ e l'altra all'unità, e d'altronde essendo $\frac{x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-(2m'-2))}{1.2.3\ldots\ldots(2m'-1)} = \frac{(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-(2m'-2))}{1.2.3\ldots\ldots(2m'-2)}$ $+ \frac{(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-(2m'-1))}{1.2.3\ldots\ldots(2m'-1)} = 2m'-1+1$ quando $x=2m'$, ed inoltre $\frac{x(x-1)(x-2)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (x-2m')}{1.2.3\ldots(2m'+1)} = \frac{(x-1)(x-2)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (x-2m')}{1.2.3\ldots\ldots 2m'}$ $+ \frac{(x-1)(x-2)\ .\ .\ .\ .\ .\ (x-(2m'+1))}{1.2.3\ldots\ldots(2m'+1)} = 1+0$, quando $x=2m'+1$, perciò siccome nell'un caso e nell'altro ogni coppia di termini del secondo membro dell'equazione (D) corrisponde perfettamente nel suo aggregato a ciascuno de' termini per ordine del primo membro, ed il secondo non è che lo sviluppo della potenza $(1+1)^{x-1}$ ne viene, che sarà $x + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}$ $+ \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{1.2.3.4.5} + \text{ec.} = 2^{x-1}$.

18. Riprendendo l'equazione $u = \frac{tt'+t^2t'}{1-t(t+t')}$ si può ricavarne più semplicemente l'espressione di $y_{x,x'}$ omettendo di risolvere in fattori il denominatore del secondo membro. Di fatto si ha $\frac{t^2t'+tt'}{1-t(t+t')} = t^2t' + t^3t'(t+t') + t^4t'(t+t')^2 + t^5t'(t+t')^3 \ldots\ldots$ $+ t^x t'(t+t')^{x-2} + \text{ec.} + tt' + t^2t'(t+t') + t^3t'(t+t')^2 + t^4t'(t+t')^3 \ldots.$

$+t^x t'(t+t')^{x-1}$ + ec., ed in questo sviluppo si vede facilmente che i parziali coefficienti di $t^x t'^{x'}$ non potranno ricavarsi da alcuno de' termini oltre $t^x t'(t+t')^{x-2}$, ed oltre $t^x t'(t+t')^{x-1}$ rispettivamente delle due serie in che si divide lo sviluppo medesimo. Quindi pure si vede, che retrocedendo in amendue ai termini più vicini al principio si trova il coefficiente di t^x espresso da $t'^{x-1} + (x-3)t'^{x-3}$

$$+\frac{(x-4)(x-5)}{1.2}t'^{x-5}+\frac{(x-5)(x-6)(x-7)}{1.2.3}t'^{x-7}\ldots$$

$$+\frac{(x-(m+2))(x-(m+3))\ldots\ldots(x-(2m+1))}{1.2.3\ldots\ldots\ldots m}t'^{x-(2m+1)}+\text{ec.}$$

$$+t'^{x}+(x-2)t'^{x-2}+\frac{(x-3)(x-4)}{1.2}t'^{x-4}+\frac{(x-4)(x-5)(x-6)}{1.2.3}t'^{x-6}\ldots$$

$$+\frac{(x-(m+1))(x-(m+2))\ldots\ldots(x-2m)}{1.2.3.\ldots m}t^{x-2m}+\text{ec.}$$

Pertanto ad ottenere il coefficiente di $t'^{x'}$ giova osservare, che se x' è della forma $x-(2m+1)$, cioè se sia $x-x'=2m+1$, essendo m qualunque numero intero positivo, il ricercato coefficiente sarà:

$$\text{(E)}\ldots\ldots\ldots\quad \frac{(x-(m+2))(x-(m+3))\ldots\ldots(x-(2m+1))}{1.2.3.\ldots m}$$

e se sia $x-x'=2m$ il coefficiente medesimo sarà:

$$\text{(F)}\ldots\ldots\ldots\quad \frac{(x-(m+1))(x-(m+2))\ldots\ldots(x-2m)}{1.2.3.\ldots\ldots m}$$

Sia per esempio $x=9$, $x'=2$, $x-x'=2.3+1$, e perciò $m=3$; ed applicando la formola (E) si avrà $y_{9,2}=\frac{4.3.2}{1.2.3}=4$. Sia ancora $x=8$, $x'=2$, onde $x-x'=6=2.3$, e verrà applicando la formola (F), $y_{8,2}=\frac{4.3.2}{1.2.3}=4$.

Vi ha un altro modo di sviluppo, che dà in generale l'espressione di $y_{x,x'}$ qualunque sieno x, x' purchè numeri interi, al quale però sembra sempre da preferirsi il metodo precedente per la maggiore semplicità delle formole, e per la più facile loro applicazione ai casi particolari. Si ha infatti

$$\frac{tt'+t^2t'}{1-t(t+t')}=\frac{tt'+t^2t'}{1-t^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{tt'}{1-t^2}}=\frac{tt'}{1-t}\left(1+\frac{tt'}{1-t^2}+\frac{t^2t'^2}{(1-t^2)^2}\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{t^{x'-1}\,t'^{x'-1}}{(1-t^2)^{x'-1}}+\text{ec.}\right)=(t+t^2+t^3+\text{ec.})\left(t'+\frac{tt'^2}{1-t^2}+\frac{t^2t'^3}{(1-t^2)^2}\ldots\right.$$

$\left.+\frac{t^{x'-1}\,t'^{x}}{(1-t^2)^{x'-1}}+\text{ec.}\right)$, d' onde si vede, che il coefficiente di $t'^{x'}$ in questa espressione non può essere che $(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})\times\frac{t^{x'}}{(1-t^2)^{x'-1}}$, e quello di t^{x} derivato dall' altro sarà lo stesso che il coefficiente di $t^{x-x'}$ in $(1+t+t^2+t^3+\text{ec.})\frac{1}{(1-t^2)^{x'-1}}$

$$=(1+t+t^2+t^3\ldots\ldots\ldots+t^{x-x'}+\text{ec.})(1-t^2)^{-(x'-1)}$$

$$=(1+t+t^2+t^3\ldots\ldots+t^{x-x'}+\text{ec.})\left(1+(x'-1)\,t^2+\frac{(x'-1)x'}{1.2}\,t^4\right.$$

$$\left.+\frac{(x'-1)x'(x'+1)}{1.2.3}\,t^6\ldots+\frac{(x'-1)x'(x'+1)\ldots(x'+m-2)}{1.2.3.\ldots m}\,t^{2m}+\text{ec.}\right).$$

Quindi o si supponga $x-x'=2m$, ovvero si dia luogo all' altra supposizione di $x-x'=2m+1$, si vedrà essere nell'un caso e nell' altro il coefficiente di $t^{x-x'}$ che nel caso presente è pur quello di $t^{x}\,t'^{x'}$ espresso per

$$1+(x'-1)+\frac{(x'-1)x'}{1.2}+\frac{(x'-1)x'(x'+1)}{1.2.3}\ldots+\frac{(x'-1)x'(x'+1)\ldots(x'+m-2)}{1.2.3\ldots m}.$$

Sia perciò nuovamente $x=9$, $x'=2$ ovvero $x=8$, $x'=2$; si avrà in amendue i casi $y_{9,2}=y_{8,2}=1+1+1+1=4$.

È poi da osservarsi, che anche indipendentemente da m può aversi un' espressione generale di $y_{x,x'}$, la quale come si è veduto è quella del coefficiente di $t^{x-x'}$ in $\frac{1}{1-t}\times$

$\frac{1}{(1-t^2)^{x'-1}}$. Ora $\frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{(1-t^2)^{x'-1}} = (1-t)^{-x'}\,(1+t)^{-(x'-1)}$

$$= \left(1 + x't + \frac{x'(x'+1)}{1.2} \cdot t^2 + \frac{x'(x'+1)(x'+2)}{1.2.3} \cdot t^3 \ldots\ldots\right.$$

$$\left. + \frac{x'(x'+1)(x'+2)\ldots\ldots(x-1)}{1.2.3\ldots(x-x')} t^{x-x'} + \text{ec.}\right)\left(1 + (x'-1)(-1)t + \frac{(x'-1)x'}{1.2}(-1)^2 t^2\right.$$

$$\left. + \frac{(x'-1)x'(x'+1)}{1.2}(-1)^3 t^3 \ldots + \frac{(x'-1)x'(x'+1)\ldots(x-2)}{1.2.3\ldots\ldots(x-x')}(-1)^{x-x'}\, t^{x-x'} + \text{ec.}\right),$$

e perciò il coefficiente di $t^{x-x'}$ sarà

$$\frac{(x'-1)x'(x'+1)\ldots\ldots(x-2)}{1.2.3\ldots\ldots(x-x')}(-1)^{x-x'} + \frac{(x'-1)x'(x'+1)\ldots\ldots(x-3)}{1.2.3\ldots(x-x'-1)}(-1)^{x-x'-1} . x'$$

$$+ \frac{(x'-1)x'(x'+1)\ldots\ldots(x-4)}{1.2.3\ldots\ldots(x-x'-2)} . (-1)^{x-x'-2} . \frac{x'(x'+1)}{1.2}$$

$$+ \frac{(x'-1)x'(x'+1)\ldots\ldots(x-5)}{1.2.3\ldots\ldots(x-x'-3)}(-1)^{x-x'-3} . \frac{x'(x'+1)(x'+2)}{1.2.3}$$

$$+ \text{ec.}$$

$$+ \frac{(x'-1)(-1)x'(x'+1)(x'+2)\ldots\ldots(x-2)}{1.2.3\ldots\ldots(x-x'-1)} + \frac{x'(x'+1)(x'+2)\ldots\ldots(x-1)}{1.2.3\ldots\ldots(x-x')}.$$

Sia ancora $x=9$, $x'=2$; e sarà $y_{9,2} = -1+2-3+4-5+6-7+8=4$ come prima.

19. Se si trattasse di risolvere l'altra equazione $y_{x,x'} = y_{x-3,x'} + y_{x-1,x'-1}$ si procederebbe con metodo analogo al già seguito nell'equazione poco fa considerata, dipendentemente però dalle particolari supposizioni, che possono introdursi nel problema di serie ricorrente, cui essa si riferisce. Quindi per maggiore semplicità supposto, che sia $y_{m,m}=1$ quando essendo $m>0$ si fa $x=x'=m$, ed inoltre $y_{0,0}=0$, $y_{x,1}=1$ finchè $x>0$, $y_{x.x'}=0$ essendo $x<x'$, dipendentemente da queste condizioni l'equazione proposta non sussiste allorchè posto $x'=1$ si pone successivamente $x=1$, $x=2$, $x=3$, giacchè in ognuno di questi casi il primo membro dell'equazione prendendo il valore dell'unità, tutti i termini del secondo si annullano. Sic-

come però quando $x-3<x'$ si annulla il primo termine del secondo membro dell'equazione per una delle condizioni già assunte, non aggiungendone verun'altra implicitamente si suppone in tal caso che si verifichi l'equazione $y_{x,x'}=y_{x-1,x'-1}$ essendo $x'>1$ locchè è arbitrario. Se si supponesse, che per la natura del problema non potesse verificarsi tale equazione, sarebbe d'uopo dipendentemente dalle altre condizioni che si aggiungessero, determinare le funzioni generatrici di $y_{x,x'}$, $y_{x-1,x'-1}$ relativamente al detto caso di $x-3<x'$, e sottrarle rispettivamente da quelle de' due membri dell'equazione proposta per istabilire fra queste l'opportuna relazione. Nella presente ipotesi però in modo analogo a quello che fu adoperato nel precedente problema si trova l'equazione fra le funzioni generatrici

$u-tt'-t^2t'-t^3t'=ut^3+utt'$, onde $u=\frac{t'(t+t^2+t^3)}{1-tt'-t^3}=$ $t'(t+t^2+t^3)(1+t(t'+t^2)+t^2(t'+t^2)^2+t^3(t'+t^2)^3+\text{ec.})$. Cercando ora il coefficiente di t^x nella parte $\frac{t't}{1-tt'-t^3}=$ $t'(t+t^2(t'+t^2)+t^3(t'+t^2)^2+t^4(t'+t^2)^3+\text{ec.})$ o piuttosto in $t'(t+t^2(t'+t^2)+t^3(t'+t^2)^2+t^4(t'+t^2)^3\ldots+t^x(t'+t^2)^{x-1})$, giacchè non potrebbe ricavarsi dai termini ulteriori, si troverà esso espresso da $t'^x+(x-3)t'^{x-3}+\frac{(x-5)(x-6)}{1.2}t'^{x-6}$ $+\frac{(x-7)(x-8)(x-9)}{1.2.3}t'^{x-9}\ldots+\frac{(x-(2m+1))(x-(2m+2))\ldots(x-3m)}{1.2.3\ldots m}t'^{x-3m}+\text{ec.}$

osservando, che i coefficienti parziali di t^x non possono aversi che dai termini della forma $t't^{x-2n}(t'+t^2)^{x-(2n+1)}$, essendo n numero intero non <0, e preso pure per m un altro qualunque numero intero. Sarà dunque il coefficiente di $t'^{x'}$ o ciò che è lo stesso di $t^x t'^{x'}$ quando x' è della forma $x-3m$, cioè $x-x'=3m$ espresso dalla formola

$$(G) \ldots\ldots \frac{(x-(2m+1))(x-(2m+1))\ldots\ldots(x-3m)}{1.2.3.\ldots\ldots m}$$

la quale è la sola che soddisfi al problema quando x' è della supposta forma. Di fatto sostituendola nell'equazione $y_{x,x'} = y_{x-3,x'} + y_{x-1,x'-1}$, a cagione di $x' = x - 3m$, $y_{x-3,x'}$ si ha ponendo in (G) $x-3$ in luogo di x, ed $m-1$ in luogo di m, ed il secondo membro della stessa equazione diviene

$$\frac{(x-3-(2(m-1)+1)(x-3-(2(m-1)+2)\ldots\ldots(x-3m)}{1.2.3.\ldots\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(x-1-(2m+1))(x-1-(2m+2))\ldots\ldots(x-1-3m)}{1.2.3\ldots m} =$$

$$\frac{(x-(2m+2))(x-(2m+3))\ldots\ldots(x-3m)}{1.2.3.\ldots\ldots(m-1)}$$

$$+\frac{(x-(2m+2))(x-(2m+3))\ldots\ldots(x-(3m+1))}{1.2.3.\ldots\ldots m} =$$

$$\frac{(m+x-(3m+1))(x-(2m+2))(x-(2m+3))\ldots\ldots(x-3m)}{1.2.3\ldots m} =$$

$$\frac{(x-(2m+1))(x-(2m+2))\ldots\ldots(x-3m)}{1.2.3.\ldots\ldots m}.$$

Trovato pertanto il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ nella parte $\frac{t't}{1-tt'-t^3}$, nella quale tal coefficiente non può corrispondere che all'ipotesi di $x' = x - 3m$, esso si avrà facilmente nelle altre due parti della proposta funzione generatrice cioè $\frac{t't^2}{1-tt'-t^3}$, $\frac{t't^3}{1-tt'-t^3}$. Di fatto il coefficiente di t^x vien dato in amendue dal coefficiente di t^x in $\frac{t't}{1-tt'-t^3}$ cambiando in esso rispettivamente x in $x-1$, ed in $x-2$ come insegnano le regole già date. Saranno dunque espressi tali altri coefficienti, primieramente rispetto a $\frac{t't^2}{1-tt'-t^3}$ da

$$(1)\ldots t'^{x-1}+(x-4)t'^{x-4}+\frac{(x-6)(x-7)}{1.2}t'^{x-7}+\frac{(x-8)(x-9)(x-10)}{1.2.3}t'^{x-10}\ldots$$

$$+\frac{(x-(2m+2))(x-(2m+3))\ldots(x-(3m+1))}{1.2.3\ldots m}t'^{x-(3m+1)}$$

e rispetto a $\frac{t't^3}{1-tt'-t^3}$ da

$$(2)\ldots t'^{x-2}+(x-5)t'^{x-5}+\frac{(x-7)(x-8)}{1.2}t'^{x-8}+\frac{(x-9)(x-10)(x-11)}{1.2.3}t'^{x-11}\ldots$$

$$+\frac{(x-(2m+3))(x-(2m+4))\ldots\ldots(x-(3m+2))}{1.2.3\ldots\ldots m}t'^{x-(3m+2)}.$$

Dal primo di tali coefficienti si ricava pertanto quello di $t'^{x'}$ o di $t^x t'^{x'}$ quando x' è della forma $x-(3m+1)$, il quale risulta

$$(\mathrm{H})\ldots\ldots\frac{(x-(2m+2))((x-(2m+3))\ldots\ldots(x-(3m+1))}{1.2.3\ldots\ldots m}$$

posto m non <1, giacchè quando $m=0$ cioè $x'=x-1$ il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ è l' unità, e dal secondo risulta

$$(\mathrm{K})\ldots\ldots\frac{(x-(2m+3))(x-(2m+4))\ldots\ldots(x-(3m+2))}{1.2.3\ldots\ldots m}$$

per coefficiente di $t^x t'^{x'}$ quando x' è della forma $x-(3m+2)$.

Sia per esempio $x=10$, $x'=6$; si avrà $x-x'=10-6=3.1+1$, onde $m=1$, e sarà $y_{10,6}=6$, $y_{x-3,x'}=y_{7,6}=1$ poichè quando $x'=x-1$ come si vede dalla formola (1), il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ è l'unità. Inoltre poichè $y_{x-1,x'-1}=y_{9,5}$, e $9-5=4=3.1+1$, ponendo nella formola (H) $x=9$, $m=1$, sarà $y_{9,5}=5$. Potrebbe farsi lo stesso sperimento intorno alla formola (K), ma ciò sarebbe superfluo provata già abbastanza la sicurezza del metodo, per cui rimane dimostrata la piena soluzione della proposta equazione distinta ne' tre casi che sono i soli possibili di $x-x'$ appartenente a ciascuna delle tre forme numeriche $3m$, $3m+1$, $3m+2$.

20. Un metodo analogo agli usati nei due numeri precedenti conduce alla completa soluzione dell'equazione assai più generale $y_{x,x'}=y_{x-n,x'}+y_{x-1,x'-1}$ nella quale n essendo un numero qualunque dato può perciò determinare qualunque ordine dell' equazione. Posta pertanto u come funzione generatrice di $y_{x,x'}$, quelle di $y_{x-n,x'}$, $y_{x-1,x'-1}$ saranno rispettivamente ut^n, utt', e ritenendo che quando $x'=1$ sia $y_{x,1}=1$ sempre quando $x>0$ essendo poi $y_{0,1}=0$, ed inoltre supposto $y_{x-m,1}=0$ finchè $x=1$, $x=2$, $x=3$ ec. $x=n$, cioè fintantochè non sia $x>m$, ne viene l' equazione tra le funzioni generatrici $u-t'(t+t^2+t^3+t^4\ldots+t^n)=ut^n+utt'$, onde $u=\dfrac{t'(t+t^2+t^3\ldots\ldots+t^n)}{1-t(t^{n-1}+t')}$ $=t'(t^n+t^{n-1}\ldots\ldots+t)\,(1+t(t^{n-1}+t')+t^2(t^{n-1}+t')^2$ $+t^3(t^{n-1}+t')^3+$ ec.$)$, e denotando per r un esponente intero che possa ricevere tutti i valori da 1 fino ad n inclusivamente, il coefficiente di t^x in $t't^r(1+t(t^{n-1}+t')$ $+t^2(t^{n-1}+t')^2+\text{ec.})=t'(t^r+t^{r+1}(t^{n-1}+t')+t^{r+2}(t^{n-1}+t')^2+\text{ec.})$ non potrà ottenersi in alcuna sua parte da termini che oltrepassino $t't^{r+x-r}(t^{n-1}+t')^{x-r}$, e solamente da quelli della forma $t't^{x-m(n-1)}(t^{n-1}+t')^{x-r-m(n-1)}$ essendo m numero intero qualunque ed anche zero, giacchè è d'altronde evidente che innalzando ad una qualunque potenza intera il binomio $t^{n-1}+t'$, gli esponenti di t riescono sempre multipli di $n-1$. Quindi il coefficiente di t^x ricavandosi dalla sola espressione $t't^x(t^{n-1}+t')^{x-r}+t't^{x-(n-1)}(t^{n-1}+t')^{x-r-(n-1)}+t't^{x-2(n-1)}\times$ $(t^{n-1}+t')^{x-r-2(n-1)}\ldots+t't^{x-m(n-1)}(t^{n-1}+t')^{x-r-m(n-1)}+$ ec. sarà :

$$(I) \ldots\ldots t'^{\,x-r+1}+(x-r-(n-1))t'^{\,x-r-(n-1)}+\frac{(x-r-2(n-1))(x-r-2(n-1)-1)}{1.2}\times t'^{\,x-r-2(n-1)-1}+\frac{(x-r-3(n-1))(x-r-3(n-1)-1)(x-r-3(n-1)-2)}{1.2.3}t^{x-r-3(n-1)-2}\ldots\ldots$$

$$+\frac{(x-r-m(n-1))(x-r-m(n-1)-1)(x-r-m(n-1)-2)\ldots(x-r-m(n-1)-(m-1))}{1.2.3\ldots\ldots m}\times t'^{\,x-r-m(n-1)-(m-1)}.$$

Perciò il coefficiente di $t'^{\,x'}$ che si ricava da quello di t^x o, ciò che è lo stesso, il coefficiente di $t^x t'^{\,x'}$ in u è

$$\frac{(x-r-m(n-1))(x-r-m(n-1)-1)\ldots\ldots(x-r-m(n-1)-(m-1))}{1.2.3\ldots\ldots m}$$

$$=\frac{(x-r-m(n-1))(x-r-m(n-1)-1)\ldots\ldots(x-r-mn+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots m}$$

poichè qualunque sia x' purchè non $>x$ può sempre suppórsi $x'=x-r-mn+1$, ovvero $x-x'=r+mn-1$ cioè la differenza de' due numeri x, x' sarà sempre o un multiplo esatto di n, locchè avviene nel caso di $r=1$, o lo sarà coll'avanzo di un numero $<n$, locchè ha luogo quando si fa successivamente $r=1$, $r=2$, $r=3$ ec. fino ad $r=n$ inclusivamente. A cagion d'esempio se si pone $n=3$, $r=2$ sarà $x-x'$ della forma $3m+2$ come riesce nel problema precedente. Per mostrare ora come il valore trovato generalmente per $y_{x,x'}$ rende identica l'equazione proposta, giova osservare come l'espressione corrispondente dee convertirsi in quella di $y_{x-n,x'}$ ponendo nella prima $x-n$ in luogo di x, ed $m-1$ in luogo di m, ed in quella di $y_{x-1,x'-1}$ ponendo soltanto nella prima $x-1$ in luogo di x, e ciò è evidente poichè in questo ultimo caso la differenza $x-x'=(x-1)-(x'-1)$ non varia. Per tal modo l'equazione $y_{x,x'}=y_{x-n,x'}+y_{x-1,x'-1}$ diviene

$$(L) \ldots\ldots \frac{(x-r-m(n-1))(x-r-m(n-1)-1)\ldots\ldots(x-r-m(n-1)-(m-1))}{1.2.3\ldots\ldots m}=$$

$$\frac{(x-r-m(n-1)-1)\,(x-r-m(n-1)-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(x-r-m(n-1)-(m-1))}{1.2.3\,.\,.\,.\,.\,(m-1)}$$

$$+\frac{(x-r-m(n-1)-1)(x-r-m(n-1)-2)\,.\,.\,.\,.\,(x-r-m(n-1)-m)}{1.2.3\,.\,.\,.\,m}$$

$$=\frac{(m+x-r-m(n-1)-m)(x-r-m(n-1)-1)(x-r-m(n-1)-2)\ldots(x-r-m(n-1)-(m-1))}{1.2.3.\,.\,.\,.\,.\,.\,m}$$

equazione di cui si rileva a colpo d'occhio l'identità. Vuolsi intanto notare, che l' espressione di $y_{x,x'}$ non ha luogo quando $m=0$ sicchè supposto $x-x'=r+mn-1=r-1$, $x'=x-r+1$ il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ è 1, cioè il coefficiente del primo termine dello sviluppo del coefficiente di t^x in u. Se inoltre $x=x'$ onde $r=1$ si ha parimenti $y_{x,x'}=1$.

Sia ora per un esempio $x=10$, $x'=4$, $n=4$ onde $x-x'=6=r+1.4-1$, ed $r=3$, $m=1$. L' espressione di $y_{x,x'}$ dà nel presente caso $y_{10,4}=10-3-3=4$. Per avere gli altri due valori di $y_{6,4}$, $y_{9,3}$ che nella loro somma debbono eguagliare quello di $y_{10,4}$ siccome quanto al primo de' suddetti due valori l' applicazione della formola del primo termine del secondo membro dell' equazione (L) condurrebbe ad un risultato infinito a cagione di $m-1=0$ nel presente caso, è d'uopo perciò ricavare direttamente dalla formola (I) il coefficiente di $t'^{x'}$. Ora poichè riguardo ad $y_{6,4}$, $x-x'=6-4=2$ $=r+0.4-1$, onde $r=3$, il coefficiente ricercato sarà quello di $t'^{x-3+1}=t'^4$ che è l' unità, e quindi $y_{6,4}=1$. L' altro valore di $y_{9,3}$ si ricava dal secondo termine del secondo membro dell' equazione (L) fatto nuovamente $x=10$, $r=3$, $m=1$, $n=4$, e si ottiene $y_{9,3}=10-3-1.3-1=3$ come appunto dev' essere.

21. Un metodo analogo a quello che ha servito fin quì per la risoluzione delle equazioni alle differenze parziali con due variabili è applicabile anche alle equazioni che ne contengono tre, e potrebbe colle dovute avvertenze estendersi anche a quelle che ne contenessero un maggior numero. Questo metodo quanto alle prime dipende dal considerare la funzione generatrice di $y_{x,x',x''}$ dotata di una proprietà che compete similmente alla funzione generatrice di $y_{x,x'}$ vale a dire che se u è la funzione generatrice di $y_{x,x';x''}$ quella di $y_{x\pm m,x'\pm n,x''\pm r}$ è $ut^{\mp m}.t'^{\mp n}.t''^{\mp r}$ come non difficilmente può rilevarsi qualora si considerino le funzioni generatrici a tre variabili decomposte in funzioni generatrici a due sole, siccome queste furono già decomposte in altre ad una sola. Ciò posto ripetendo quì i raziocinj adoperati al numero 7. si può senza più risolvere il seguente problema, che conduce ad una equazione alle differenze parziali a tre variabili.

Si tratta di assegnare con una formola il numero de' modi ne' quali x cose possano partirsi in tre cumuli, nel primo de' quali le cose stesse sieno combinate ad x' ad x', e nel secondo sieno combinate ad x'' ad x''.

Essendo evidente che il numero ricercato dev' essere una funzione di x, x', x'' essa potrà esprimersi per $y_{x,x',x''}$, siccome $y_{x+1,x';x''}$ avrà lo stesso senso rispetto ad un numero di cose maggiore di un' unità del proposto cioè ad $x+1$ cose, che debbano fra loro combinarsi come si è detto. Ma questo ulterior numero di maniere oltre al comprendere quello che è rappresentato da $y_{x,x',x''}$ ne avrà altrettante di più quante sieno le unità nella somma $y_{x,x'-1,x''}+y_{x,x',x''-1}$ giacchè la cosa aggiunta rispettivamente combinata con ognuno de' cumuli delle altre ad $x'-1, x'-1$ in $y_{x,x'-1,x''}$ e ad $x''-1, x''-1$

in $y_{x,x',x''-1}$ darà altrettanti de' modi richiesti. Si avrà quindi l'equazione $y_{x+1,x',x''}=y_{x,x',x''}+y_{x,x'-1,x''}+y_{x,x',x''-1}$ ovvero $y_{x,x',x''}=y_{x-1,x',x''}+y_{x-1,x'-1,x''}+y_{x-1,x',x''-1}$, la quale sussiste sempre fuori del caso di $x=x'=x''=0$ per cui si ha $y_{0,0,0}=1$ potendosi concepire come zero cose si dividano in un modo solo in tre parti, la prima e la seconda delle quali ne contenga un numero zero. Sarà perciò l' equazione tra le funzioni generatrici: $u-1=ut+utt'+utt''$, ed $u=\frac{1}{1-t(1+t'+t'')}=1+t(1+t'+t'')$ $+t^2(1+t'+t'')^2+t^3(1+t'+t'')^3\ldots\ldots+t^x(1+t'+t'')^x+$ ec. essendo u funzione generatrice di $y_{x,x',x''}$. Il ricercato coefficiente sarà dunque quello di $t'^{x'}\,t''^{x''}$ in $(1+t'+t'')^x$ $=(t'+(1+t''))^x=t'^x+x(1+t'')\,t'^{x-1}+\frac{x(x-1)}{1.2}(1+t'')^2t'^{x-2}$ $+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}(1+t'')^3t'^{x-3}\ldots+\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-x'+1)}{1.2.3\ldots x'}(1+t'')^{x-x'}\,t'^{x'}+$ec. Cercando ora il coefficiente di $t''^{x''}$ in $(1+t'')^{x-x'}=1+(x-x')t'$ $+\frac{(x-x')(x-x'-1)}{1.2}t''^2+\frac{(x-x')(x-x'-1)(x-x'-2)}{1.2.3}t''^3\ldots\ldots$ $+\frac{(x-x')(x-x'-1)(x-x'-2)\ldots\ldots(x-x'-x''+1)}{1.2.3\ldots x''}t''^{x''}+$ ec. si vedrà essere quello di $t'^{x'}\,t''^{x''}$ in $(1+t'+t'')^x$, o ciò che è lo stesso $y_{x,x',x''}$

$$=\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-x'+1)}{1.2.3\ldots x'}\cdot\frac{(x-x')(x-x'-1)(x-x'-2)\ldots\ldots(x-x'-x''+1)}{1.2.3\ldots x''}.$$

Questa espressione è identica a quella che occupandosi dello stesso problema trovò prima per induzione il Brunacci (1), determinando in seguito (2) la corrispondente equazione da risolversi co' metodi del calcolo delle differenze finite, la quale è identica alla fondamentale della presente soluzione.

---

(1) V Corso di Matematica sublime. Tom. I pag. 26

(2) Ivi pag. 211.

22. Col metodo adoperato nel numero precedente si risolve un altro problema relativo alle probabilità che fu pure trattato dal Brunacci (1).

Si suppone, che un Giocatore attenda ad ogni colpo un evento favorevole mentre ne può avere altri due contrarj, e che inoltre la legge del giuoco prescriva che egli non possa guadagnarlo qualora non incontri x volte l'evento favorevole prima che l'uno degli eventi contrarj siasi verificato x' volte, e l'altro x'' volte. Supposto eziandio, che le rispettive probabilità degli eventi semplici sieno p, q, r, poichè la probabilità di guadagnare la partita pel considerato Giocatore può esprimersi per $y_{x,x',x''}$ che ad ogni nuovo colpo può divenire o $y_{x-1,x',x''}$, o $y_{x,x'-1,x''}$, o $y_{x,x',x''-1}$, ne segue, che l' equazione da trattarsi per risolvere il problema è

$$y_{x,x',x''}=py_{x-1,x',x''}+qy_{x,x'-1,x''}+ry_{x,x',x''-1}.$$

Se ora si chiami u la funzione generatrice di $y_{x,x',x''}$, quella del secondo membro dell'equazione sarà $put+qut'+rut''$, e l' equazione fra le medesime si determina osservando, che qualora sia $x=0$, ed x', x'' siano numeri maggiori di zero $y_{0,x',x''}=1$ equivalendo allora questa espressione alla certezza, poichè difatto è certo che il Giuocatore ha ottenuto zero eventi favorevoli prima d'incontrare gli eventi contrarj, o a meglio dire non può incontrare x', o x'' eventi contrarj che dopo zero eventi favorevoli, quali ha appunto nel principio del giuoco. Nel caso poi di $x=x'=0$ si ha $y_{0,0,x''}=0$, poichè è assurdo che il Giuocatore non abbia niun evento favorevole prima di niun evento contrario o a dir meglio abbia zero eventi favorevoli prima di zero eventi contrarj, e lo stesso deve dirsi quando $x=x''=0$, avendosi pure $y_{0,x',0}=0$. Ma quando $x=0$ solamente, il secondo membro dell'equazione contiene le due espressioni $y_{0,x'-1,x''}$, $y_{0,x',x''-1}$ ciascuna delle quali vale l'unità quando $x'-1$, $x''-1$ sieno maggiori dello zero, dunque dovrà sottrarsi da u la funzione generatrice dell'unità, che nel presente caso è $\frac{t'}{1-t'} \cdot \frac{t''}{1-t''}$, e corrispondentemente dalla funzione generatrice del secondo membro dell'equazione proposta si toglieranno le due espressioni $\frac{qt'^2}{1-t'} \cdot \frac{t''}{1-t''}$ ed $\frac{rt''^2}{1-t''} \cdot \frac{t'}{1-t'}$. Così si avrà l'equazione $u - \frac{t't''}{(1-t')(1-t'')}$ $= put + qut' + rut'' - \frac{qt'^2t''}{(1-t')(1-t'')} - \frac{rt''^2t'}{(1-t')(1-t'')}$, onde $u = \frac{t't''-qt'\,t''-rt''^2t'}{(1-t')(1-t'')} : (1-(pt+qt'+rt'')) = \frac{t't''-qt'^2t''-rt''^2t'}{(1-t')(1-t'')} \times$ $(1+(pt+qt'+rt'')+(pt+qt'+rt'')^2 \ldots + (pt+qt'+rt'')^x + \text{ec.})$. Dunque primieramente il coefficiente di t^x in questa espressione non potrà ottenersi che dalla parte: $\frac{t't''-qt'^2t''-rt''^2t'}{(1-t')(1-t'')} \times$ $\left((pt+qt'+rt'')^x+(pt+qt'+rt'')^{x+1}+(pt+qt'+rt'')^{x+2}+\text{ec.}\right)$, e sarà per conseguenza $\frac{t't''}{(1-t')(1-t'')}(1-(qt'+rt''))p^x(1+(x+1) \times$ $(qt'+rt'') + \frac{(x+2)(x+1)}{1.2}(qt'+rt'')^2 + \frac{(x+3)(x+2)(x+1)}{1.2.3}(qt'+rt'')^3 + \text{ec.})$. Quindi riducendo ed osservando che in generale $\frac{(x+n)(x+n-1)\ldots(x+1)}{1.2.3\ldots n}$ $- \frac{(x+n-1)(x+n-2)\ldots(x+1)}{1.2.3\ldots(n-1)} = \frac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)}{1.2.3\ldots n}$, sarà lo stesso coefficiente di t^x equivalente a $\frac{t't''}{(1-t')(1-t'')}\ p^x (1 + x(qt'+rt'')$ $+ \frac{x(x+1)}{1.2}(qt'+rt'')^2 + \frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}(qt'+rt'')^3 + \text{ec.})$ dal quale resta a ricavarsi quello di $t'^{x'}t''^{x''}$. Ora riflettendo che $\frac{t't''}{(1-t')(1-t'')}$ $=(t'+t'^2+t'^3+t'^4+\text{ec.})(t''+t''^2+t''^3+t''^4+\text{ec.})$, e che tutti i termini di ciascuna potenza $(qt'+rt'')^n$ dovendo nella formola trovata essere moltiplicati per tutti i prodotti delle potenze di t', t'' all'infinito, se ne inferisce, che per avere il coefficiente cercato di $t'^{x'}t''^{x''}$ o ciò che è lo stesso nel nostro caso l' espressione di $y_{x,x',x''}$, si dovranno dalla formola suddetta escludere tutti i termini di ciascuna potenza $(qt'+rt'')^n$ ne' quali t', t'' sieno rispettivamente elevati ad una potenza superiore di $x'-1$, $x''-1$. Ma in questi stessi termini le quantità q, r saranno sempre innalzate rispettivamente alla stessa potenza a cui lo siano t', t'', dal che facilmente si raccoglie dover poi essere $y_{x,x',x''}=p^x\left(1+x(q+r)+\frac{x(x+1)}{1.2}(q+r)^2\right.$ $\left.+\frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3}(q+r)^3+\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1.2.3.4}(q+r)^4+\text{ec.}\right)$ purchè nelle particolari applicazioni si escludano tutti i termini ne' quali le potenze di q, r superino rispettivamente i gradi $x'-1$, $x''-1$.

---

(1) Ivi pag. 266.

23. Sia ora per trattare un altro problema già risoluto da Lagrange (1) in altra maniera, e dipendente da una funzione di tre variabili l' equazione $y_{x,x',x''}=py_{x-1,x'-1,x''}$ $+qy_{x-1,x',x''-1}+(1-p-q)y_{x-1,x',x''}$, nella quale $y_{x,x',x''}$ esprime la probabilità, che ha un giuocatore di ottenere in x colpi un dato evento per x' volte, ed un altro evento pur dato per x'' volte, essendo l' uno o l' altro possibile a ciascun colpo rispettivamente secondo le probabilità semplici p, q.

Pertanto cominciando dal supporre nella proposta equazione $x''=0$ si ha $y_{x,x',0} = py_{x-1,x'-1,0} + qy_{x-1,x',-1}$ $+(1-p-q)y_{x-1,x',0} = py_{x-1,x'-1,0} + (1-p)y_{x-1,x',0}$ a cagione di $y_{x-1,x',0} = y_{x-1,x',-1}$, poichè l'indice negativo -1 equivale nel caso presente quanto alla probabilità all'indice zero, significando l'indice negativo un colpo di più riuscito favorevole a quell'evento, che il giuocatore dovea condurre soltanto per x'' volte. Però quantunque anche in questa ipotesi di $x''=0$ l'equazione ridotta come sopra per una considerazione intrinseca alla natura del problema sussista, rendendosi la stessa di quella che fu stabilita pel numero 11, è d'uopo ciò non ostante, dipendentemente dalla natura delle funzioni generatrici alle quali vuolsi riferire la proposta equazione, e che si suppongono non contenere termini con indici negativi, è d'uopo dissi riguardare come nulla l'espressione $qy_{x-1,x',-1}$ mentre $y_{x-1,x',0}$ non può esserlo, e più allora non sussiste l'equazione proposta, la quale falsamente dà $y_{x,x',0} = py_{x-1,x'-1,0}$ $+(1-p-q)y_{x-1,x',0}$. Passando perciò a stabilire la relazione tra le funzioni generatrici de' due membri della proposta stessa, ed indicando per u al solito la funzione generatrice di $y_{x,x',x''}$ si dovrà da essa sottrarre primieramente la funzione generatrice di $y_{x,x',0}$ quale vien data dal num. 11. e denotandola quì per u', si toglierà poi dalla funzione generatrice del secondo membro della proposta la funzione generatrice di $py_{x-1,x'-1,0} + (1-p-q)y_{x-1,x',0}$, cioè $pu'tt' + (1-p-q)\,u't$. Dando ora luogo all'ipotesi di $x'=0$ si vedrà facilmente, che nascendo pure per essa l'insussistenza dell'equazione del problema, sarà da sottrarsi da u la funzione u'' generatrice di $y_{x,0,x''}$, e dalla funzione generatrice del secondo membro della stessa equazione dovrà pure sottrarsi la somma $qu''tt'' +$ $(1-p-q)u''t$, essendo u'' la stessa u' in cui siasi sostituito q a

---

(1) V. Nouveaux Mémoires de l' Académie Royale de Berlin. an. 1775. pag. 243.

p, e t'' a t'. Inoltre nella supposizione di $x'=x''=0$ si annullano tutti i termini dell' equazione tranne $y_{x,0,0}=1$, ed $(1-p-q)y_{x-1,0,0}=1-p-q$. Sembrerebbe quindi a prima vista, che si dovessero sottrarre rispettivamente dalle funzioni generatrici del primo, e del secondo membro dell'equazione le espressioni $\frac{1}{1-t}$, $(1-p-q)\frac{t}{1-t}$, ma siccome per la sottrazione di $u'+u''$ da u, e per quella di $pu'tt'+(1-p-q)u't+qu''tt''+(1-p-q)u''t$ da $putt'+qutt''+(1-p-q)ut$, che è la funzione generatrice del secondo membro dell' equazione si sottraggono rispettivamente due volte le generatrici di $y_{x,0,0}$ e di $(1-p-q)y_{x-1,0,0}$ mentre esse non possono esistere nelle corrispondenti generatrici a tre variabili che una volta sola, così è d' uopo in vece l' aggiungerle alle medesime nello stabilire l'equazione esprimente la loro relazione. Sarà questa pertanto $u-u'-u''+\frac{1}{1-t}=putt'+qutt''+(1-p-q)ut-pu'tt'-(1-p-q)u't-qu''tt''-(1-p-q)u''t+(1-p-q)\frac{t}{1-t}$; ed essendo pel numero 11. $u'=\frac{1}{1-t}+pu'tt'+(1-p)u't-\frac{t(1-p)}{1-t}$, si ha pure $u-\frac{1}{1-t}-pu'tt'-(1-p)u't+\frac{t(1-p)}{1-t}-u''+\frac{1}{1-t}=putt'+qutt''+(1-p-q)ut-pu'tt'-(1-p-q)u't-qu'tt''-(1-p-q)u''t+(1-p-q)\frac{t}{1-t}$, ovvero $u-u''=putt'+qutt''+(1-p-q)ut+qu't-qu''tt''-(1-p-q)u''t-\frac{qt}{1-t}$. Inoltre essendo pure per lo stesso numero 11. $u''=\frac{1}{1-t}+qu''tt''+(1-q)u''t-\frac{t(1-q)}{1-t}$, si avrà ancora $u-\frac{1}{1-t}-qu''tt''-(1-q)u''t+\frac{t(1-q)}{1-t}=putt'+qutt''+(1-p-q)ut+qu't-qu''tt''-(1-p-q)u''t-\frac{qt}{1-t}$, ovvero $u - \frac{1}{1-t} + \frac{t}{1-t} = putt' + qutt'' + (1-p-q)ut + qu't + pu''t$, ed $u = \frac{1+qu't+pu''t}{1-ptt'-qtt''-(1-p-q)t}$, la quale espressione può considerarsi divisa in altrettante parti quanti sono i termini del suo numeratore.

Si tratta quindi primieramente di ricercare il coefficiente di $t^{x}\,t'^{x'}\,t''^{x''}$ in $\frac{1}{1-ptt'-qtt''-(1-p-q)t} = \frac{1}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$ $= 1 + (pt'+qt''+(1-p-q))t + (pt'+qt''+(1-p-q))^{2}t^{2}$ $+ (pt'+qt''+(1-p-q))^{3}t^{3} \ldots\ldots + (pt+qt''+(1-p-q))^{x}\,t^{x} +$ ec. Dunque il coefficiente di t^{x} in questa espressione è $(pt'+qt''+(1-p-q))^{x} = p^{x}\,t'^{x} + x\,(qt''+(1-p-q))\,p^{x-1}\,t'^{x-1}$ $+ \frac{x(x-1)}{1.2}(qt''+(1-p-q))^{2}\,p^{x-2}\,t'^{x-2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} \times$ $(qt''+(1-p-q))^{3}p^{x-3}\,t'^{x-3} \ldots\ldots + \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-(x-x'-1))}{1.2.3\ldots(x-x')} \times$ $(qt''+(1-p-q))^{x-x'}\,p^{x'}\,t'^{x'} +$ ec. da cui risulta essere $\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots(x-x')}(qt''+(1-p-q))^{x-x'}\,p^{x'}$ quello di $t'^{x'}$. Ora

$$(qt''+(1-p-q))^{x-x'} = q^{x-x'}\,t''^{x-x'} + (x-x')(1-p-q)q^{x-x'-1}\,t''^{x-x'-1} +$$
$$\frac{(x-x')(x-x'-1)}{1.2}(1-p-q)^{2}q^{x-x'-2}\,t''^{x-x'-2} + \frac{(x-x')(x-x'-1)(x-x'-2)}{1.2.3} \times$$
$$(1-p-q)^{3}q^{x-x'-3}\,t''^{x-x'-3} \ldots + \frac{(x-x')(x-x'-1)(x-x'-2)\ldots(x-x'-(x-x'-x''-1))}{1.2.3\ldots(x-x'-x'')} \times$$

$(1-p-q)^{x-x'-x''}\,q^{x''}\,t''^{x''} +$ ec., e quindi se ne deduce facilmente, che il coefficiente di $t^{x}\,t'^{x'}\,t''^{x''}$ nella prima parte di u, cioè in $\frac{1}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$ è

$$(\mathrm{M}) \ldots \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots(x-x')} \cdot \frac{(x-x')(x-x'-1)(x-x'-2)\ldots(x''+1)}{1.2.3\ldots(x-x'-x'')}(1-p-q)^{x-x'-x''}\,p^{x'}\,q^{x''}.$$

Ciò posto è opportuno l'osservare, che questo coefficiente manca o svanisce quando $x-x'-x''<0$ ed $x-x'<x''$, poichè allora è nullo il coefficiente di $t''^{x''}$ in $(qt''+(1-p-q))^{x-x'}$, e d'altronde è evidente, che il problema riesce impossibile quando $x<x'+x''$, poichè non potendo aver luogo a ciascun colpo, che un evento solo, si richiede almeno, che il numero de' colpi accordato pareggi la totalità degli eventi da condursi. Nel caso poi di $x-x'-x''=0$, cioè di $x-x'=x''$ il coefficiente di $t''^{x''}$ in $(qt''+(1-p-q))^{x-x'}$ è $q^{x''}$ dipendentemente dallo sviluppo di $(qt''+(1-p-q))^{x''}$, e perciò quello di $t^{x}t'^{x'}t''^{x''}$ nella espressione $\frac{1}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$ è $\frac{x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots(x-x')}p^{x'}q^{x''}=$

$$(M')\ \ldots\ldots\ \frac{x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots x''}p^{x'}q^{x''}.$$

Trovato così generalmente il richiesto coefficiente nella prima parte di u, vuolsi anche rinvenire nella seconda parte cioè in $\frac{qu't}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$. E poichè il coefficiente di $t^{x}t'^{x'}t''^{x''}$ in $\frac{qt}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$ si ha dall' espressione (M) moltiplicata per q cambiando solamente in essa x in $x-1$, come è evidente per le cose già dimostrate, cosicchè esso risulta espresso da

$$(N)\ \ldots\ \frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots(x-x'-1)}\cdot\frac{(x-x'-1)(x-x'-2)(x-x'-3)\ldots\ldots(x''+1)}{1.2.3\ldots(x-x'-x''-1)}\times$$
$$(1-p-q)^{x-x'-x''-1}p^{x'}q^{x''+1},$$

e d'altronde il coefficiente di $t^{x}t'^{x'}$ in u', che non è punto funzione di t'' si ha dal numero 11, nascerà quindi il coefficiente di $t^{x}t'^{x'}t''^{x''}$ in $\frac{qu't}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$ dal complesso dei prodotti di tutte le variazioni possibili del coefficiente di $t^{x}t'^{x'}$ in u' per le corrispondenti di quello di $t^{x}t'^{x'}t''^{x''}$ in $\frac{qt}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$

relativamente però solo ad x ed x', cioè tali che i coefficienti variati, che entrano in ciascun prodotto appartengano rispettivamente a potenze di t, t', che insieme moltiplicate producano $t^x t'^{x'}$. Se si indica pertanto il coefficiente di $t^x t'^{x'}$ in u' per $T'_{x,x'} =$

$$(N')\ldots p^{x'}\left(1+(1-p)x'+\frac{x'(x'+1)}{1.2}(1-p)^2+\frac{x'(x'+1)(x'-2)}{1.2.3}(1-p)^3\ldots\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{x'(x'+1)(x'+2)\ldots\ldots(x-1)}{1.2\ldots\ldots(x-x')}(1-p)^{x-x'}\right)$$ come dal numero 11. sopracitato, e per $T_{x,x',x''}$ quello di $t^x t'^{x'} t''^{x''}$ in $\frac{qt}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$ cioè l'espressione (N), potrà il coefficiente di $t^x t'^{x'} t''^{x''}$ in $\frac{qu't}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$ esprimersi come segue:

$$(O)\ldots\left\{\begin{array}{llll}
T'_{0,0}.T_{x,x',x''} & +T'_{1,0}.T_{x-1,x',x''} & +T'_{2,0}.T_{x-2,x',x''} & \ldots+T'_{x,0}.T_{0,x',x''} \\
+T'_{0,1}.T_{x,x'-1,x''} & +T'_{1,1}.T_{x-1,x'-1,x''} & +T'_{2,1}.T_{x-2,x'-1,x''} & \ldots+T'_{x,1}.T_{0,x'-1,x''} \\
+T'_{0,2}.T_{x,x'-2,x''} & +T'_{1,2}.T_{x-1,x'-2,x''} & +T'_{2,2}.T_{x-2,x'-2,x''} & \ldots+T'_{x,2}.T_{0,x'-2,x''} \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
+T'_{0,x'}.T_{x.0,x''} & +T'_{1,x'}.T_{x-1,0,x''} & +T'_{2,x'}.T_{x-2,0,x''} & \ldots+T'_{x,x'}.T_{0,0,x''}
\end{array}\right\}$$

In questa espressione però svaniscono dipendentemente dalle variazioni di x e di x' nel coefficiente $T'_{x,x'}$ considerato generalmente tutti que' termini ne' quali esistendo sempre come fattore lo stesso $T'_{x.x'}$ sia $x < x'$, e ciò secondo l' indole di questa funzione determinata nel num. 11. anche nella supposizione di $y_{0,x'} = 0$ quando $x' > 0$, e per l' ipotesi di quel secondo problema, che richiede il numero de' colpi prescritto non minore di quello delle volte per cui deve condursi il dato evento. Quindi sussistono tutti i termini della prima fila orizzontale nella espressione (O), essendo ciascuno dei coefficienti $T'_{0,0}$, $T'_{1,0}$, $T'_{2,0}$ ec. eguale all'unità, come fu pure osservato al num. 11., ma nella seconda fila si annulla il primo termine, e rimangono gli altri essendo $T'_{0,1} = 0$, nella terza si annullano i due primi a cagione di $T'_{0,2} = T'_{1,2} = 0$, e così successivamente fino all'ultima fila, nella quale annullandosi tutti i termini da quello che contiene come fattore $T'_{0,x'}$ fino all' altro, che contiene come fattore $T'_{x'-1,x'}$ inclusivamente, restano i successivi $T'_{x',x'} . T_{x-x',0,x''} + \text{ec.} + T'_{x,x'} . T_{0,0,x''}$. Pertanto il coefficiente di $t^x t'^{x'} t''^{x''}$ in $\frac{qu't}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$ dipendentemente dalla natura della funzione $T'_{x,x'}$ potrà anche rappresentarsi sotto l'altra forma:

$$(O')..\left\{\begin{array}{l} \quad T_{x,x',x''} + T_{x-1,x',x''} + T_{x-2,x',x''} \ldots + T_{0,x',x''} \\ + T'_{1,1} . T_{x-1,x'-1,x''} + T'_{2,1} . T_{x-2,x'-1,x''} + T'_{3,1} . T_{x-3,x'-1,x''} \ldots + T'_{x,1} . T_{0,x'-1,x''} \\ + T'_{2,2} . T_{x-2,x'-2,x''} + T'_{3,2} . T_{x-3,x'-2,x''} + T'_{4,2} . T_{x-4,x'-2,x''} \ldots + T'_{x,2} . T_{0,x'-2,x''} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + T'_{x',x'} . T_{x-x',0,x''} + T'_{x'+1,x'} . T_{x-x'-1,0,x''} + T'_{x'+2,x'} . T_{x-x'-2,0,x''} \ldots + T'_{x,x'} . T_{0,0,x''} \end{array}\right\}$$

Questa espressione intanto specialmente nelle sue applicazioni può amettere molte riduzioni. Di fatto considerando tutte le variazioni di x, x' in $T_{x,x',x''}$ che danno altrettanti moltiplicatori rispettivi in ciascun termine di (O') è chiaro, che questi possono generalmente rappresentarsi per $T_{x-m,x'-n,x''}$ ove m, n possono essere numeri qualunque interi, ed anche lo zero. Quindi si vede, che se nella formola (N) si ponga $x-m$ in luogo di x, ed $x'-n$ in luogo di x' dovrà dirsi lo stesso di $x-m$ rispetto ad $x'-n$, ed x'' nel risultamento, che di x rispetto ad x', x'' nella (N) prima della sostituzione. Ora essendo la (N) indipendentemente dalla quantità costante q, che in essa entra come fattore la stessa che la (M), in cui ad x siasi sostituito $x-1$, ciò che vale in (M) per x rispetto ad x', x'' varrà in (N) per $x-1$ rispetto ad x', x'', e così varrà per $x-m-1$ rispetto ad $x'-n$, x'' pure in (N) dopo le accennate sostituzioni. Dunque se $x-m-1 = x'-n+x''$ sarà

$$T_{x-m,x'-n,x''} = \frac{(x-m-1)(x-m-2)(x-m-3).....(x'-n+1)}{1.2.3....(x-m-x'+n-1)}\, p^{x'-n}\, q^{x''+1},$$

e se $x-m-1 < x'-n+x''$, sarà $T_{x-m,x'-n,x''} = 0$. Dunque supposto sempre $x-m-1 = x'-n+x''$, ed inoltre $m=n=0$, sarà $T_{x,x',x''} =$

$$\text{(P)} \;\ldots\ldots\ldots\; \frac{(x-1)(x-2)(x-3).....(x'+1)}{1.2.3.....(x-x'-1)}\, p^{x'}\, q^{x''+1},$$

e se $x-1 < x'+x''$ si ha $T_{x,x',x''} = 0$.

Però l' espressione (P) non può dare il valore di $T_{x,x',x''}$ nel caso in cui essendo sempre $x-1 = x'+x''$ riesca $x-1 < x'+1$, e ciò è evidente. Per questo caso sarà quindi d'uopo di convertire la formola nell' altra

$$\text{(P')} \;\ldots\ldots\ldots\; \frac{(x-1)(x-2)(x-3).....(x''+1)}{1.2.3.....(x-x''-1)}\, p^{x'}\, q^{x''+1}$$

la quale si sarebbe ottenuta direttamente, se nel determinare successivamente i coefficienti di t^{x}, $t'^{x'}$, $t''^{x''}$ in $\frac{1}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$ si fosse con operazione reciproca determinato quello di $t''^{x''}$ prima di quello di $t'^{x'}$.

Da queste riflessioni si deduce facilmente, che la parte del coefficiente ricercato dal problema, la quale si ricava dalla funzione generatrice $\frac{qu't}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$ si riduce finalmente alla forma

$$
(\mathrm{O}'')\ldots\left\{\begin{array}{llll}
\quad\mathrm{T}_{x,x',x''} & +\quad\mathrm{T}_{x-1,x',x''} & \ldots+ & \mathrm{T}_{x'+x''+1,x',x''}\\
+\mathrm{T}'_{1,1}.\mathrm{T}_{x-1,x'-1,x''} & +\mathrm{T}'_{2,1}.\mathrm{T}_{x-2,x'-1,x''} & \ldots+\mathrm{T}'_{x-x'-x'',1} & .\mathrm{T}_{x'+x'',x'-1,x''}\\
+\mathrm{T}'_{2,2}.\mathrm{T}_{x-2,x'-2,x''} & +\mathrm{T}'_{3,2}.\mathrm{T}_{x-3,x'-2,x''} & \ldots+\mathrm{T}'_{x-x'-x''+1,2} & .\mathrm{T}_{x'+x''-1,x'-2,x'}\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots ; \ldots\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\
+\mathrm{T}'_{x',x'}.\mathrm{T}_{x-x',0,x''} & +\mathrm{T}'_{x'+1,x'}.\mathrm{T}_{x-x'-1,0,x''} & \ldots+\mathrm{T}'_{x-x''-1,x'} & .\mathrm{T}_{x''+1,0,x''}
\end{array}\right\}
$$

nella quale implicitamente si suppone, che sia $x > x' + x''$, altrimenti come è evidente per le cose dette tutta l' espressione si annulla. È poi opportuno di notare, che l' ultimo termine della serie in (O'') è $\mathrm{T}'_{x-x''-1,x'}.\mathrm{T}_{x''+1,0x''}$, poichè continuandone più oltre l' ultima fila, s' incontrerebbe subito il termine $\mathrm{T}'_{x-x'',x'}.\mathrm{T}_{x'',0,x''}$ in cui $\mathrm{T}_{x'',0.x''} = 0$, riferendosi questa espressione al caso in cui $x - m = x''$, $x' - n = 0$, e perciò $x - m - 1 < x' - n + x''$. Un' analoga riflessione dimostra come la serie parziale di ciascuna delle altre file finisca precisamente coll' ultimo termine in essa rispettivamente notato. Si vedrà pure facilmente, che il prodotto $\mathrm{T}'_{x',x'}.\mathrm{T}_{x-x',0,x''}$ ed i successivi che dipendono dall' aumento della x', determinano necessariamente l' ultima fila orizzontale, poichè l' ulteriore, che si supponesse, avrebbe per primo termine $\mathrm{T}'_{x'+1,x'+1} \times \mathrm{T}_{x-x'-1,-1,x''}$, il quale contenendo funzioni con indice negativo non può pel già detto aver luogo.

Resta ora a trovarsi il coefficiente di $t^x\, t'^{x'}\, t''^{x''}$ in $\frac{pu''t}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$. Perciò si osservi, che il coefficiente di $t^x\, t'^{x'}\, t''^{x''}$ in $\frac{pt}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$ è

$$
\frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x'+1)}{.3\ldots(x-x'-1)}\cdot\frac{(x-x'-1)(x-x'-2)\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots(x-x'-x''-1)}(1-p-q)^{x-x'-x''-1}\,p^{x'+1}\,q^{x''}
$$

moltiplicata per p l'espressione (M) e posto in essa $x-1$ in luogo di x, cambiandosi poi la (Q) stessa nella espressione

$$(Q)' \ldots\ldots\ldots \frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots(x-x'-1)}\, p^{x'+1}\, q^{x''}$$

quando $x-1=x'+x''$, ed annullandosi quando $x-1<x'+x''$. Questa espressione però non ha luogo quando alle stesse già supposte condizioni si aggiunga quella di $x-1<x'+1$. Allora essa serve all' ipotesi di $x-1=x'+x''$ quando si trasformi nell' altra

$$(Q'') \ldots\ldots\ldots \frac{(x-1)(x-2)(x-3)\ldots\ldots(x''+1)}{1.2.3\ldots(x-x''-1)}\, p^{x'+1}\, q^{x''}$$

che è pure giustificata per le riflessioni fatte intorno all' espressione (P'). Ciò posto se il coefficiente di $t^{x} t'^{x'} t''^{x''}$ in $\frac{pt}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$ si rappresenti per $T''_{x,x',x''}$, e per $T'''_{x,x''}$ il coefficiente di $t^{x} t'^{x''}$ in u'' cioè

$$(Q''') \ldots\ldots q^{x''}\left(1+(1-q)x''+\frac{x''(x''+1)}{1.2}(1-q)^2+\frac{x''(x''+1)(x''+2)}{1.2.3}(1-q)^3\ldots + \frac{x''(x''+1)(x''+2)\ldots\ldots(x-1)}{1.2.3\ldots(x-x')}(1-q)^{x-x''}\right)$$

quale ricavasi dal problema secondo del numero 11. ponendo nella formola apposita q in luogo di p, ed x'' in luogo di x', con raziocinio analogo a quello con cui si è trovato il coefficiente di $t^{x} t'^{x'} t'^{x''}$ in $\frac{qu't}{1-(pt+qt''+(1-p-q))t}$ si troverà il corrispondente in $\frac{pu''t}{1-(pt'+qt''+(1-p-q))t}$, il quale risulta dato dalla seguente espressione:

$$(R)\ldots\left\{\begin{array}{llll}
T''_{x,x',x''} + & T''_{x-1,x',x''} \ldots + & & T''_{x'+x''+1,x',x''} \\
+T'''_{1,1}\,.\,T''_{x-1,x',x''-1} & +T'''_{2,1}\,.\,T''_{x-2,x',x''-1} & \ldots+T'''_{x-x'-x'',1} & .\,T''_{x'+x'',x',x''-1} \\
+T'''_{2,2}\,.\,T''_{x-2,x',x''-2} & +T''_{3,2}\,.\,T''_{x-3,x',x''-2} & \ldots+T''_{x-x'-x''+1,2} & .\,T''_{x'+x''-1,x',x'-2} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
+T'''_{x'',x''}\,.\,T''_{x-x'',x',0} & +T'''_{x''+1,x''}\,.\,T''_{x-x''-1,x',0} & \ldots+T'''_{x-x'-1,x''} & .\,T''_{x'+1,x',0}.
\end{array}\right\}$$

Si vede pertanto, che la medesima è perfettamente analoga alla espressione (O''), e da questa ricavasi cambiando in essa primieramente i simboli generali $T_{x,x',x''}$, $T'_{x,x'}$ rispettivamente in $T''_{x,x',x''}$ e $T'''_{x,x''}$, e poscia trasportando all'indice x'' le variazioni dell'indice x' e reciprocamente considerando x' come costante in vece di x'', coll'avvertenza poi di compiere l'espressione (R) colla fila orizzontale, che ha per primo termine $T'''_{x'',x''} \, . \, T''_{x-x'',x',0}$ ripetendo un discorso affatto simile a quello con cui si determinò per ultima fila in (O'') quella, che ha per primo termine $T'_{x,x'} \, . \, T_{x-x',0,x''}$. Rimane pertanto dimostrato, che la somma delle tre espressioni (M), (O''), (R) è il valore cercato di $y_{x,x',x''}$, che risolve perciò il problema.

Per farne ora qualche applicazione sia $x=5$, $x'=3$, $x''=1$. Ponendo questi valori in (M), la prima parte del coefficiente richiesto risulta $20(1-p-q)p^3q$. Ponendoli poscia in (O'') si tratterà di determinare i valori di $T_{5,3,1}$, $T'_{1,1} \, . \, T_{4,2,1}$, $T'_{2,2} \, . \, T_{3,1,1}$, $T'_{3,3} \, . \, T_{2,0,1}$ alla somma de' quali si riduce (O'') in questo caso, giacchè ogni altro termine di quella espressione generale divien nullo, perchè in esso il moltiplicatore funzione delle tre variabili riesce sempre tale che l'indice in prima sede non supera la somma degli altri due. Ciò posto applicando simultaneamente le formole (P), (N') si ha $T_{5,3,1}=4p^3q^2$, $T'_{1,1} \, . \, T_{4,2,1}=p.3p^2q^2$, $T'_{2,2} \, . \, T_{3,1,1}=p^2.2pq^2$, $T'_{3,3} \, . \, T_{2,0,1}=p^3q^2$. Restano ora a prendersi nella espressione (R) i valori di $T''_{5,3,1}$, $T'''_{1,1} \, . \, T''_{4,3,0}$ riducendosi la medesima a questi soli come rilevasi per le osservazioni già fatte. Pertanto la formola (Q') dà $T''_{5,3,1}=4p^4q$, e le formole (Q'''), (Q'') danno insieme $T'''_{1,1} \, . \, T''_{4,3,0}=q\,p^4$. Sarà dunque $y_{x,x'',x''}$ $=20(1-p-q)p^3q+4p^3q^2+3p^3q^2+2p^3q^2+p^3q^2+4p^4q+p^4q$ $=20p^3q-10p^3q^2-15qp^4$.

Questo risultato viene esattamente confermato coll' uso del metodo delle sostituzioni successive. Di fatto richiamando sempre ed applicando ad ogni espressione della forma $y_{x,x',x''}$ il raziocinio con cui fu stabilita l'equazione fondamentale del problema si ha $y_{5,3,1} = py_{4,2,1} + qy_{4,3,0} + (1-p-q)y_{4,3,1}$ $= p(py_{3,1,1} + qy_{3,2,0} + (1-p-q)y_{3,2,1}) + q(py_{3,2,0} + qy_{3,3,-1}$ $+ (1-p-q)y_{3,3,0}) + (1-p-q)(py_{3,2,1} + qy_{3,3,0} + (1-p-q)y_{3,3,1})$. Quindi a cagione di $y_{3,3,0} = y_{3,3,-1} = p^3$, e di $y_{3,3,1} = 0$ viene pure $y_{5,3,1} = p^2 y_{3,1,1} + 2qpy_{3,2,0} + 2p(1-p-q)y_{3,2,1}$ $+ ((1-p)p^3 + (1-p-q)p^3)q = p^2(py_{2,0,1} + qy_{2,1,0} + (1-p-q)y_{2,1,1})$ $+ 2qp(py_{2,1,0} + qy_{2,2,-1} + (1-p-q)y_{2,2,0}) + 2p(1-p-q)(py_{2,1,1}$ $+ qy_{2,2,0} + (1-p-q)y_{2,2,1}) + q((1-p)p^3 + (1-p-q)p^3)$ $= p^3 y_{2,0,1} + 3p^2 qy_{2,1,0} + 3p^2(1-p-q)y_{2,1,1} + 2qp(1-p)p^2$ $+ 2pq(1-p-q)p^2 + q((1-p)p^3 + (1-p-q)p^3) = p^3(py_{1,-1,1}$ $+ qy_{1,0,0} + (1-p-q)y_{1,0,1}) + 3p^2 q(py_{1,0,0} + qy_{1,1,-1}$ $+ (1-p-q)y_{1,1,0}) + 3p^2(1-p-q)(py_{1,0,1} + qy_{1,1,0} + (1-p-q)y_{1,1,1}$ $+ 3q(1-p)p^3 + 3q(1-p-q)p^3 = p^3(pq + q + (1-p-q)q)$ $+ 3p^2 q(p + qp + (1-p-q)p) + 3p^2(1-p-q)(pq + qp) + 3q(1-p)p^3$ $+ 3q(1-p-q)p^3 = p^3(2q - q^2) + 3p^2 q(2p - p^2) + 6qp^3(1-p-q)$ $+ 3q(1-p)p^3 + 3q(1-p-q)p^3 = 2qp^3 - q^2p^3 + 6qp^3 - 3qp^4 + 6qp^3$ $- 6qp^4 - 6q^2p^3 + 3qp^3 - 3qp^4 + 3qp^3 - 3qp^4 - 3q^2p^3 = 20qp^3$ $- 10q^2p^3 - 15qp^4$ come precedentemente.

Sia ora per altro esempio in $y_{x,x',x''}$ $x = 4$, $x' = x'' = 2$, e l' espressione (M') applicata a questo caso dà $y_{4,2,2} = 6p^2q^2$ giacchè nel medesimo svaniscono interamente le espressioni (O''), (R), essendo quanto alla prima in ogni variazione del simbolo $\mathrm{T}_{r,r',r''}=0$ l'indice in prima sede eguale o minore della somma degli altri due, e quindi $\mathrm{T}_{4,2,2}=0$, $\mathrm{T}_{3,1,2}=0$, $\mathrm{T}_{2,1,2}=0$ ec. $\mathrm{T}_{2,0,2}=0$, $\mathrm{T}_{1,0,2}=0$ ec. La stessa osservazione si estende al simbolo $\mathrm{T}''_{x,x',x''}$ nella espressione (O''). Non resta perciò che a verificare anche tale risultato col metodo delle sostituzioni successive. Con questo si ha $y_{4,2,2}=py_{3,1,2}+qy_{3,2,1}+(1-p-q)y_{3,2,2}=p(py_{2,0,2}+qy_{2,1,1}+(1-p-q)y_{2,1,2})+q(py_{2,1,1}+qy_{2,2,0}+(1-p-q)y_{2,2,1})=2pqy_{2,1,1}+p^2y_{2,0,2}+q^2y_{2,2,0}=4p^2q+p^2q^2+q^2p^2=6q^2p^2$ come prima.

È opportuno intanto di notare quì di passaggio, che nella supposizione di $x=x'+x''$ l'espressione $\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x'+1)}{1.2.3\ldots.x''}p^{x'}q^{x''}$ unico valore di $y_{x,x',x''}$ mostra col suo coefficiente $\frac{x(x-1)(x-2)\ldots.(x'+1)}{1.2.3\ldots.x''}$ in quanti modi gli eventi corrispondenti a p, q possono insieme permutarsi in $x'+x''$ colpi colla condizione, che l' uno abbia luogo per x' volte, l'altro per x'' volte, giacchè ad ognuna di queste permutazioni relative all' intero numero de' colpi competerà sempre la probabilità composta $p^{x'}q^{x''}$.

24. I mezzi fin quì usati per risolvere le equazioni alle differenze parziali con funzioni di due o tre variabili si palesano in gran parte adattati alla risoluzione di altre analoghe equazioni di un ordine più elevato, e con funzioni contenenti un maggior numero di variabili. I limiti però naturalmente prescritti ad un saggio di una qualunque Teoria non consentono di mostrare in questo scritto tutta l'estensione di quella delle funzioni generatrici. Rimarrebbero quindi molte altre considerazioni da farsi intorno alla medesima, e principalmente riguardo ai diversi metodi dello sviluppo in serie ordinate secondo le potenze ed i prodotti delle potenze di più variabili di quelle espressioni, che le contengono divise o comunque insieme moltiplicate, giacchè appunto a tale sviluppo riduce-

si la risoluzione di qualunque equazione tra le funzioni generatrici. A dilatare possibilmente il relativo Calcolo possono eziandio giovare parecchi Teoremi non tutti forse compresi fra quelli, che dimostrò il Laplace nella citata opera delle Probabilità, e non tutti certamente esposti da questo Sommo Geometra con quella maggiore semplicità e chiarezza, che desiderar possa il progresso delle Scienze Matematiche. Merita perciò sempre questo ramo importantissimo di analisi di essere perfezionato con nuove cure, e con nuovi sforzi, siccome in ispecie può aggiungersi certamente alle speculazioni del Laplace in ciò, che ha rapporto alle equazioni a differenze tanto ordinarie che parziali coi coefficenti variabili, ed a quelle che dotate di coefficienti costanti hanno poi differenze variabili, col mostrarne la reciproca dipendenza. Sarebbe poi ad ogni modo da augurarsi, che il metodo per risolvere le equazioni alle differenze coi coefficienti variabili potesse procedere col soccorso del calcolo delle funzioni generatrici in un modo analogo a quello con cui si applica alle equazioni dotate di coefficienti costanti. E perciò sarebbe d'uopo sostituire agli artifizj che riducono le une alle altre di tali equazioni per l' uso del calcolo delle differenze finite, ne' pochi casi, che non vinsero la sagacità degli Analisti, metodi di più estesa riduzione intrinsecamente derivanti dalla Teoria delle funzioni generatritrici. A questa intrapresa, che particolarmente vedrei con lieto animo abbracciarsi da ingegni più felici del mio, amerei io pure rivolgermi non senza però diffidare della difficoltà della materia, delle angustie del tempo, e delle vicende della vita.

FINE.

31

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY